Ю. П. ДОБРОЛЕНСКИЙ, В. И. ИВАНОВА,
Г. С. ПОСПЕЛОВ

# АВТОМАТИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СНАРЯДОВ

Под редакцией доктора техн. наук,
профессора *Г. С. Поспелова*

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования РСФСР
в качестве учебника
для высших технических учебных заведений*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ОБОРОНГИЗ
Москва 1963

УДК 62-50(075.8) : 623.451 8

Книга посвящена автоматике управляемых снарядов. Задачи автоматического управления снарядами различных классов решаются на основе применения развитых в теории автоматического регулирования инженерных методов расчета линейных и нелинейных динамических систем.

Рассмотрены возможные принципы получения управляющих сигналов при разных методах наведения на цель. Изложены основы динамики управления снарядами и типовые структуры систем управления. Даны аналитические выражения для расчета и определения ошибок наведения.

Книга является учебником для студентов втузов, вместе с тем она будет полезна для инженерно-технических работников, специализирующихся в области автоматического управления снарядами.

Рецензенты докт. техн. наук, проф. **В. В. Солодовников** и докт. техн. наук **Б. Е. Черток**

Редактор канд. техн. наук, доцент **Ю. А. Вавилов**

Зав. редакцией инж. *Г. И. Штейнберг*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время снаряды самых различных классов и схем имеют систему управления, обеспечивающую повышение точности стрельбы. Система управления образует замкнутый контур для прохождения управляющих сигналов и сигналов обратной связи. Наличие такого контура характерно для систем автоматического управления, теория которых разработана достаточно полно. Для оценки эффективности любой системы управления большое значение имеет характер динамических процессов, протекающих в ней. Развитые в теории автоматического регулирования методы позволяют решить задачу анализа систем управления снарядами.

В книге изложены теоретические основы систем автоматического управления снарядов. В первых двух главах даны общие сведения об управляемых снарядах и кратко рассмотрены основные математические методы, необходимые при решении задач автоматического управления.

В главах III—VII приведены методы получения управляющих сигналов при различных способах наведения снарядов, преобразования и усиления этих сигналов; в заключение на основе литературных данных, опубликованных в советской и зарубежной печати, кратко описаны типы приводных устройств для управляющих органов снарядов.

В главах VIII—XII обобщены вопросы динамики управления движением снаряда относительно его центра тяжести, а также динамики управления движением центра тяжести снаряда относительно заданной траектории.

Главы XIII—XV содержат анализ движения центра тяжести снаряда при различных способах наведения; цель этого анализа — получение выражения для промаха снаряда.

В заключительной XVI главе представлены комплексы управ-

ляемых снарядов и пояснен метод оценки этих комплексов с точки зрения точности стрельбы.

Конкретные примеры систем управления заимствованы из зарубежной литературы.

Главы I, VIII, XI, XII и §§ 1—5 главы II, §§ 1—3 главы IX, §§ 1—9 главы X написаны канд. техн. наук, доцентом Ю. П. Доброленским. Главы III, IV, VI, VII и §§ 1—8 главы V — канд техн. наук, доцентом В. И. Ивановой. Главы XIII—XVI, § 9 главы V, § 10 главы X — докт. техн. наук, проф. Г. С. Поспеловым; § 6 главы II, § 4 главы 9, § 9 главы 10 написаны докт. техн. наук, проф. Г. С. Поспеловым при участии канд. техн. наук, доцента Н. К. Бодунова.

Все критические замечания и пожелания по содержанию книги авторы просят направлять по адресу: Москва, И-51, Петровка, 24, Оборонгиз.

*Глава I*

# ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УПРАВЛЯЕМЫХ СНАРЯДАХ

## § 1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Быстрое развитие в последние десятилетия таких отраслей науки и техники, как автоматика, радиоэлектроника и др., привело к созданию нового мощного вида вооружения — управляемых снарядов. Впервые управляемые снаряды были применены во время второй мировой войны.

Каждый снаряд — управляемый или неуправляемый — выпускается (выстреливается) со специальной пусковой установки. Например, для артиллерийских снарядов такой пусковой установкой служит ствол орудия, для авиационных бомб — бомбодержатели, для ракет — направляющие или пусковая площадка и т. п. Точность стрельбы неуправляемыми снарядами определяется точностью прицеливания, т. е. точностью, с которой может быть рассчитано и реализовано требуемое направление снаряда при выстреле. При прицеливании по возможности учитываются все факторы, определяющие решение задачи о точке встречи снаряда и цели: скорость цели и снаряда, направление ветра, температура и плотность воздуха по траектории и т. д. Тем не менее в большинстве случаев точность стрельбы неуправляемыми снарядами оказывается недостаточной. Ошибки попадания можно классифицировать следующим образом:

1) ошибки прицелов; сюда входят как методические ошибки, возникающие из-за того, что большинство прицелов решает задачу о точке встречи снаряда с целью приближенно, так и инструментальные ошибки, появляющиеся из-за несовершенства элементов прицела;

2) случайные ошибки, которые являются следствием многих причин, носящих случайный характер по отношению к процессу прицеливания; сюда следует отнести ошибки за счет неизбежного разброса параметров снарядов и их пусковых установок, ошибки оператора и неучтенные внешние факторы (изменение ветра, температуры и плотности воздуха по сравнению с расчетными), дей-

ствующие на снаряд после выстрела, а также возможный маневр цели после выстрела, отличающийся от принятого при решении задачи о точке встречи.

Недостаточная в некоторых случаях точность стрельбы неуправляемыми снарядами может быть подтверждена следующими примерами:

1) малой вероятностью попадания зенитного снаряда в самолет;

2) малой эффективностью стрелково-пушечного вооружения самолета; поэтому действенная стрельба с самолета по самолету возможна лишь на малой дистанции;

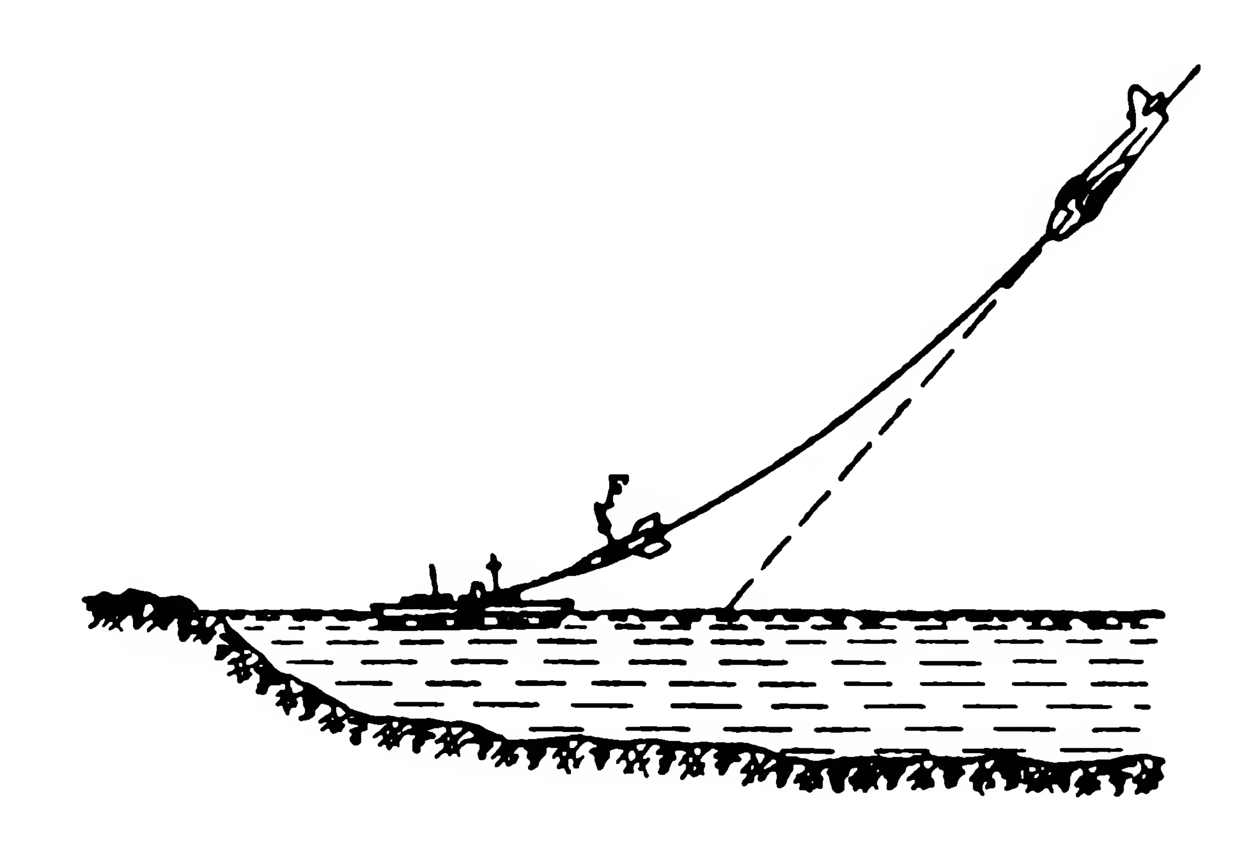
3) низкой точностью бомбометания с самолета по наземным целям; для поражения цели малых размеров, например моста, требуется сбросить на нее десятки, а иногда и сотни бомб.

При применении управляемых снарядов точность стрельбы значительно увеличивается. Управляемым условимся называть снаряд, снабженный системой управления, которая может воздействовать на его траекторию после того, как снаряд отделился от пусковой установки. Под системой управления понимается вся совокупность технических средств, обеспечивающих изменение траектории снаряда с целью увеличения точности стрельбы. Сюда входят различные измерительные системы — как бортовые, так и наземные, обеспечивающие определение положения снаряда в пространстве и относительно цели, системы преобразования и передачи сигналов, а также исполнительные (управляющие) органы, которые непосредственно воздействуют на полет снаряда. В некоторых случаях система управления работает в течение всего времени полета снаряда, иногда — лишь на определенных участках его траектории. В результате действия системы управления обеспечивается резкое увеличение точности стрельбы.

Таким образом, боевая эффективность управляемых снарядов значительно выше, чем неуправляемых. С другой стороны, применение управления усложняет изготовление и повышает стоимость снарядов. Однако благодаря высокой точности стрельбы управляемыми снарядами общая стоимость поражения некоторых целей становится значительно меньше, чем при использовании неуправляемых снарядов.

Применение управляемых снарядов обеспечивает также некоторые дополнительные преимущества. Так, например, увеличение точности стрельбы позволяет поражать цели управляемыми снарядами со значительно больших дистанций, чем это возможно при использовании неуправляемых снарядов. Большая дальность стрельбы затрудняет уничтожение стартовых площадок или объектов (самолетов, кораблей, самоходных установок), с которых запускаются управляемые снаряды. В качестве второго примера,

показывающего дополнительные преимущества управляемых снарядов, укажем на возможность уменьшения в некоторых случаях точности прицеливания, что особенно важно при стрельбе с самолетов. Наконец, при стрельбе по подвижным целям вероятность поражения неуправляемым снарядом может быть настолько мала,




Фиг. 1.1. Изменение траектории снаряда под действием управляющей силы.

что для поражения цели за время ее нахождения в зоне действия оружия не удается сделать достаточное число выстрелов. При более высокой вероятности поражения цели управляемым снарядом сокращается число выстрелов и время, необходимое для поражения цели.

Как указывалось выше, система управления изменяет траекторию снаряда, стремясь, чтобы траектория прошла возможно ближе, а в лучшем случае — через цель. Чтобы воздействовать на траекторию какого-либо тела, необходимо приложить к нему дополнительную (помимо уже действующих) силу, которую в рассматриваемом случае будем называть управляющей. В качестве примера на фиг. 1.1 показаны траектории неуправляемого (пунктир) и управляемого (сплошная) самолетного реактивного снаряда. Вследствие ошибок прицеливания неуправляемый снаряд прошел бы мимо цели (корабля). Изменение траектории управляемого снаряда по сравнению с траекторией неуправляемого есть результат действия на снаряд управляющей силы $F$, которая возникает благодаря использованию системы управления. Методы создания управляющей силы и их техническая реализация рассматриваются в § 1.2.

Несмотря на разнообразие технических способов управления снарядами, можно назвать лишь три принципиально различных метода управления: автономное управление, телеуправление и самонаведение. Различие этих методов заключается в способах и месте получения сигналов, используемых для управления полетом снаряда.

*Автономное управление* состоит в том, что сигналы управления вырабатываются аппаратурой, целиком размещенной на снаряде, причем эта аппаратура после запуска снаряда не получает никакой информации ни из точки запуска, ни от цели. При автономном управлении можно использовать два принципа для получения управляющих сигналов. Можно рассчитать, как должны изменяться по времени некоторые основные параметры (скорость, угол наклона траектории, курс и т. п.), определяющие траекторию снаряда при его движении к цели. Полученные функции времени вводятся в систему управления снаряда в качестве заданных величин или программ. Действительное значение указанных параметров непрерывно измеряется соответствующими чувствительными элементами, и система управления ликвидирует рассогласование между заданными и действительными значениями параметров движения. В частности, снаряду может быть задана определенная траектория полета, и система управления будет возвращать снаряд на эту траекторию. Такое автономное управление называется программным.

Однако автономное управление снарядом можно осуществить и на другом принципе. Пусть на снаряде установлена аппаратура, с помощью которой ведется непрерывное определение его координат в пространстве. Эта аппаратура может быть или чисто инерциальной или инерциальной с коррекцией от каких-либо земных или астрономических ориентиров. Координаты снаряда, даваемые указанной аппаратурой, вводятся в счетно-решающее устройство снаряда, образующее сигналы управления, обеспечивающие движение снаряда к цели, координаты которой считаются известными.

Такой метод получения управляющих сигналов отличается от программного управления отсутствием заданных временных функций на входе в систему управления. В этом случае определенная траектория не задается, а в зависимости от действительных координат снаряда каждый раз рассчитывается новая траектория, проходящая через цель.

Как видно из приведенного описания, метод автономного управления применим для снарядов, действующих главным образом по неподвижным целям. В случае движения цели ее будущие координаты должны быть заранее известны с достаточной степенью точности в интервале времени, равном времени полета снаряда.

*Телеуправлением* называется такой метод, при котором координаты цели и снаряда непрерывно измеряются на пункте управления, где и вырабатываются сигналы, действующие на систему управления снаряда. Эта система должна так изменить траекторию снаряда, чтобы обеспечить его встречу с целью. В качестве разновидности этого метода возможен случай, когда управляющие сигналы формируются на самом снаряде, но обязательно за счет энергии, излучаемой из пункта управления. Очевидно, что телеуправление как метод получения управляющих сигналов не накладывает никаких принципиальных ограничений на характер движения цели или пункта управления.

*Самонаведением* называется такой метод управления, при котором управляющие сигналы вырабатываются на самом снаряде за счет излучения или отражения целью какого-либо вида энергии, выделяющего цель на окружающем ее фоне. Таким образом, при самонаведении координаты цели относительно снаряда измеряются аппаратурой снаряда и система управления по этим данным наводит снаряд на цель.

Рассмотренные методы управления снарядами могут применяться как на всей траектории снаряда, так и на части ее. В некоторых случаях на разных участках траектории используются различные методы. Так, например, на большей части траектории снаряд может управляться автономно, а на конечном этапе полета для увеличения точности попадания используется метод самонаведения. Наконец, возможен случай, когда на одном и том же участке траектории управление различными параметрами движения снаряда ведется разными методами.

В заключении этого параграфа приведем часто встречающуюся в литературе классификацию управляемых снарядов, связанную с местом старта и местом цели. Место старта определяет общую обстановку применения снаряда. Место цели в какой-то степени определяет ее природу и, следовательно, тактическое назначение снаряда. По указанному принципу управляемые снаряды разделяются на следующие классы:

1) «земля — земля»;
2) «земля — воздух»;
3) «воздух — земля»;
4) «воздух — воздух».

Первое слово в каждом классе относится к месту старта снаряда, а второе — к месту цели. При этой классификации термином «земля» обозначается как суша, так и море.

Необходимость классификации управляемых снарядов обусловлена тем, что в настоящее время известно очень большое число различных типов таких снарядов. Управляемые снаряды применяются во всех родах войск и предназначаются для решения самых

разнообразных стратегических и тактических задач *. Для иллюстрации этого положения перечислим виды управляемых снарядов **:

1) баллистические ракеты;
2) самолеты-снаряды;
3) управляемые авиационные бомбы;
4) управляемые снаряды противовоздушной обороны;
5) управляемые снаряды воздушного боя;
6) управляемые снаряды, применяемые на поле боя (противотанковые, противопехотные и т. п.).

Кроме указанных типов управляемых снарядов, траектория которых проходит в атмосфере Земли, имеется несколько типов управляемых снарядов, движущихся к цели в воде. Эти снаряды в настоящей книге не рассматриваются.

## § 1.2. МЕТОДЫ СОЗДАНИЯ УПРАВЛЯЮЩЕЙ СИЛЫ

Любое движущееся тело описывает в пространстве некоторую траекторию, форма которой определяется только начальными условиями и силами, действующими на тело во время его движения. На управляемый снаряд в общем случае действуют в полете следующие силы: сила тяги двигателя, сила веса и аэродинамические силы ***. Чтобы изменить траекторию полета снаряда, нужно изменить величину или направление (или то и другое вместе) этих сил, так как приложить какие-либо другие силы, кроме указанных выше, к летящему снаряду невозможно. Указанную задачу изменения сил, действующих на снаряд, выполняет система управления, обеспечивая создание управляющей силы нужной величины и направления. Эта сила должна быть перпендикулярна траектории полета и расположена в той плоскости, в которой необходимо изменить траекторию полета снаряда.

Так как полет подавляющего большинства типов управляемых снарядов происходит в нижних слоях атмосферы, где аэродинамические силы играют основную роль в создании управляющей силы, рассмотрим кратко основные аэродинамические формы снарядов. Современные снаряды, как правило, имеют сверхзвуковые скорости. Поэтому корпус снаряда обычно выполняется в виде тела вращения с острой головной частью. Снаряды могут быть бескрылыми (лишь со стабилизатором), плоскокрылыми, крестокрылыми или с кольцевым крылом. Указанные формы снарядов показаны на фиг. 1.2.

Снаряд называется аэродинамически симметричным, если аэродинамические силы не изменяются при повороте его вокруг про-

* В. И. Марисов, И. К. Кучеров, Управляемые снаряды, Воениздат, 1959.

** Примеры конкретных снарядов приведены в § 1.4.

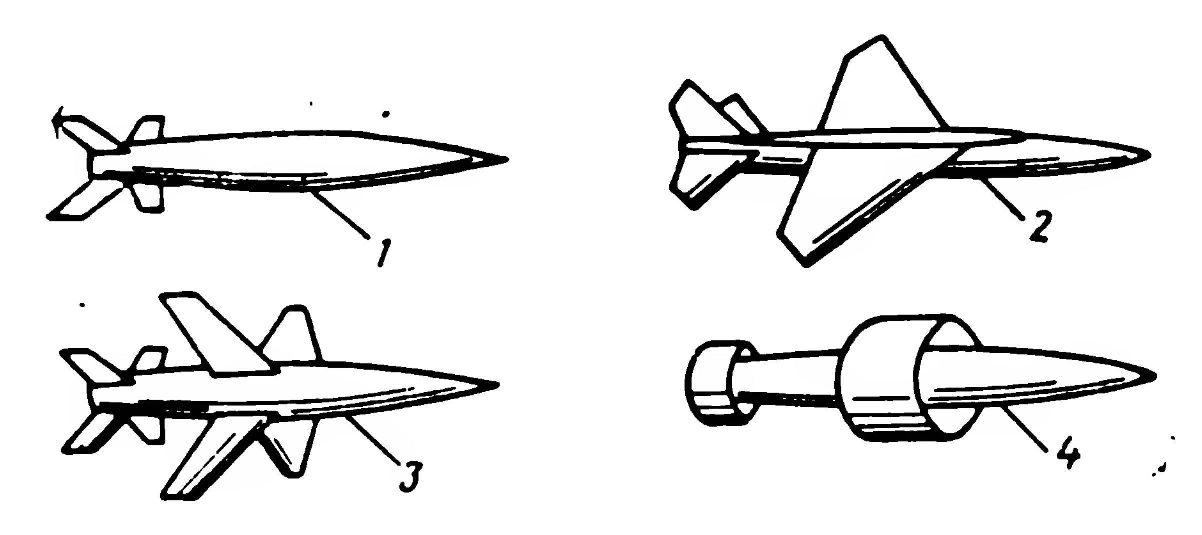
*** Сила тяги в принципе также является аэродинамической силой и выделение ее сделано лишь для удобства изложения.

дольной оси. Очевидно, что полной аэродинамической симметрией обладают бескрылый снаряд и снаряд с кольцевым крылом. У крестокрылого снаряда аэродинамические силы незначительно меняются при повороте вокруг продольной оси. Плоскокрылому снаряду свойственна наибольшая аэродинамическая несимметрия.

В настоящее время используются два способа создания управляющей силы:

1) поворотом корпуса снаряда вокруг центра тяжести с помощью рулевых органов (снаряды с рулевым управлением);

2) поворотом крыльев относительно корпуса или включением дополнительных двигателей с направлением тяги, нормальным к траектории полета (непосредственный способ).



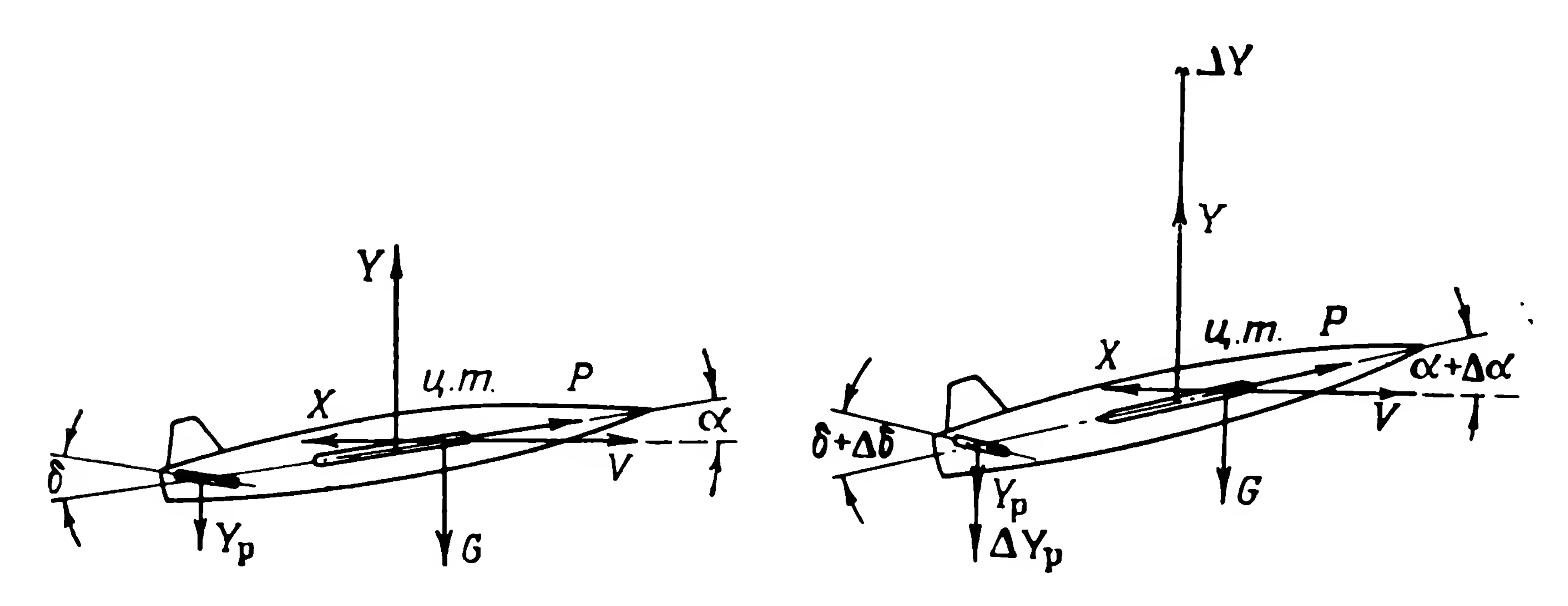

Фиг. 1.2. Аэродинамические формы снарядов:
1 — бескрылый, 2 — плоскокрылый, 3 — крестокрылый, 4 — с кольцевым крылом.

Наибольшее распространение получил первый способ. Техническая реализация его зависит от аэродинамической формы снаряда. Рассмотрим принцип получения управляющей силы вначале на примере плоскокрылого снаряда. На фиг. 1.3 показаны силы, действующие на снаряд, летящий горизонтально с постоянной скоростью $V$. Сумма сил тяги $P$, веса $G$, подъемных сил крыла и фюзеляжа $Y$ и руля $Y_р$ и силы лобового сопротивления $X$ равна нулю. Также равен нулю момент всех сил относительно центра тяжести снаряда. Благодаря этим условиям и обеспечивается прямолинейный и равномерный полет снаряда. Подъемная сила $Y$ создается за счет угла атаки $\alpha$ крыльев и фюзеляжа, а подъемная сила руля — за счет угла атаки руля, равного $\delta - \alpha$.

Если отклонить рули снаряда на некоторый угол $\Delta\delta$ по часовой стрелке (фиг. 1.4), то отрицательная подъемная сила руля увеличится на величину $\Delta Y_р$. Снаряд начнет поворачиваться вокруг центра тяжести, увеличивая свой угол атаки. Этот поворот закончится, когда угол атаки возрастет на величину $\Delta\alpha$, обеспечивающую такое приращение подъемной силы крыла и фюзеляжа $\Delta Y$ *, при котором момент сил относительно центра тяжести сна-

* Для упрощения картины рассматриваемого явления скорость полета $V$ считаем постоянной.

ряда снова станет равным нулю. Однако проекция сил на нормаль к направлению полета теперь будет равна не нулю, а $\Delta Y - \Delta Y_р$*. Так как площадь крыльев обычно бывает значительно больше площади рулей, то и приращение подъемной силы крыла оказывается значительно больше приращения подъемной силы рулей. Именно это приращение подъемной силы крыла $\Delta Y$, которое может в несколько раз превышать вес снаряда $G$ и которое направлено пер-




Фиг. 1.3. Силы, действующие на плоскокрылый снаряд в прямолинейном полете.

Фиг. 1.4. Силы, действующие на плоскокрылый снаряд при отклонении руля.

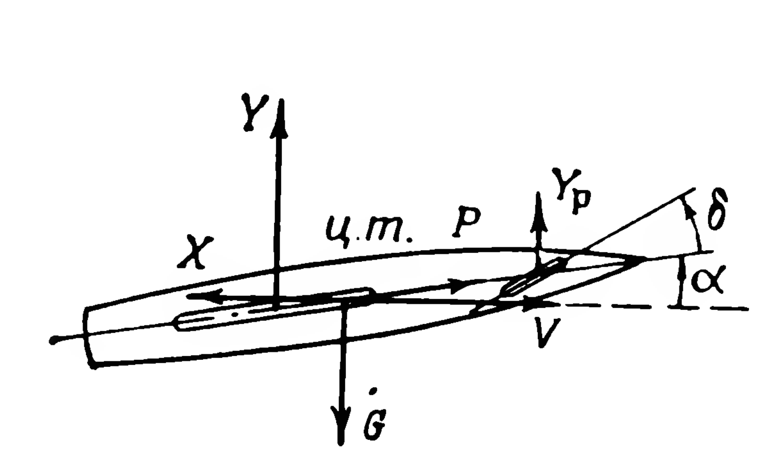
пендикулярно вектору скорости полета снаряда, является управляющей силой в рассматриваемом случае. С помощью этой силы, получаемой за счет поворота снаряда относительно центра тяжести, изменяется траектория полета плоскокрылого снаряда в вертикальной плоскости.

Кроме показанного на фиг. 1.3 и 1.4 обычного заднего (относительно крыльев) расположения рулей, на снарядах широко применяется и переднее расположение (аэродинамическая схема «утка»). Плоскокрылый снаряд с передним расположением рулей схематично приведен на фиг. 1.5. Переднее расположение рулей на снаряде удобно из чисто конструктивных соображений: аппаратура системы управления и привод рулей размещаются в передней части снаряда, так как задняя часть обычно занята двигателем. Вторым преимуществом переднего расположения рулей является то, что в этом случае подъемные силы крыла и рулей складываются, а не вычитаются, как это имеет место при заднем расположении.

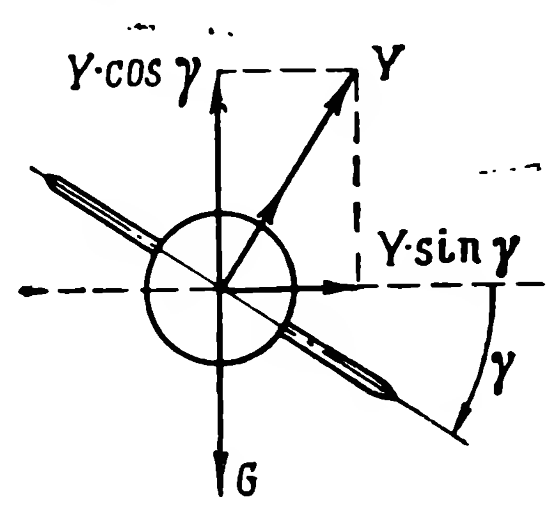
Управляющая сила в горизонтальной плоскости у плоскокрылых снарядов создается поворотом относительно продольной оси, т. е. с помощью крена снаряда. На фиг. 1.6 показаны силы, действующие на снаряд, имеющий угол крена $\gamma$. За счет крена подъ-

* Здесь не учитывается небольшой прирост проекции силы тяги $P$ на нормаль к траектории полета.

емная сила дает горизонтальную составляющую ($Y \sin \gamma$), которая и является управляющей силой, изменяющей траекторию снаряда в горизонтальной плоскости. Очевидно, что при крене снаряда уменьшается вертикальная составляющая подъемной силы ($Y \cos \gamma$). Чтобы сохранить горизонтальный полет, необходимо при увеличении угла крена $\gamma$ так увеличивать угол атаки $\alpha$, чтобы эта составляющая оставалась все время равной весу снаряда $G$.



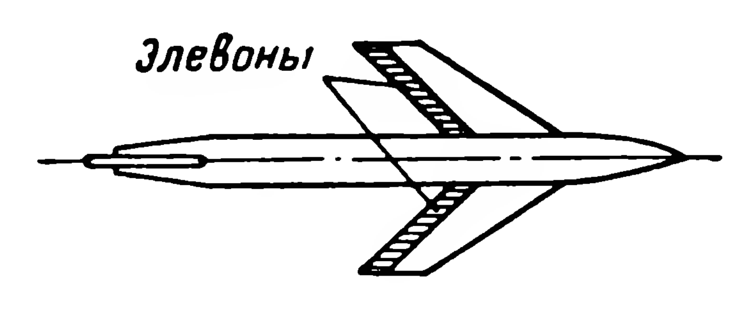

Фиг. 1.5. Силы, действующие на плоскокрылый снаряд с передним расположением рулей.




Фиг. 1.6. Силы, действующие на плоскокрылый снаряд при крене.

Таким образом, и в горизонтальной плоскости управление происходит в конечном итоге за счет увеличения угла атаки, т. е. поворотом снаряда относительно его центра тяжести.

Для создания угла крена могут использоваться как элероны, так и рули, если их отклонять в разные стороны. Иногда рули у плоскокрылых снарядов совмещаются с элеронами (фиг. 1.7). Такие рулевые органы называются элевонами. При отклонении элевонов в одну сторону они выполняют функции руля высоты, а при отклонении в разные стороны — элеронов.

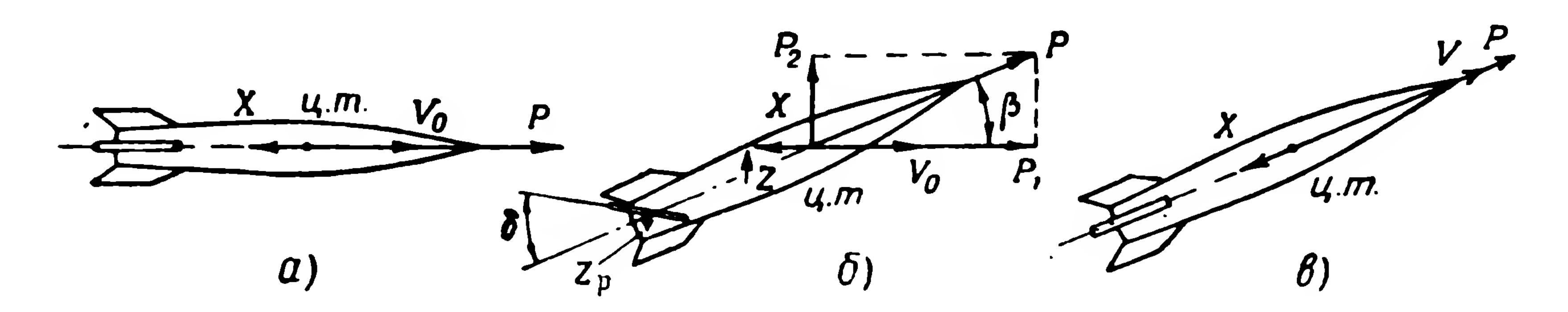



Фиг. 1.7. Плоскокрылый снаряд с элевонами.

Крестокрылые снаряды имеют крылья и рули, расположенные и в горизонтальной и в вертикальной плоскостях (см. фиг. 1.2). Возможно переднее и заднее (относительно крыльев) расположение рулей. Очевидно, что для таких снарядов управляющая сила в вертикальной и горизонтальной плоскостях регулируется так же, как у плоскокрылого снаряда в вертикальной плоскости.

На снарядах с кольцевым крылом применяется тот же метод регулирования управляющей силы, что и у крестокрылых снарядов. Рулевые органы снарядов с кольцевым крылом могут также иметь форму кольца (см. фиг. 1.2), которое благодаря карданному подвесу поворачивается в двух плоскостях и управляет углом поворота снаряда относительно центра тяжести. Возможно сочетание кольцевого крыла с крестообразными рулевыми органами.

Иначе протекает процесс регулирования управляющей силы у бескрылого снаряда (см. фиг. 1.2). Необходимо подчеркнуть, что бескрылые снаряды применяются как баллистические, т. е. как снаряды, движущиеся на основной части траектории по инерции за счет разгона до большой скорости на начальном, сравнительно коротком участке траектории. На этом участке траектории, называемом активным, работает реактивный двигатель, разгоняющий снаряд. Тяга двигателя значительно превосходит силу лобового сопротивления воздуха, вследствие чего снаряд движется с ускорением.



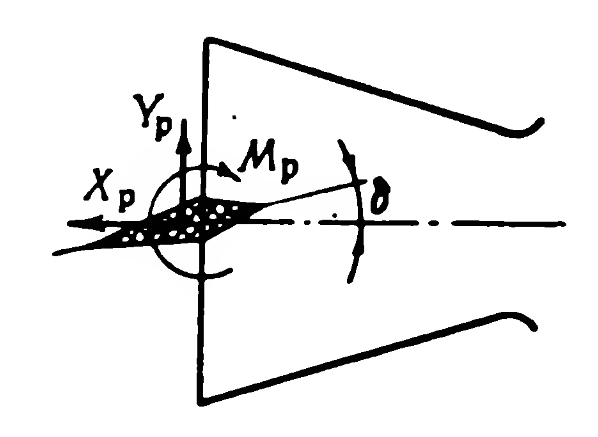

Фиг. 1.8. Силы, действующие на бескрылый снаряд.

На фиг. 1.8 показаны три положения бескрылого снаряда и силы, действующие на снаряд в этих положениях. Для упрощения рассмотрена картина движения в горизонтальной плоскости, в которой на снаряд не действует сила веса. Поэтому при прямолинейном движении снаряда углы атаки и отклонения рулей равны нулю (фиг. 1.8, *а*). С помощью руля повернем корпус снаряда на некоторый угол так, что возникнет угол атаки снаряда в горизонтальной плоскости β (фиг. 1.8, *б*). За счет этого угла появится боковая аэродинамическая сила *Z*, которая невелика, так как у снаряда нет крыльев. Влияние этой силы на движение снаряда здесь не учитывается, так как не она играет основную роль в управлении бескрылым снарядом. После поворота снаряда руль должен быть поставлен в нейтральное положение. Если корпус снаряда поворачивается быстро, то вначале вектор скорости $\overline{V_0}$ сохраняет свою величину и положение (фиг. 1.8, *б*).

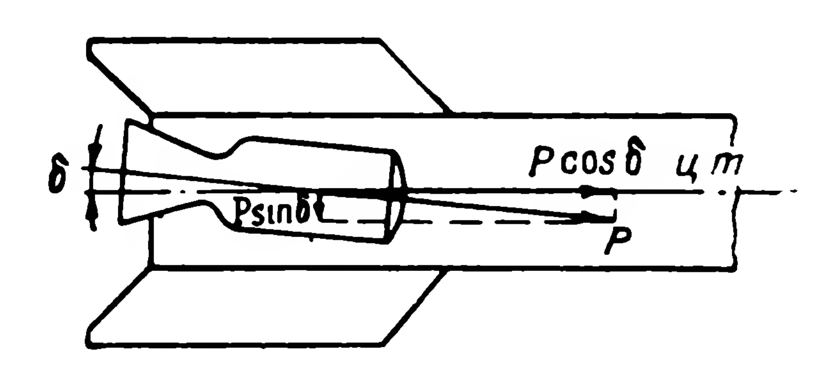
В последующие моменты времени за счет составляющей силы тяги $P_2$, перпендикулярной вектору скорости $V_0$, этот вектор будет поворачиваться до тех пор, пока снаряд не начнет двигаться прямолинейно в новом направлении (фиг. 1.8, *в*). Очевидно, что условием прямолинейного движения снаряда будет равенство нулю проекций всех сил на направление, перпендикулярное вектору скорости *V*.

Таким образом, в рассмотренном случае управляющей силой, изменяющей траекторию бескрылого снаряда, является главным образом составляющая сила тяги $P_2$, которая появляется в результате поворота снаряда относительно центра тяжести. Этот пово-

рот снаряда в плотных слоях атмосферы может быть осуществлен с помощью обычных аэродинамических рулей (см. фиг. 1.8). Однако активный участок траектории баллистических снарядов может заканчиваться на большой высоте. По мере увеличения высоты полета и уменьшения плотности воздуха эффективность аэродинамических рулей снижается и они перестают обеспечивать управление поворотом снаряда относительно центра тяжести. В этом случае снаряд снабжается газовыми (струйными) рулями, работающими в струе газов, выходящих из сопла реактивного двигателя.




Фиг. 1.9. Силы, действующие на газовый руль.



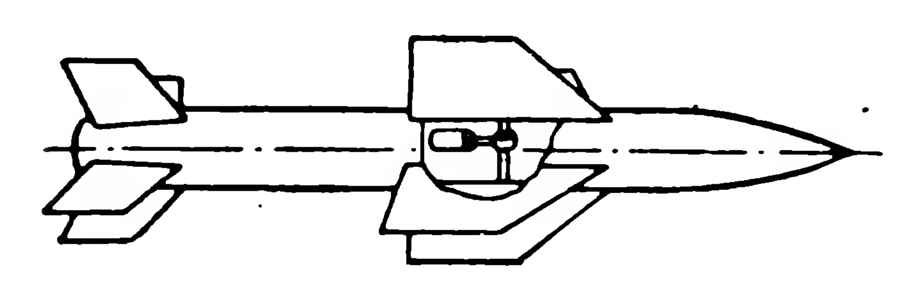

Фиг. 1.10. Создание момента относительно центра тяжести снаряда путем поворота камеры двигателя.

На газовый руль, выполняемый из жаростойкого материала, действуют аэродинамические силы (фиг. 1.9), которые обусловлены обтеканием руля струей газа. Подъемная сила руля $Y_р$ создает момент относительно центра тяжести снаряда. Лобовое сопротивление $X_р$ характеризует потерю тяги двигателя на газовом руле. Момент $M_р$ является шарнирным моментом, преодолеваемым приводом руля, и на снаряд не действует. Иногда для управления бескрылым снарядом применяется поворот камеры сгорания вспомогательного реактивного двигателя (фиг. 1.10), вызывающий появление составляющей $P \sin \delta$. Эта составляющая создает момент относительно центра тяжести, который заставляет снаряд поворачиваться так же, как при отклонении газового руля.

В обоих случаях сила, появляющаяся при отклонении газового руля или повороте камеры сгорания двигателя, направлена перпендикулярно траектории полета, но она не может рассматриваться как управляющая: эта сила слишком мала и поэтому не вызывает существенного изменения траектории. Основная роль этой силы состоит, как указано, в повороте снаряда относительно центра тяжести.

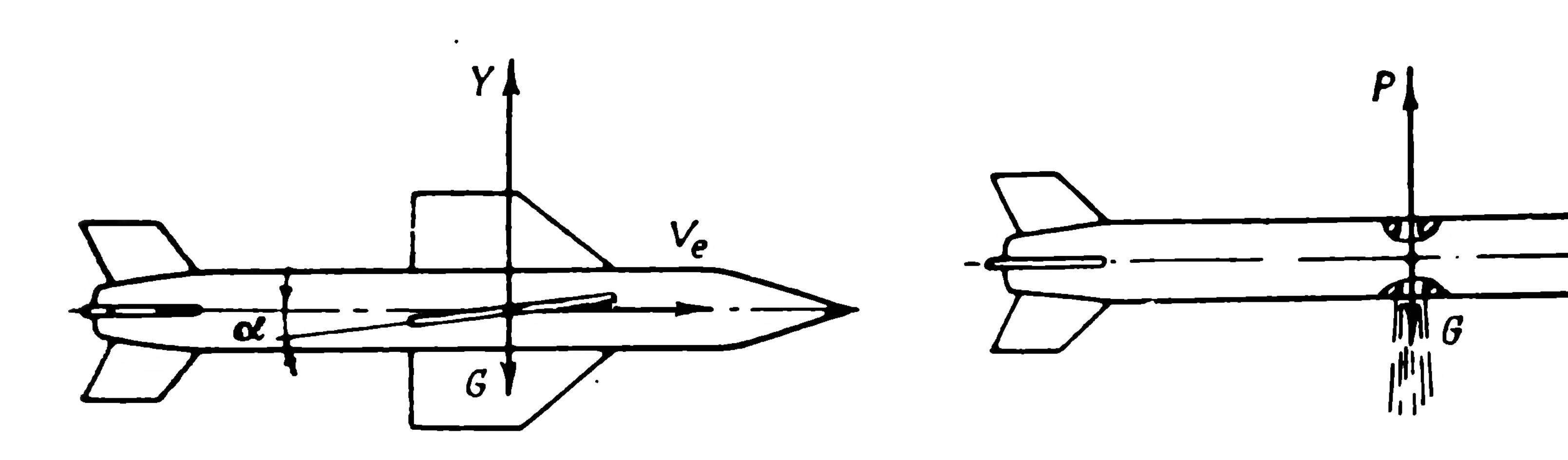
Все приведенные выше принципы создания управляющей силы связаны с предварительным поворотом снаряда относительно центра тяжести. Этот поворот вызывает появление управляющей силы и изменение направления движения снаряда. При непосред-

ственном способе создания управляющей силы отпадает необходимость в предварительном изменении углового положения снаряда, а следовательно, и в рулях. Управляющая сила может создаваться как за счет аэродинамической, так и реактивной сил. Аэродинамические силы используются для управления снарядами, траектории которых не выходят из сравнительно плотных слоев атмосферы.



Фиг. 1.11. Снаряд с поворотными крыльями.

Для регулирования управляющей силы крылья снаряда выполняются поворотными (фиг. 1. 11). Они размещаются так, чтобы их подъемная сила проходила возможно ближе к центру тяжести снаряда. Крылья поворачиваются мощным приводом, реагирующим на управляющие сигналы. Такие снаряды снабжаются достаточно развитым хвостовым оперением, благодаря чему продольная ось снаряда практически совпадает с направле-




Фиг. 1.12. Управляющая сила снаряда с поворотными крыльями.

Фиг. 1.13. Снаряд с боковой реактивной тягой.

нием вектора скорости. В прямолинейном полете в горизонтальной плоскости крылья расположены вдоль оси корпуса и угол атаки их и корпуса равен нулю. При повороте крыльев относительно корпуса возникает угол атаки и управляющая сила, нормальная к вектору скорости снаряда (фиг. 1.12). Эта сила вызывает поворот вектора скорости снаряда и изменение его траектории. При этом продольная ось снаряда непрерывно ориентируется по вектору скорости.

На большой высоте крылья, как и рули, становятся малоэффективными и не могут создать значительной управляющей силы. В этом случае для создания управляющей силы можно воспользоваться реактивным двигателем с боковой тягой (фиг. 1.13). Ось боковых сопел возможно тщательнее совмещается с центром тяжести, чтобы работа двигателя не вызывала момента, поворачивающего корпус относительно центра тяжести. Величина боковой силы регулируется перераспределением расхода газа через боко-

вые сопла. Необходимо подчеркнуть, что управление движением снаряда с помощью боковой тяги является единственно возможным на большой высоте, если основной реактивный двигатель уже не работает и снаряд движется по инерции. Этот же принцип управления траекторией используется на космических ракетах.

Основным достоинством метода непосредственного регулирования управляющей силы по сравнению с регулированием за счет поворота снаряда относительно центра тяжести является малое запаздывание в образовании управляющей силы после поступления управляющего сигнала. Время, нужное на поворот крыла снаряда или изменение расхода газа через боковые сопла, оказывается значительно меньше времени, потребного на поворот снаряда относительно центра тяжести. Для некоторых типов высокоманевренных снарядов указанное преимущество может иметь существенное значение.

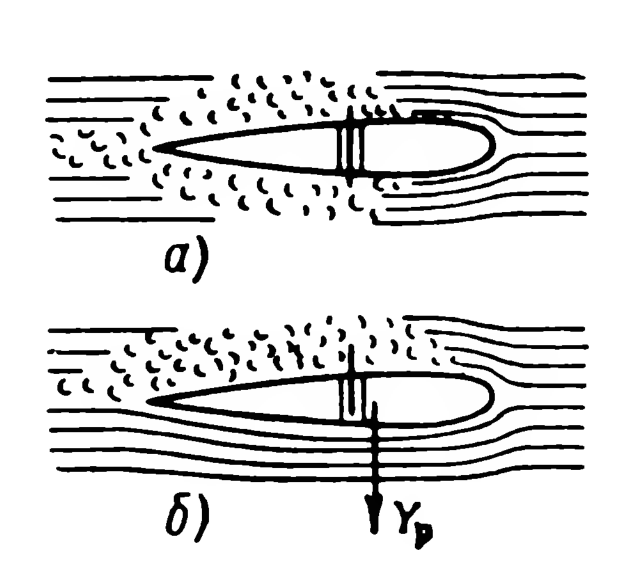
Недостатком системы управления снарядом, использующей поворотные крылья, является большая мощность привода для поворота крыльев. Кроме того, при обоих рассмотренных методах непосредственного создания управляющей силы весьма трудно обеспечить точное совпадение этой силы с центром тяжести в течение всего времени полета снаряда.

Кроме обычных рулевых органов, которые рассматривались выше, на снарядах иногда применяются специфические управляющие устройства, так называемые прерыватели потока, или интерцепторы. Принцип действия интерцепторов поясняется на фиг. 1.14. Интерцептор, установленный в профиле стабилизатора снаряда, может с помощью какого-либо приводного устройства выдвигаться в одну или другую сторону. При симметричном положении (фиг. 1.14, *а*) интерцептор ухудшает обтекание профиля и увеличивает его лобовое сопротивление, но не создает на профиле подъемной силы. При несимметричном положении интерцептора (фиг. 1.14, *б*) обтекание одной стороны профиля (где интерцептор убран) улучшается и давление на этой стороне уменьшается, а на другой стороне (где выход интерцептора увеличен) срыв потока и давление увеличиваются. В результате у профиля появляется подъемная сила $Y_{\text{р}}$, которая вызывает поворот снаряда так же, как и отклонение обычного руля. Иногда интерцептор устанавливается не внутри профиля, а за задней кромкой (фиг 1.15), причем действие его будет таким же, как и в рассмотренном выше случае. Если интерцептор установить не за стабилизатором, а за крылом, то его перемещение будет вызывать эффект, аналогичный повороту крыла, т. е. будет иметь место непосредственное регулирование управляющей снарядом силы.

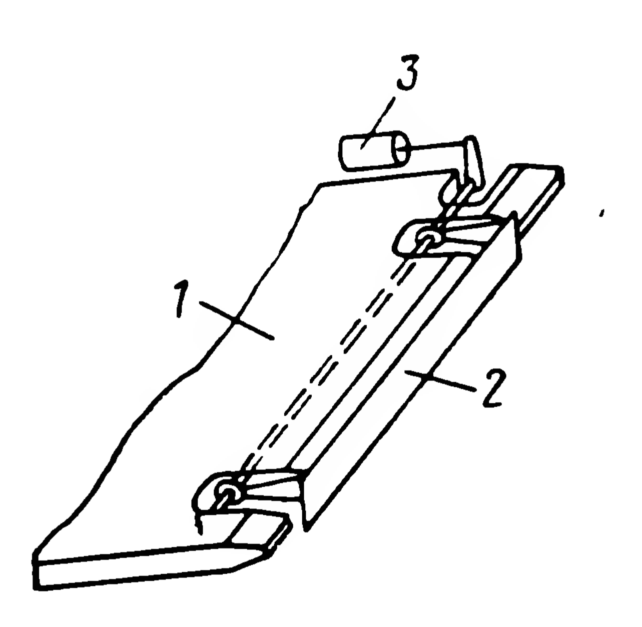
Обычно интерцепторы отклоняются сразу в крайние положения, что позволяет применять для их перемещения простейшие приводы с релейной характеристикой. Мощность привода для

управления интерцепторами, как правило, оказывается значительно меньше, чем у привода обычных рулей. К недостаткам интерцепторного управления следует отнести уже упомянутое увеличение лобового сопротивления снаряда, связанное с ухудшением обтекания профиля, на котором установлен интерцептор.

Рассмотренное выше управление снарядом в двух плоскостях — вертикальной и горизонтальной — для многих типов снарядов является чисто условным. Такое разделение существенно для пло-




Фиг. 1.14. Схема образования подъемной силы при выдвижении интерцептора.




Фиг. 1.15. Интерцептор, установленный за задней кромкой профиля.

*1* — профиль, *2* — интерцептор, *3* — привод.

скокрылых снарядов и для снарядов, имеющих стабилизацию угла крена, не допускающую поворота снаряда вокруг продольной оси. Однако многие снаряды не имеют такой стабилизации и могут занимать произвольное положение относительно продольной оси. Для таких снарядов плоскости, в которых ведется управление, совпадают с плоскостями, в которых в данный момент находятся органы управления. Наконец, некоторые снаряды выполняются вращающимися относительно продольной оси. В этом случае целесообразно рассматривать не две плоские, а одну пространственную картину сил, действующих на снаряд.

## § 1.3. ДВИГАТЕЛИ УПРАВЛЯЕМЫХ СНАРЯДОВ

Все типы управляемых снарядов (кроме авиабомб) снабжены двигателями, предназначенными либо для разгона снаряда до определенной скорости (стартовые), либо для поддержания заданной скорости в течение всего времени полета снаряда (маршевые). Большое разнообразие управляемых снарядов и условий их применения обусловило использование на них всех известных типов реактивных двигателей. Реактивными называются двигатели, создающие силу тяги за счет реакции прямого действия, когда меж-

ду двигателем и отбрасываемой массой воздуха нет промежуточных механических элементов. В реактивных двигателях эта сила есть реакция струи продуктов сгорания топлива, выходящих из сопла двигателя с большой скоростью. У нереактивных двигателей тяга создается в результате реакции непрямого действия, так как между двигателем и отбрасываемой массой воздуха имеется промежуточный элемент — движитель (воздушный винт). На снарядах применяются исключительно реактивные двигатели, так как только они могут обеспечить получение больших скоростей полета. Кроме того, на больших высотах, где плотность воздуха мала, реактивный (в частности, ракетный) двигатель является единственным типом двигателя, способным развивать большую тягу, нужную для управления снарядом.

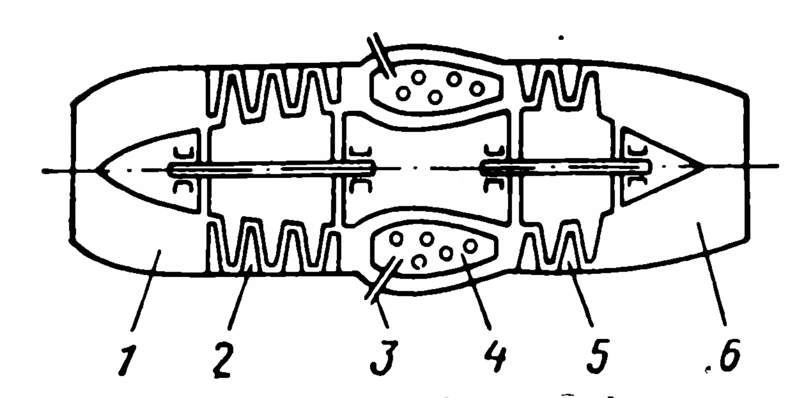
Реактивные двигатели могут быть разбиты на две основные группы: воздушно-реактивные и ракетные. У воздушно-реактивных двигателей горение топлива обеспечивается за счет кислорода воздуха, поступающего из окружающей двигатель атмосферы. Поэтому на больших высотах и в безвоздушном пространстве такие двигатели работать не могут. В ракетном двигателе топливо содержит обе необходимые для горения компоненты: горючее и окислитель. Поэтому получение газовой струи, создающей тягу, у ракетного двигателя не связано с наличием окружающего воздуха. Наибольшая тяга получается именно в безвоздушном пространстве.

Каждая из указанных двух групп реактивных двигателей состоит, в свою очередь, из нескольких типов двигателей. Воздушно-реактивные двигатели бывают трех типов: турбореактивные (ТРД), прямоточные (ПВРД), пульсирующие (ПуВРД). Ракетные двигатели делятся на два типа: двигатели на твердом (пороховом) топливе (ПРД или ТРД) и двигатели на жидком топливе (ЖРД).

Рассмотрим принцип действия и основные свойства каждого из указанных выше реактивных двигателей. На фиг. 1.16 приведена схема турбореактивного двигателя. Входящий через диффузор *1* воздух сжимается компрессором *2*. В настоящее время применяются осевые и центробежные компрессоры. Часть сжатого воздуха поступает в камеры сгорания *4*, где перемешивается с топливом (обычно керосином), вводимым через форсунки *3*, и где полученная смесь сгорает. Продукты сгорания смешиваются с оставшейся частью более холодного воздуха, идущего от компрессора, и поступают на лопатки турбины *5*. За счет прохождения газообразных продуктов сгорания топлива и воздуха через турбину она приходит во вращение и приводит в движение компрессор, сидящий на общем валу с турбиной. Прошедшие через турбины горячие газы выбрасываются с большой скоростью в атмосферу через сопло *6*. Реакция струи выходящих из сопла двигателя газов и создает тягу двигателя.

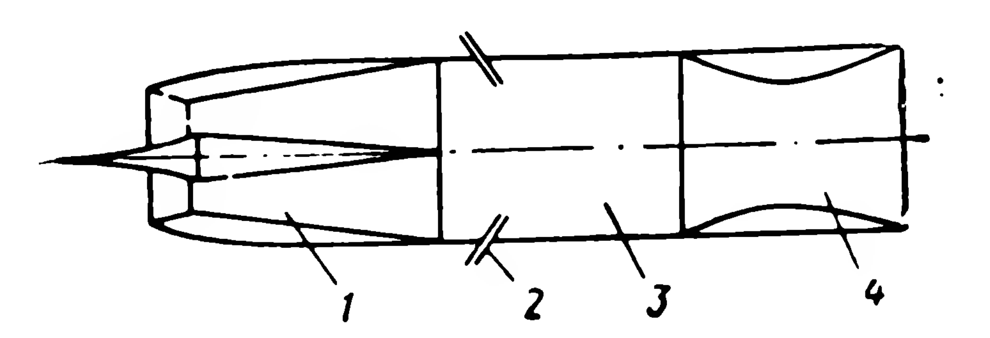
Схема прямоточного реактивного двигателя показана на фиг. 1.17. Прямоточный двигатель не имеет движущихся частей и является наиболее простым из воздушно-реактивных двигателей. Воздух сжимается в нем за счет скоростного напора воздуха, набегающего на двигатель. Следовательно, он может начать работать только тогда, когда летательный аппарат, на котором он установлен, уже имеет значительную скорость. Диффузор *1* обеспечивает пониже-

ние скорости воздуха, входящего в двигатель, и преобразует большую часть кинетической энергии воздуха в потенциальную в виде давления динамического напора. Будучи сжат в диффузоре, воздух поступает в камеру сгорания *3*, в которую одновременно через форсунки *2* подводится топливо. Смесь воздуха с топливом непрерывно горит в камере сгорания. Горячие газы, образующиеся в камере, вытекают через сопло *4* в атмосферу с большей скоростью, чем скорость потока, в котором находится двигатель. В результате двигатель развивает тягу.




Фиг. 1.16. Схема турбореактивного двигателя.

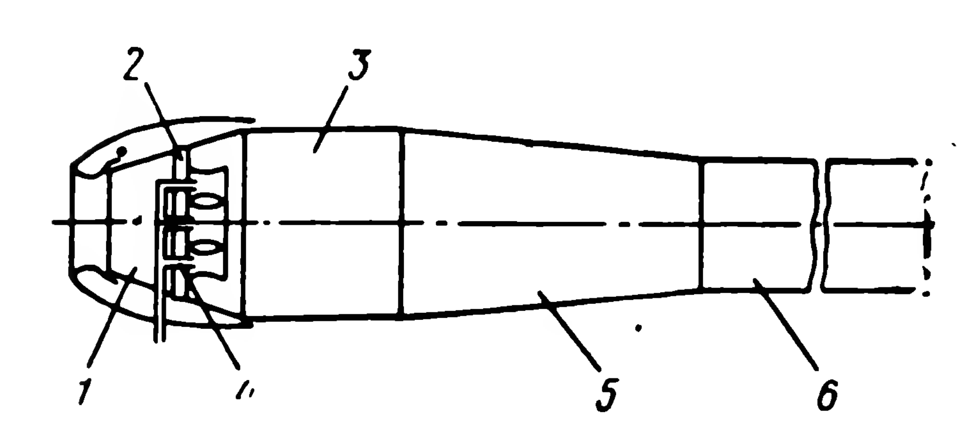
*1* — диффузор, *2* — компрессор, *3* — форсунка, *4* — камера сгорания, *5* — турбина, *6* — сопло.




Фиг. 1.17. Схема прямоточного воздушно-реактивного двигателя.

*1* — диффузор, *2* — форсунка, *3* — камера сгорания, *4* — сопло.

Третьим типом воздушно-реактивных двигателей является пульсирующий, схема которого приведена на фиг. 1.18. Входной диффузор *1* сжимает воздух, входящий в двигатель в полете. Благодаря этому воздух может пройти в камеру сгорания *3* сквозь блок клапанов *2*, пропускающих его только в одном направлении. В камере воздух смешивается с топливом, поступающим через форсунки *4*, и эта смесь сгорает, образуя горячие газы. Давление в камере повышается, что вызывает закрытие клапанов. Продукты сгорания через сопло *5* и выхлопную трубу *6* выходят в атмосферу со скоростью, большей скорости входа воздуха в двигатель. За счет этого возникает тяга двигателя. В результате выхода газов через выхлопную трубу давление в камере сгорания снижается до величины, меньшей давления скоростного напора перед блоком клапанов. Клапаны открываются и цикл работы двигателя возобновляется. Частота пульсаций двигателя зависит от его размеров и колеблется от 40 до 250 циклов в секунду. В отличие от прямоточного пульсирующий двигатель может развивать тягу и при нулевой скорости полета, т. е. при старте летательного аппарата, на котором он установлен. Эта особенность пульсирующего двигателя обусловлена наличием клапанов и инерцией массы газов, двигающихся по довольно длинной выхлопной трубе.



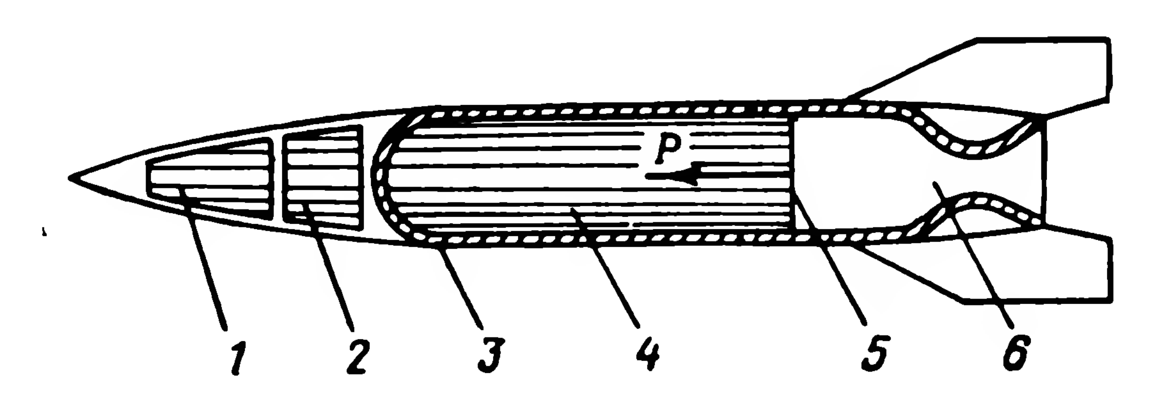

Фиг. 1.18. Схема пульсирующего воздушно-реактивного двигателя.

*1* — диффузор, *2* — блок клапанов, *3* — камера сгорания, *4* — форсунка, *5* — сопло, *6* — выхлопная труба.

Основным недостатком воздушно-реактивных двигателей является потребность в окружающем двигатель воздухе. Плотность воздуха быстро уменьшается с увеличением высоты. Предельными высотами, на которых могут быть использованы воздушно-реактивные двигатели любой схемы, являются высоты порядка 30—40 *км*.

Ракетный двигатель на твердом топливе является простейшим типом реактивных двигателей. Твердое топливо представляет собой однородную смесь го-

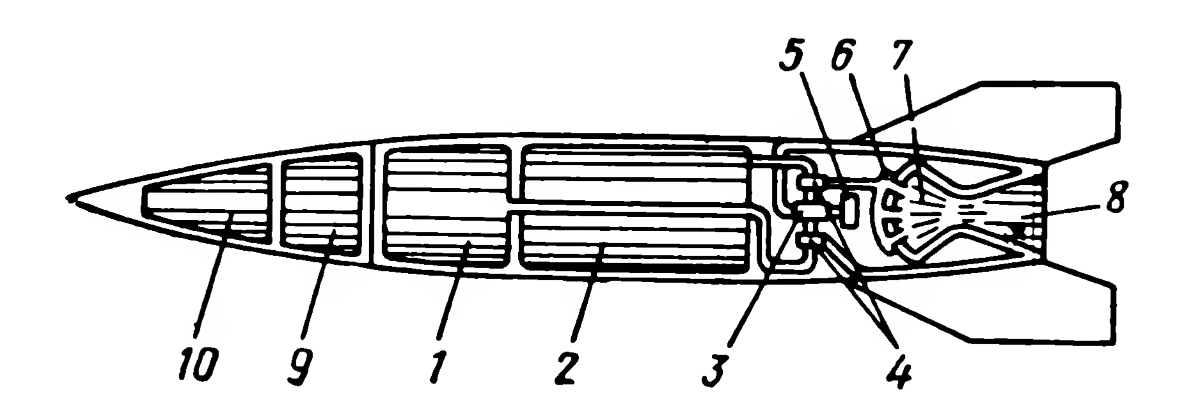
рючего и окислителя. В существующих двигателях в качестве топлива используются пороха различного химического состава. На фиг. 1.19 показан ракетный двигатель на твердом топливе, установленный на снаряде. Корпус двигателя *3*, заполненный порохом *4*, является одновременно камерой сгорания двигателя. При горении пороха продукты горения выходят с большой скоростью через сопло *6*, а на горящую поверхность пороха *5* (или на переднюю стенку камеры сгорания) действует сила тяги *P*. Обычно продолжительность




Фиг. 1.19. Ракетный двигатель на твердом топливе, установленный на снаряде.

*1* — система управления, *2* — боевая часть, *3* — корпус двигателя, *4* — порох, *5* — поверхность горения, *6* — сопло.

горения и, следовательно, работы ракетного двигателя на твердом топливе составляет 10—30 *сек*. Вследствие этого, несмотря на высокую температуру в камере сгорания, охлаждение камер не практикуется. Иногда внутренняя поверхность камеры покрывается жаропрочной теплоизоляцией.




Фиг. 1.20. Жидкостный реактивный двигатель, установленный на снаряде.

*1* — горючее, *2* — окислитель, *3* — турбина, *4* — топливные насосы, *5* — турбогазогенератор, *6* — форсунка, *7* — камера сгорания, *8* — сопло, *9* — боевая часть, *10* — система управления.

В жидкостных ракетных двигателях обычно используются двухкомпонентные топливные смеси, состоящие из жидких горючего и окислителя. Такие двигатели имеют две основные части:

1) одну или несколько камер сгорания, в которых жидкие топлива вступают в химическую реакцию, обусловливая образование газов высокого давления и температуры, истечение которых из сопла этой камеры создает силу тяги;

2) устройства для подачи и распыления горючей смеси в камере сгорания.

Подача горючего и окислителя осуществляется либо с помощью турбонасосов, либо с использованием давления инертного газа в газовом аккумуляторе. На фиг. 1.20 приведена схема жидкостного ракетного двигателя, установленного на снаряде. Горючее *1* и окислитель *2* с помощью насосов *4* подаются в форсунки *6* камеры сгорания *7*. Насосы *4* приводятся в движение газо-

вой турбиной *3*. Газы для привода турбины образуются в камере сгорания турбогазогенератора *5*, к которому также подводится некоторая небольшая часть горючего и окислителя. Для охлаждения стенок камеры сгорания используются обе компоненты топлива, которые, как показано на фиг. 1.20, подаются к форсункам через полости в стенках камеры сгорания. Благодаря такому охлаждению уменьшаются тепловые потери и двигатель получает возможность работать более длительное время без повреждения камеры сгорания. Кроме описанной, в жидкостных ракетных двигателях применяются и другие системы охлаждения (например, испарительная).

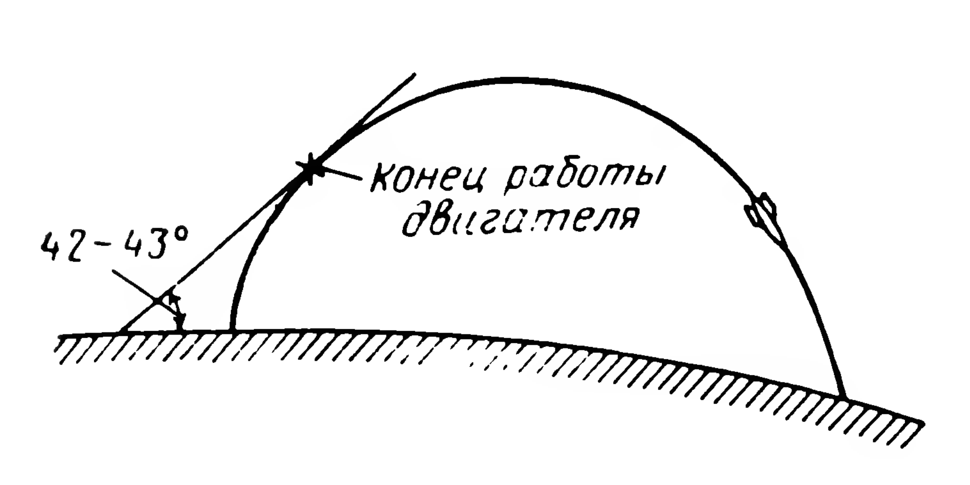
Выше уже отмечалось, что основным преимуществом ракетных двигателей по сравнению с воздушно-реактивными является независимость их тяги от наличия атмосферы. Следовательно, ракетные двигатели не имеют ограничений по высоте полета и являются единственным практически разработанным типом двигателя, пригодным для полетов на больших высотах и в космическом пространстве. Вторым существенным преимуществом ракетных двигателей перед всеми другими является наибольшая тяга на единицу лобовой площади.

Однако ракетные двигатели обладают существенным недостатком, исключающим их использование, например, в авиации в качестве основного источника тяги. Этот недостаток заключается в большом расходе топлива, связанном с необходимостью иметь на борту летательного аппарата и горючее, и окислитель. В сравнении с воздушно-реактивными двигателями, применяемыми на малых высотах, ракетные двигатели расходуют значительно больше топлива при одинаковых тягах.

## § 1.4. СОВРЕМЕННЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ СНАРЯДЫ

Техника управляемых снарядов развивается очень быстро. В этом параграфе кратко описаны некоторые управляемые снаряды капиталистических стран*.

### 1. Баллистические ракеты



Фиг. 1.21. Траектория баллистической ракеты.

Баллистическими называются ракеты, траектория полета которых, за исключением участка, на котором работает ракетный двигатель, представляет собой траекторию свободно брошенного тела (фиг. 1.21). Запуск баллистических ракет производится с пусковой площадки обычно в вертикаль-

* В. И. Марисов, И. К. Кучеров, Управляемые снаряды, Воениздат, 1959.

ном направлении, чтобы сократить участок полета ракеты в плотных слоях атмосферы. Когда ракета приобретает достаточную скорость, система управления обеспечивает поворот вектора скорости в плоскости стрельбы до угла около 45° к горизонту (для ракет малой дальности полета). При достижении заданных скорости и направления полета двигатель выключается и ракета продолжает полет по баллистической траектории.

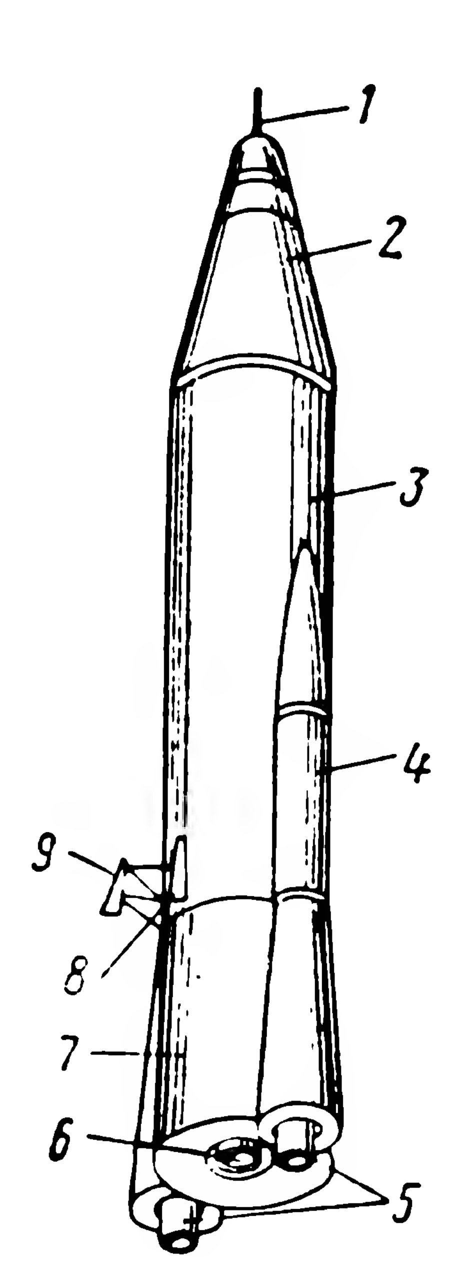
Создано уже большое количество баллистических ракет различного назначения. Дальность полета баллистических ракет колеблется в пределах от нескольких десятков и сотен километров (тактические) до нескольких тысяч километров (стратегические). Баллистические ракеты могут запускаться с земли, с кораблей и подводных лодок. Не исключена возможность запуска таких ракет и с самолетов-носителей.

На фиг. 1.22 показана межконтинентальная баллистическая ракета «Атлас» (США).

**Основные данные баллистической ракеты «Атлас»**

Стартовая масса — 90 000 *кг*
Масса боевой части — 1360 *кг*
Масса топлива — 80 000 *кг*
Полная длина — 24,4 *м*
Диаметр корпуса — 2,75 *м*
Скорость (максимальная) — 20 000 *км/час*
Дальность — 9000 *км*

Цилиндрический корпус ракеты *3* переходит в передней части в конус *2*, в котором размещена боевая часть (термоядерный заряд). Конус заканчивается сферическим носком с аэродинамическим наконечником *1*. Наконечник служит для переноса скачка уплотнения со сферического носка вперед, что уменьшает лобовое сопротивление снаряда и аэродинамический нагрев носка. Система управления размещена в обтекателях *4*. Основной двигатель, имеющий тягу около 300 *кн* (килоньютонов), помещен в хвостовом раструбе *7*. Сопло этого двигателя *6* выходит в торец снаряда. Стартовые двигатели *5* с тягой по 600 *кн* каждый расположены диаметрально по бокам корпуса снаряда. Кроме того, для управления и стабилизации ракеты на начальной части пассивного участка траектории имеются два небольших двигателя *8*. Антенна *9* предназначена для передачи данных о параметрах движения ракеты на пункт управления.




Фиг. 1.22. Баллистическая ракета «Атлас».

*1* — аэродинамический наконечник, *2* — конус, *3* — корпус, *4* — обтекатель системы управления, *5* — стартовые двигатели, *6* — сопло маршевого двигателя, *7* — хвостовой раструб, *8* — вспомогательные двигатели, *9* — антенна.

Ракета имеет автономную систему управления, дополненную телеуправлением по радиоканалу с места запуска. При запуске работают стартовые и маршевые двигатели, использующие одно и то же топливо (керосин и жидкий кислород). Когда большая часть топлива выработана, стартовые двигатели *5* вместе с раструбом *7* отбрасываются и дальнейший разгон ракеты обеспечивается маршевым двигателем. Для управления ракетой «Атлас» использован поворот камер сгорания двигателей, закрепленных в корпусе на карданных подвесах.

При полете на максимальную дальность (9000 *км*) ракета, двигаясь по эллиптической траектории, достигает высоты около 1200 *км*. Время полета в этом случае составляет примерно 30 *мин*. На нисходящей ветви траектории конус *2* с боевым зарядом отделяется от корпуса ракеты. При входе этого конуса в плотные слои атмосферы его скорость более чем в 15 раз превышает скорость звука. Для предохранения этой части ракеты от интенсивного аэродинамического нагрева на нее наносится многослойное жаропрочное покрытие.

## 2. Самолеты-снаряды

Самолеты-снаряды имеют такую же аэродинамическую схему, как и пилотируемые самолеты. Как правило, на всей траектории полета самолета-снаряда работает маршевый двигатель. Обычно полет к цели происходит на постоянной или близкой к постоянной высоте, определяемой потолком данного самолета-снаряда.

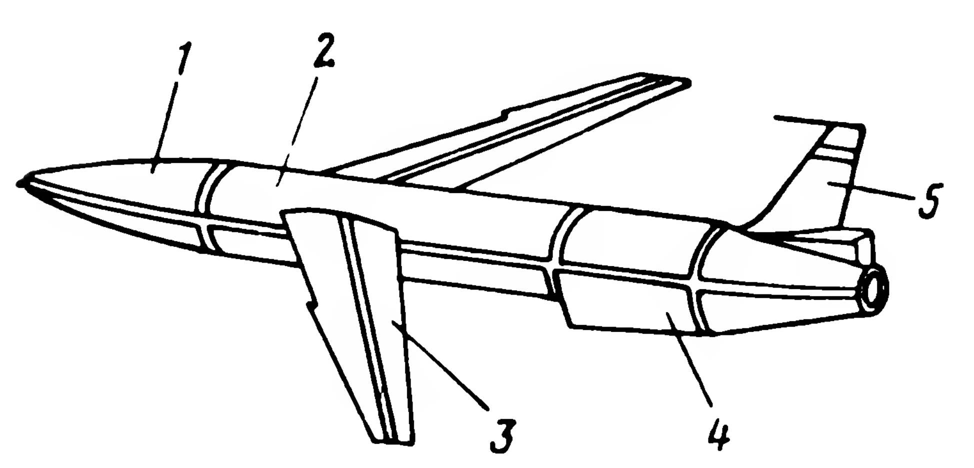
Как и баллистические ракеты, самолеты-снаряды имеют самое различное назначение и соответствующую этому назначению дальность действия. Они запускаются с земли, с кораблей и с самолетов-носителей. По сравнению с баллистическими ракетами самолеты-снаряды являются более экономичными, так как при одинаковой дальности полета требуют в несколько раз меньшего количества топлива. Однако они значительно более уязвимы, чем ракеты, вследствие гораздо меньшей скорости и высоты полета.

В качестве примера рассмотрим стратегический самолет-снаряд «Снарк» (США), приведенный на фиг. 1.23.

**Основные данные самолета-снаряда «Снарк»**

Стартовая масса (без стартового двигателя и подвесных баков) — 22 000 *кг*
Масса боевой части — 1300 *кг*
Полная длина — 21 *м*
Размах крыльев — 13 *м*
Диаметр фюзеляжа — 1,6 *м*
Скорость — 960 *км/час*
Дальность — 8000 *км*

В переднем отсеке *1* фюзеляжа снаряда помещается боевая часть (термоядерный заряд). В средней части *2* расположены топливные баки и аппаратура управления. Хвостовой отсек *4* фюзеляжа занят маршевым турбореактивным двигателем. Топливом является керосин. Снаряд управляется автономно с помощью инерциальной и астронавигационной систем. В качестве органов управления применены элевоны *3* и руль направления *5*.



Фиг. 1.23. Самолет-снаряд «Снарк».
*1* — передний отсек, *2* — средний отсек, *3*—элевоны, *4*—хвостовой отсек, *5*—руль направления.

Самолет-снаряд «Снарк» запускается двумя стартовыми пороховыми двигателями под некоторым углом к горизонту. По достижении определенной скорости, при кото-

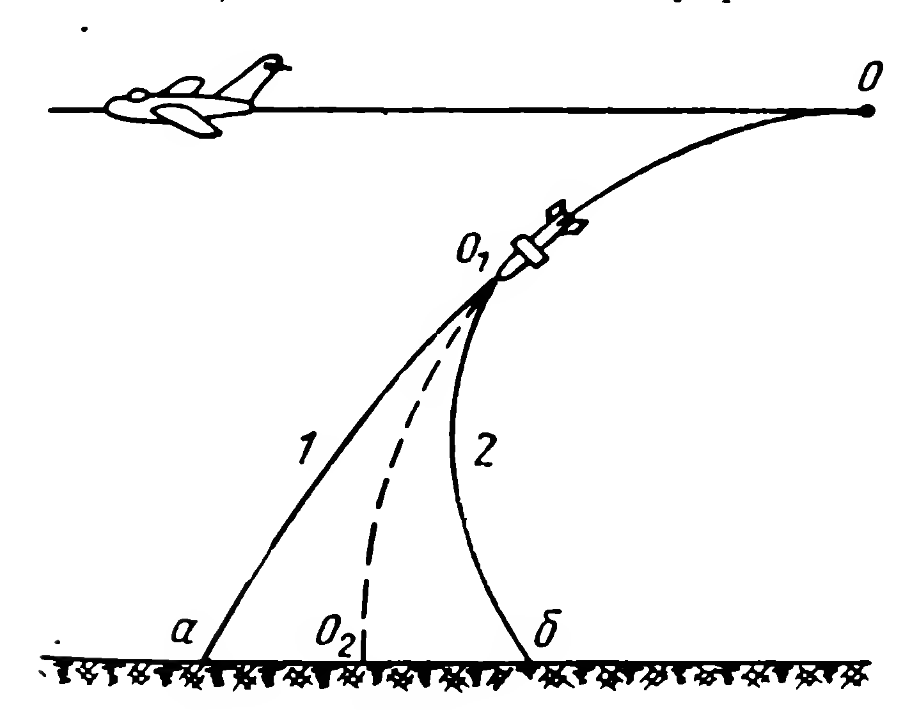
рой крыло снаряда создает необходимую подъемную силу, полет продолжается за счет маршевого двигателя на высоте 15 *км*. По мере выработки топлива высота полета несколько повышается. Над целью самолет-снаряд системой управления переводится в пикирование. При этом передний отсек с боевой частью отделятся от самолета-снаряда. Существенным недостатком самолета-снаряда «Снарк» является малая скорость полета, облегчающая его перехват.

### 3. Управляемые авиационные бомбы

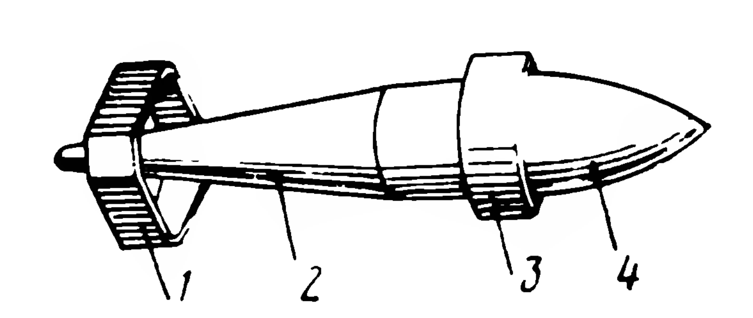
Управляемые бомбы применяются для поражения целей малых размеров (мосты, корабли, командные пункты и т. п.), противовоздушная оборона которых неэффективна, что позволяет бомбардировщику пройти над целью.

Авиационные бомбы управляются за счет аэродинамических сил, возникающих на крыльях, которыми они снабжаются в отличие от неуправляемых бомб. По условиям подвески бомбы в бомболюке самолета крылья не могут быть сделаны большими. Поэтому и управляющая сила у таких бомб невелика, что обусловливает довольно небольшое различие в траекториях управляемой и неуправляемой авиабомбы.

На фиг. 1.24 приведены указанные траектории. Бомба, будучи сброшена в точке $O$, сначала летит без управления до точки $O_1$. Пунктирная линия $O_1O_2$




Фиг. 1.24. Траектория управляемой и неуправляемой авиабомб.




Фиг. 1.25. Управляемая авиабомба «Тарзон».

*1* — стабилизатор, *2* — хвостовой отсек, *3* — кольцевое крыло, *4* — боевая часть.

показывает траекторию бомбы без управления. Траектория *1* соответствует максимальному отклонению рулевых органов управляемой бомбы в одну сторону, а траектория *2* — в другую. Таким образом, возможный диапазон управления точкой падения бомбы в одной плоскости определяется отрезком *аб*. Очевидно, что такое же положение наблюдается и в другой плоскости, в результате чего на поверхности земли получается некоторая площадь, в пределах которой возможно управление точкой падения бомбы и, следовательно, поражение цели. Форма этой площади зависит от аэродинамической схемы бомбы. Если, например, бомба имеет кольцевое крыло, что наиболее выгодно с точки зрения габаритов, то форма указанной площади поражения будет близка

к кругу. Для управления авиабомбами используются методы телеуправления (с самолета-носителя) и самонаведения. В последнем случае цель должна обладать каким-либо контрастом на фоне окружающей местности.

В качестве примера на фиг. 1.25 показана авиабомба «Тарзон» (США). Общая масса бомбы около 6000 *кг*, полная длина — 8,5 *м*. Боевая часть бомбы *4* является снарядом фугасного действия. Бомба наводится методом телеуправления с самолета-носителя. Приемная часть системы управления размещается в хвостовом отсеке *2*, имеющем развитый стабилизатор *1*. Кольцевое крыло *3* имеет возможность поворачиваться в двух перпендикулярных плоскостях, чем и достигается создание управляющей силы.

Существенным недостатком управляемых авиабомб является необходимость пролета самолета-носителя над целью или вблизи нее, что связано с заходом в зону противовоздушной обороны цели.

## 4. Управляемые снаряды противовоздушной обороны

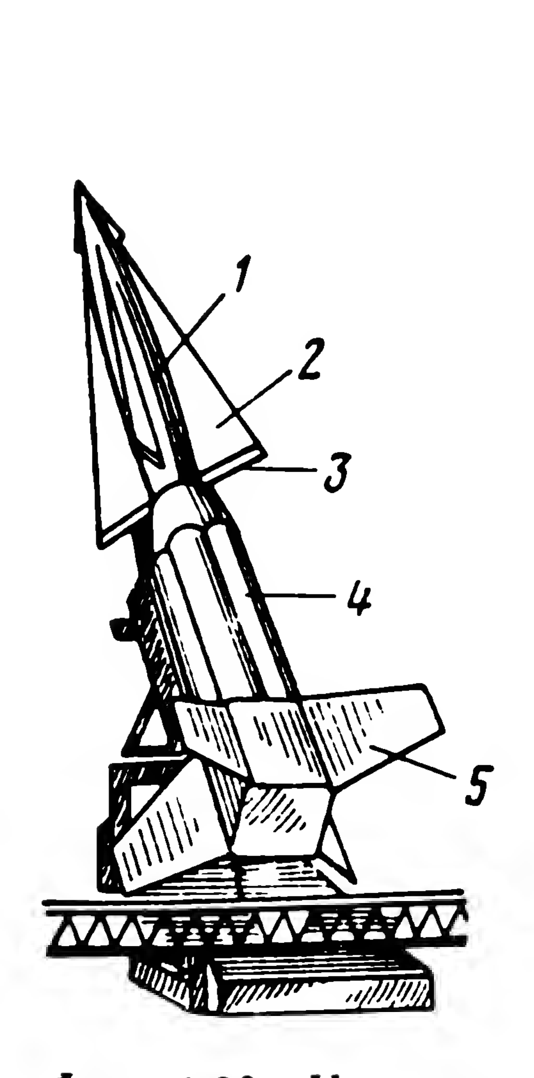
Управляемые снаряды противовоздушной обороны предназначены для защиты различных объектов (населенных пунктов, промышленных предприятий, складов, кораблей) от средств воздушного нападения. В связи с широтой решаемой задачи существует большое количество различных модификаций таких снарядов. Эти модификации различаются по дальности действия и мощности боевой части. Минимальные дальности действия снарядов, предназначенных для стрельбы по самолетам вблизи защищаемого объекта, составляют 20—40 *км*. Такие снаряды, как правило, имеют боевую часть осколочного действия с неконтактным взрывателем. С другой стороны, разрабатываются снаряды для уничтожения межконтинентальных ракет противника. Очевидно, что эти снаряды должны иметь дальность действия, измеряемую сотнями и тысячами километров. Снаряды противовоздушной обороны действуют по быстролетающим и маневрирующим целям. Поэтому снаряды должны обладать большой маневренностью и системой управления, наводящей снаряд на цель с высокой точностью. Для достижения высокой точности наведения снаряды противовоздушной обороны, особенно при значительной дальности стрельбы, снабжаются комбинированной системой управления: телеуправление на начальном и среднем участках траектории и самонаведение — на конечном участке.

В качестве примера рассмотрим снаряд противовоздушной обороны «Найк Геркулес» (США), приведенный на фиг. 1.26.

**Основные данные снаряда «Найк Геркулес»**

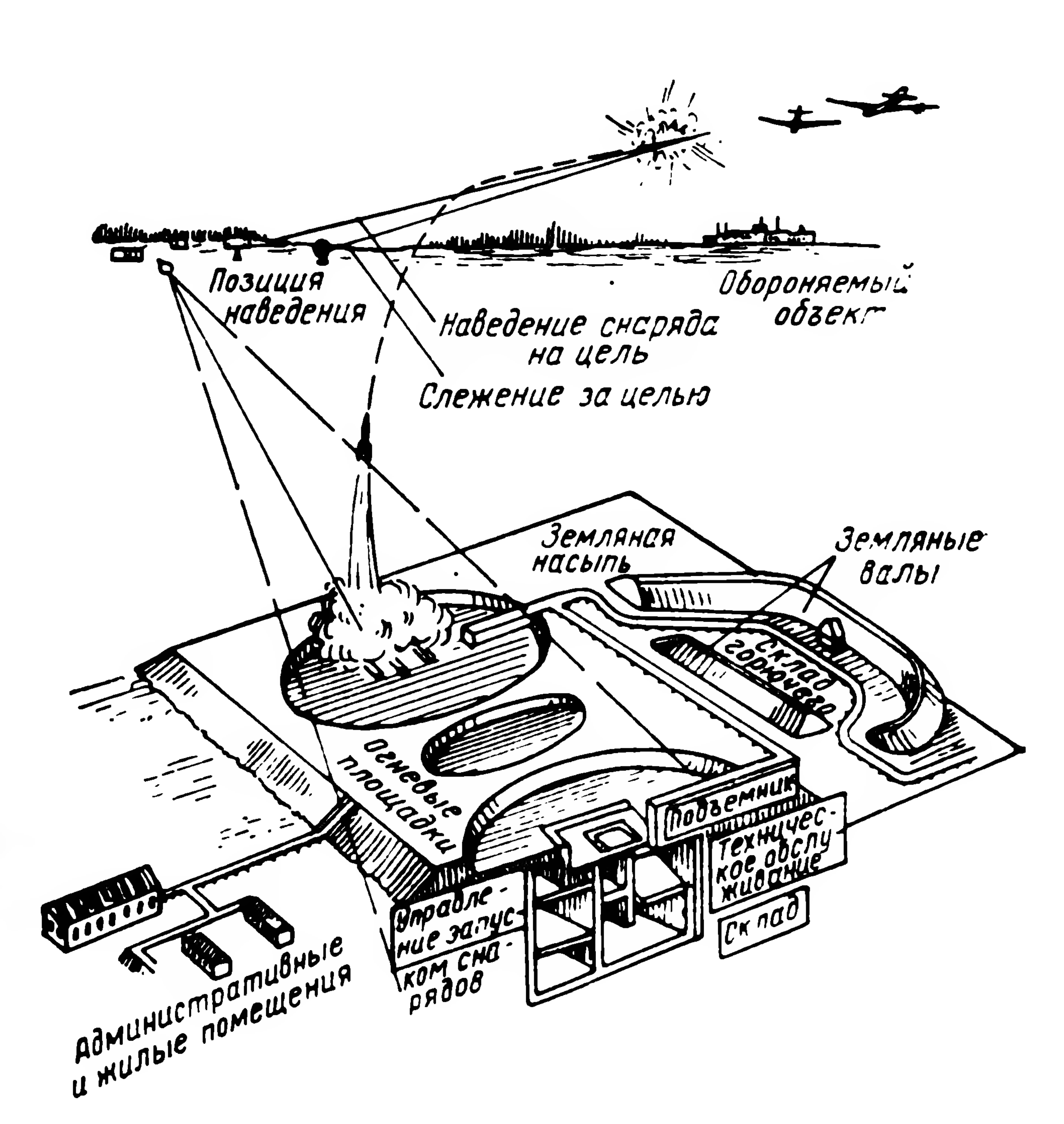
Стартовая масса — 4500 *кг*
Масса без стартовых двигателей — 2270 *кг*
Полная длина — 12,7 *м*
Длина без стартовых двигателей — 8,2 *м*
Размах крыла — 1,9 *м*
Скорость — 3700 *км/час*
Наклонная дальность — 80 *км*

В корпусе снаряда 1 размещается боевая часть, комбинированная система управления (телеуправление на начальном участке и самонаведение вблизи цели) и пороховой маршевый двигатель. Боевая часть может иметь как заряд обычных взрывчатых веществ, так и атомный заряд с различными тротиловыми эквивалентами. Для создания управляющей силы снаряд снабжен крестообразными крыльями 2 с элевонами 3 в качестве органов управления. Четыре пороховых стартовых двигателя 4 со стабилизатором 5 после разгона снаряда и сгорания пороха отбрасываются.




Фиг. 1.26. Управляемый зенитный снаряд «Найк Геркулес».

1 — корпус снаряда, 2 — крылья, 3 — элевоны, 4 — стартовые двигатели, 5 — стабилизатор.

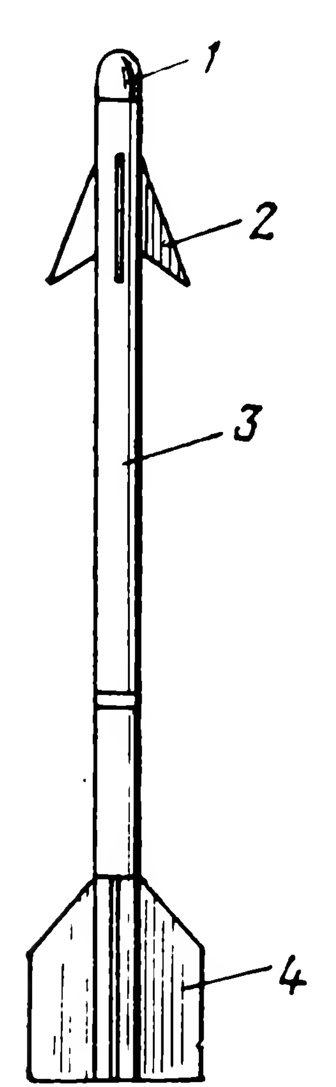



Фиг. 1.27. Стартовая позиция и позиция наведения снаряда «Найк Геркулес».

Для управления батареей, состоящей из четырех снарядов, оборудуются стартовая позиция и позиция наведения (фиг. 1.27). На стартовой позиции размещаются две огневые площадки (диаметром 150 *м*) для запуска снарядов и подземные помещения: пункт управления запуском, склад снарядов, помещения для сборки и проверки снарядов. На позиции наведения, расположенной на расстоянии нескольких километров от стартовой позиции, устанавливаются три радиолокатора: дальнего обнаружения целей, слежения за целью и локатор наведения снаряда. Последние два локатора связаны счетно-решающим устройством, обеспечивающим такое управление локатором наведения, чтобы снаряд, двигающийся в равносигнальной зоне луча этого локатора, направлялся в точку встречи с целью. При сближении с целью управление снарядом переходит к системе самонаведения.

## 5. Управляемые снаряды воздушного боя

Управляемые снаряды воздушного боя предназначены для действия с самолета по воздушным целям: самолетам и управляемым снарядам. Отсюда вытекают основные требования к таким снарядам: сравнительно небольшой вес и габариты, высокие скорость, маневренность и точность. Обеспечение высокой скорости при малых габаритах возможно только вследствие малой дальности действия подобных снарядов. Дальность современных снарядов воздушного боя достигает нескольких десятков километров. Вследствие сравнительно малой дальности эти снаряды иногда снабжаются только стартовым двигателем, который разгоняет снаряд до большой скорости, обычно в 2—3 раза превышающей скорость звука. После окончания работы стартового двигателя скорость такого снаряда вследствие сопротивления воздуха начинает уменьшаться, но на максимальной дальности она должна быть еще достаточной для обеспечения требуемой маневренности и быстрого догона цели. Системы управления снарядами воздушного боя используют метод телеуправления или самонаведения.




Фиг. 1.28. Управляемый снаряд воздушного боя «Сайдвиндер». 1—обтекатель; 2—рули; 3—корпус; 4—крылья.

На фиг. 1.28 показан снаряд «Сайдвиндер» (США) воздушного боя.

**Основные данные снаряда «Сайдвиндер»**

| | |
|---|---|
| Стартовая масса | — 70 *кг* |
| Полная длина | — 2,87 *м* |
| Размах крыла | — 0,48 *м* |
| Диаметр корпуса | — 0,114 *м* |
| Скорость | — 2800 *км/час* |
| Дальность стрельбы | — 5,5 *км*. |

В передней части корпуса *3* расположен чувствительный элемент системы самонаведения, реагирующий на тепловое излучение самолета-цели. Этот чувствительный элемент закрыт прозрачным обтекателем *1*. Остальные агрегаты системы управления расположены здесь же. Приводные механизмы управляют рулями *2*, размещенными впереди крестообразных крыльев *4* (схема «утка»). В средней части корпуса *3* помещается боевая часть с неконтактным взрывателем. На концах крыльев имеются также взрыватели ударного действия. В хвостовой части корпуса снаряда размещен стартовый пороховой двигатель, работающий в течение 2 *сек*.

## 6. Управляемые снаряды, применяемые на поле боя

Снаряды этого типа являются оружием пехоты и применяются непосредственно на поле боя против маневренных и малоразмерных целей. Вначале эти снаряды разрабатывались как противотанковые, но высокая точность и эффективность стрельбы делает

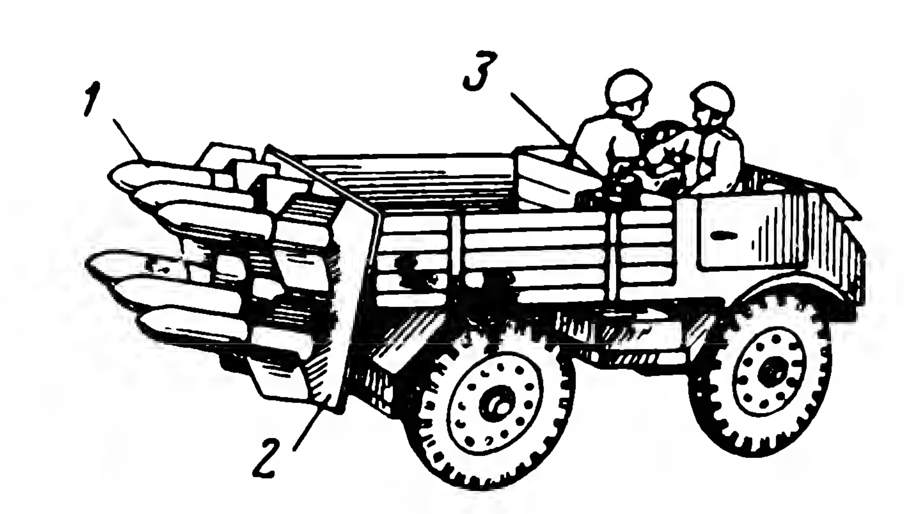
их использование все более универсальным. Характерными признаками этих снарядов является малая дальность и сравнительно небольшая скорость полета, а также простота системы управления. Снаряды с такими данными можно выполнить при сравнительно небольшом весе.

В качестве примера снаряда, используемого на поле боя, рассмотрим телеуправляемый противотанковый снаряд «Норд-5200» (Франция).

**Основные данные снаряда «Норд-5200»**

Стартовая масса — 18 *кг*
Полная длина — 1,22 *м*
Размах крыльев — 0,63 *м*
Диаметр корпуса — 0,17 *м*
Скорость — 700 *км/час*
Дальность стрельбы — 3,5 *км*

На фиг. 1.29 изображена пусковая установка снарядов «Норд-5200», смонтированная на автомобиле. Шесть снарядов *1* размещены на пусковой откидной




Фиг. 1.29. Пусковая установка снарядов «Норд-5200».
*1* — снаряды. *2* — пусковая платформа. *3* — командный прибор.

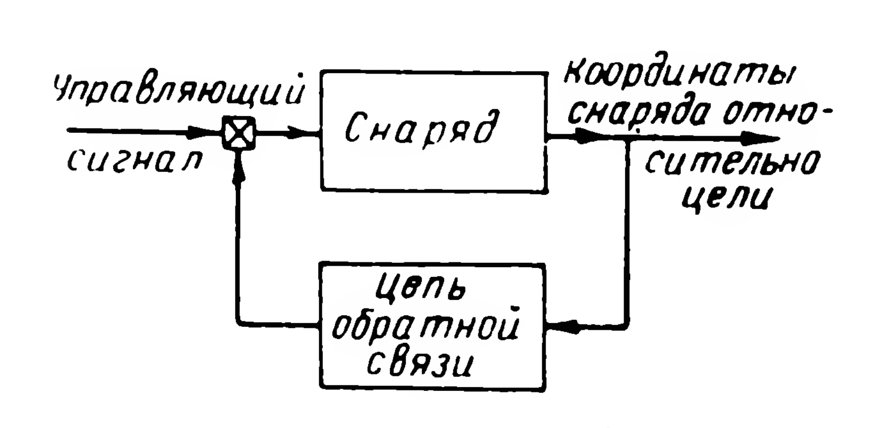
платформе *2*. Снаряды снабжены стартовым и маршевым пороховыми двигателями. Большая площадь крыльев обеспечивает хорошую маневренность снаряда. Оператор управляет полетом снаряда с помощью командного прибора *3*, формирующего сигналы управления. Эти сигналы передаются на снаряд по проводам. Два провода линии управления, выполненной из тонкой стальной изолированной проволоки, намотаны на катушках, расположенных в корпусе снаряда. При полета снаряда эта проволока разматывается с катушек. Органами управления снаряда являются интерцепторы, расположенные у задней кромки крыльев.

*Глава II*

# НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

## § 2.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Системы управления снарядами по своей структуре являются системами с обратной связью. Структурная схема системы управления снарядом приведена на фиг. 2.1. Для анализа систем управления снарядами могут быть использованы методы теории автоматического управления. Эти методы разделяются на две большие группы. В первую группу входят методы, основанные на исследовании характеристик систем в переходных процессах, вызванных воздействием стандартных управляющих сигналов (единичной функции или δ-функции). Ко второй группе относятся частотные методы анализа систем, которые могут быть названы методами установившегося режима.




Фиг. 2.1. Общая структурная схема системы управления снарядом.

В принципе оба указанных подхода к исследованию систем автоматического управления эквивалентны друг другу, но в различных конкретных задачах более просто и быстро результат может быть получен тем или другим методом.

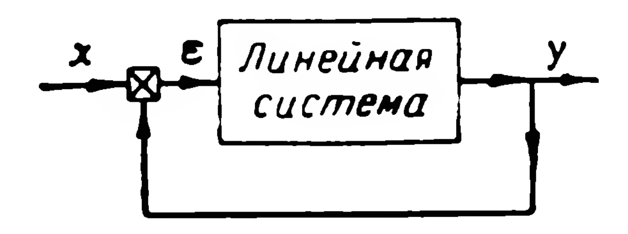
В настоящей книге для анализа систем управления снарядами будут наиболее широко использоваться два метода: метод стандартных коэффициентов (СК) и метод логарифмических амплитудно-частотных характеристик (ЛАХ). Метод СК относится к первой группе, а метод ЛАХ — ко второй группе методов теории автоматического управления. Эти методы отличаются простотой и наглядностью, в связи с чем они наиболее широко применяются в инженерной практике расчета автоматических систем.

Методы СК и ЛАХ применимы к стационарным линейным системам, т. е. к системам, описываемым линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Между тем

системы управления снарядами часто являются и нестационарными и нелинейными. В связи с этим в настоящей главе дается представление о методах анализа линейных нестационарных систем и нелинейных (релейных) систем, а также о методах анализа стационарных и нестационарных систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. Такие возмущения характерны для систем управления снарядами.

## § 2.2. МЕТОД СТАНДАРТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ (СК)

Пусть имеется простейшая одноконтурная замкнутая схема с отрицательной жесткой обратной связью, которая охватывает произвольную линейную передающую систему (фиг. 2.2).




Фиг. 2.2. Структурная схема одноконтурной замкнутой системы автоматического управления.
$x$ — заданная или входная величина, $y$— действительная или выходная величина.




Фиг. 2.3. Структурная схема одноконтурной разомкнутой системы автоматического управления.

Рассмотрим вначале передаточную функцию разомкнутой системы, для чего разорвем цепь обратной связи (фиг. 2.3). Пусть связь между входной и выходной величинами такой системы задана дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$a_0 \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dt} + a_n y =$$

$$= b_0 \frac{d^m \varepsilon}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} \varepsilon}{dt^{m-1}} + \ldots + b_{m-1} \frac{d\varepsilon}{dt} + b_m \varepsilon. \qquad (2.\ 1)$$

Причем очевидно, что при разомкнутой цепи обратной связи $x = \varepsilon$. Именно к такому уравнению сводится система линеаризованных уравнений снаряда или уравнений с фиксированными или квазификсированными коэффициентами. Применяя символическую форму записи $p = d/dt$, это уравнение можно записать в форме

$$N(p)\, y = M(p)\, \varepsilon, \qquad (2.\ 2)$$

где

$$\left.\begin{aligned} N(p) &= a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n, \\ M(p) &= b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_{m-1} p + b_m. \end{aligned}\right\} \qquad (2.\ 3)$$

Передаточной функцией системы называется отношение мгновенных значений выходной величины к входной. Согласно этому определению передаточная функция системы, описываемой уравнением (2.2), определяется выражением

$$W_{y/\varepsilon}(p) = \frac{y}{\varepsilon} = \frac{M(p)}{N(p)}. \tag{2. 4}$$

Как следует из соотношения (2.4), передаточная функция является дробно-рациональной функцией символа $p$.

Если замкнуть цепь обратной связи, т. е. вернуться к простейшей системе автоматического управления (см. фиг. 2.2), то между входной и выходной величинами в этом случае и теми же величинами при разомкнутой обратной связи (см. фиг. 2.3) существует очевидное соотношение: $\varepsilon = x - y$. Подставив это соотношение в уравнение (2.2), которое остается справедливым и для системы с обратной связью, получим новое дифференциальное уравнение замкнутой системы, имеющее в символической форме вид

$$[M(p) + N(p)]\, y = M(p)\, x. \tag{2. 5}$$

Передаточной функцией замкнутой системы является отношение полиномов

$$\Phi_{y/x}(p) = \frac{M(p)}{M(p) + N(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)}. \tag{2. 6}$$

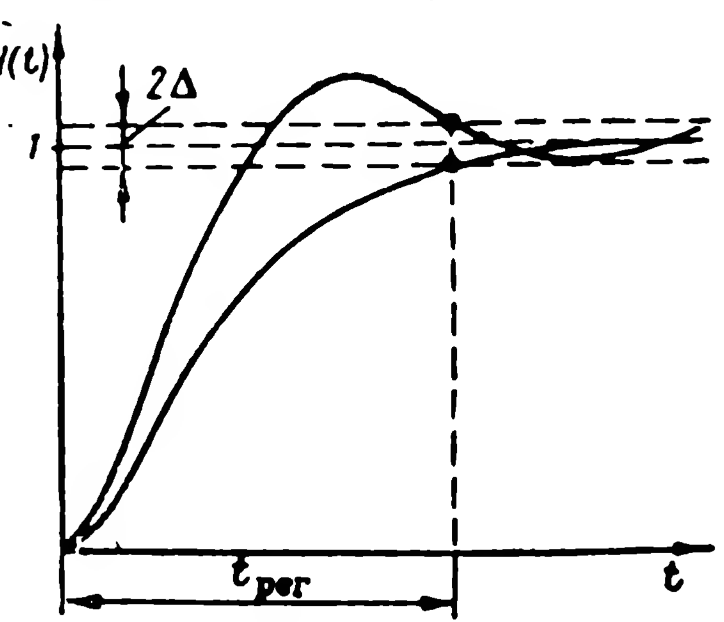
Динамические свойства рассматриваемой системы наиболее наглядно выражаются с помощью переходной функции $H(t)$, которая представляет собой реакцию системы или выходную величину при входном воздействии в виде единичной функции (единичного скачка).

В системе с удовлетворительными динамическими характеристиками переходная функция должна иметь вид, близкий к кривым, изображенным на фиг. 2.4, причем допустимое перерегулирование (выброс) и время регулирования определяются конкретными условиями работы системы. Между характером переходной и передаточной функций существует довольно сложная, но тем не менее вполне определенная связь. Вид переходной функции определяется значением нулей (корней числителя) и полюсов (корней знаменателя) передаточной функции. Очевидно, что для любой конкретной формы передаточной функции может быть найдено оптимальное распределение нулей и полюсов, при котором переходная функция будет наиболее благоприятной с точки зрения динамики рассматриваемой системы. Каждому такому оптималь-

ному распределению нулей и полюсов соответствует вполне определенное значение коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции, которое назовем стандартным. Приведем значения этих стандартных коэффициентов для некоторых типовых передаточных функций. Предварительно укажем, что любой полином вида (2.3) может быть приведен к следующей форме:

$$N'(p) = p^n + A_1\Omega_0 p^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\Omega_0^{n-1}p + \Omega_0^n, \qquad (2.7)$$

где $\Omega_0$ — условно назовем собственной частотой исследуемой системы.




Фиг. 2.4. Графики переходных функций.

Между коэффициентами полиномов $N(p)$ и $N'(p)$ существуют следующие очевидные связи:

$$A_1 = \frac{a_1}{a_0\Omega_0}; \quad A_2 = \frac{a_2}{a_0\Omega_0^2}; \quad \ldots; \quad A_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_0\Omega_0^{n-1}}; \quad \Omega_0 = \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_0}}.$$

В качестве первой типовой функции возьмем передаточную функцию замкнутой системы, не содержащую нулей:

$$\Phi(p) = \frac{\Omega_0^n}{p^n + A_1\Omega_0 p^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\Omega_0^{n-1}p + \Omega_0^n}. \qquad (2.8)$$

Для системы, имеющей такую функцию, можно получить переходный процесс без перерегулирования, когда корни знаменателя (полюса передаточной функции) все вещественны. При всех вещественных корнях и при $\Omega_0^n = \mathrm{const}$ наименьшее время регулирования будет, если все корни — кратные. Назовем такой процесс оптимальным. В этом случае коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ оказываются коэффициентами бинома Ньютона $(p+1)^n$. В табл. 2.1 приведено значение этих коэффициентов для $n=1$, 2, 3, 4, 5 и 6.

На фиг. 2.5 приведен график переходных функций для систем, определяемых стандартными коэффициентами табл. 2.1. Все кривые даны в функции безразмерного времени $\tau = \Omega_0 t$. Действительное время определяется соотношением

$$t = \frac{\tau}{\Omega_0}. \qquad (2.9)$$

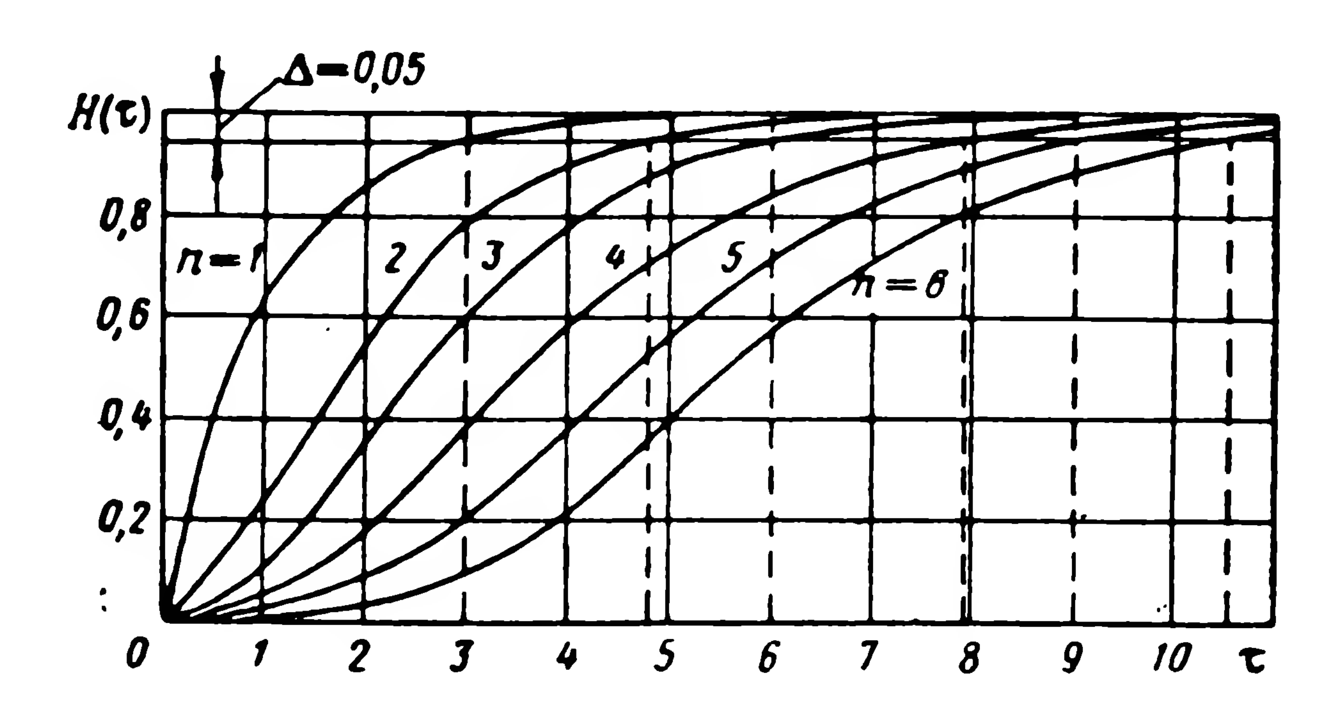
На этой же фигуре пунктиром отмечено время регулирования для систем различного порядка. Переходный процесс считается прак-

*Таблица 2. 1*

**Стандартные коэффициенты при кратных корнях**

| n | Коэффициенты знаменателя |
|---|---|
| 1 | 1 1 |
| 2 | 1 2 1 |
| 3 | 1 3 3 1 |
| 4 | 1 4 6 4 1 |
| 5 | 1 5 10 10 5 1 |
| 6 | 1 6 15 20 15 6 1 |

тически законченным, когда значение величины $|1-H(t)|\cdot 100\%$ не превышает $\Delta=5\%$.




Фиг. 2.5. График переходных функций для систем с передаточной функцией типа (2.8) и коэффициентами, определяемыми по табл. 2.1.

Если в переходной функции допустимо некоторое перерегулирование, то корни можно взять комплексными, благодаря чему сокращается также время регулирования. Представим полином знаменателя передаточной функции (2.8) в форме произведения $n/2$ одинаковых квадратных трехчленов

$$(p^2+2\zeta\Omega_0 p+\Omega_0^2)^{n/2}=p^n+A_1\Omega_0 p^{n-1}+\ldots+A_{n-1}\Omega_0^{n-1}p+\Omega_0^n \quad (2.10)$$

и выберем значение $\zeta=0{,}75$. При $n$ нечетном знаменатель передаточной функции (2.8) состоит из $(n-1)/2$ квадратных трехчленов и одного двучлена первой степени. Свободный член этого двучлена принимается равным 1. Значение коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ для такого распределения корней приведено в табл. 2. 2.

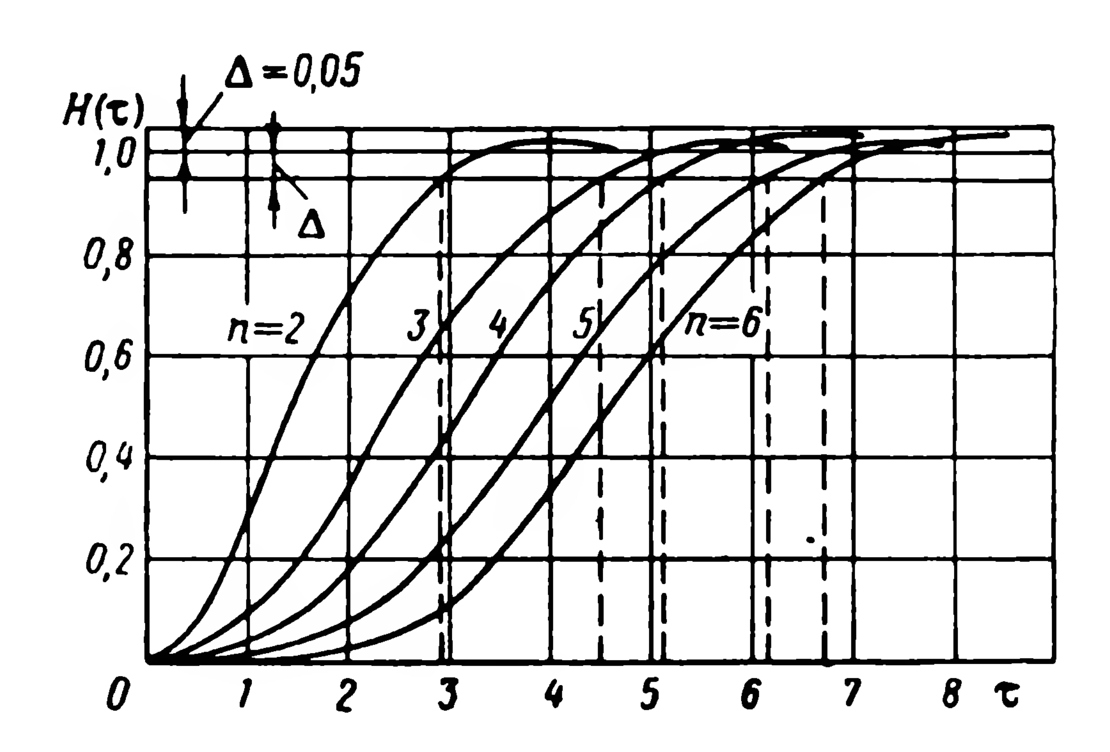
На фиг. 2. 6 приведен график переходных функций для систем, определяемых стандартными коэффициентами табл. 2. 2. Там же пунктиром отмечено время регулирования для систем различного

*Таблица 2.2*

**Стандартные коэффициенты при кратных комплексных корнях**

| $n$ | Коэффициенты знаменателя | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 1,5 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 2,5 | 2,5 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 3 | 4,25 | 3 | 1 | | |
| 5 | 1 | 4 | 7,25 | 7,25 | 4 | 1 | |
| 6 | 1 | 4,5 | 9,75 | 12,375 | 9,75 | 4,5 | 1 |

порядка. Сравнивая это время с его значением для систем, имеющих коэффициенты, определяемые табл. 2.1 (см. кривые на фиг. 2.5), видим, что при одинаковом $n$ время регулирования в последнем случае существенно меньше.




Фиг. 2.6. График переходных функций для систем с передаточной функцией типа (2.8) и коэффициентами, определяемыми по табл. 2.2.

Перейдем к рассмотрению передаточной функции, имеющей один нуль, равный $-\frac{\Omega_0}{A_{n-1}}$:

$$\Phi(p) = \frac{A_{n-1}\Omega_0^{n-1}p + \Omega_0^n}{p_n + A_1\Omega_0 p^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\Omega_0^{n-1}p + \Omega_0^n}. \qquad (2.11)$$

При наличии нуля у передаточной функции кратные корни, которые получаются при стандартных коэффициентах по табл. 2.1 и 2.2, уже не обеспечивают удовлетворительного характера переходной функции. У этой функции появляется большой начальный выброс над установившимся значением (перерегулирование). Чтобы уменьшить выброс, вызванный влиянием нуля, приходится за-

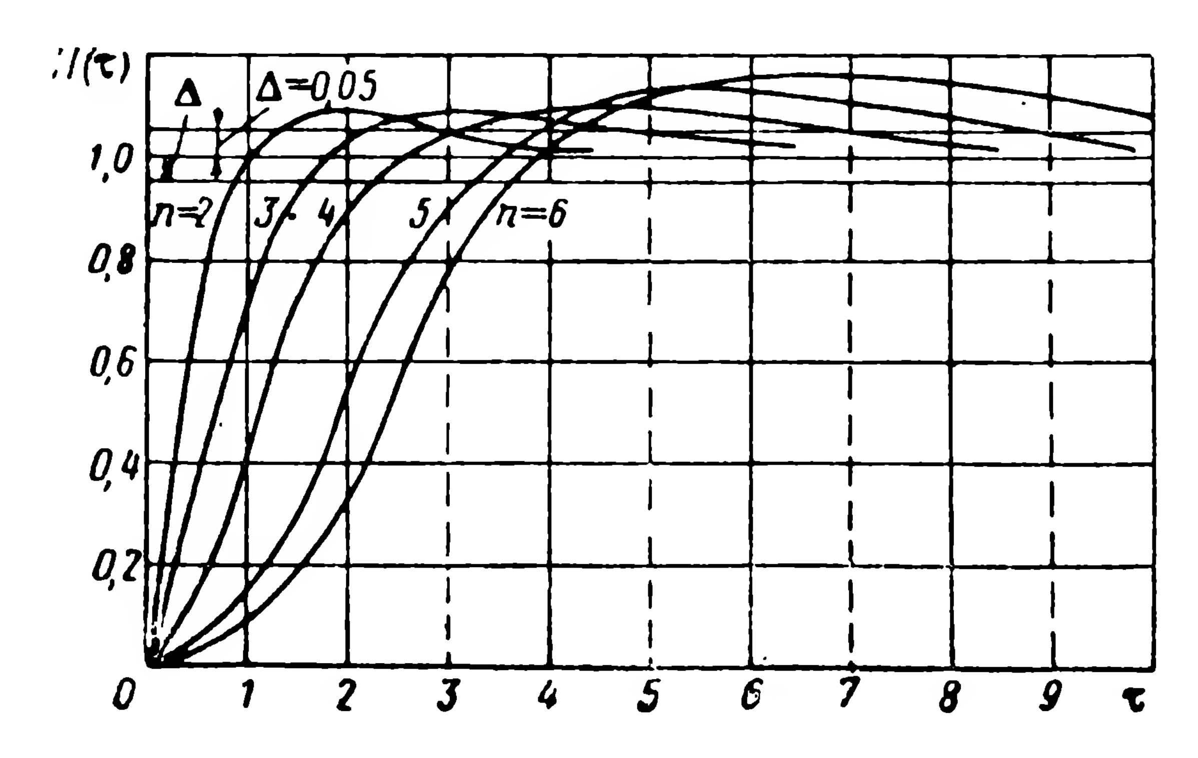
медлять скорость нарастания переходной функции. Это можно сделать только путем «разведения» корней полинома знаменателя по действительной оси. Существуют рекомендации * по расположению корней на действительной оси, обеспечивающему удовлетворительный характер переходной функции при наличии нулей у передаточной функции. При передаточной функции с одним нулем [см. выражение (2.11)] корни рекомендуется располагать на отрицательной вещественной полуоси по арифметической прогрессии. Значения коэффициентов полинома знаменателя в формуле (2.11) для такого распределения корней приведены в табл. 2.3.

*Таблица 2.3*

**Стандартные коэффициенты при распределении корней по арифметической прогрессии**

| n | 1-й член прогрессии | Разность прогрессии | Коэффициенты знаменателя |
|---|---|---|---|
| 2 | 0,5 | 1,5 | 1 2,5 1 |
| 3 | 0,183 | 1,517 | 1 5,1 6,35 1 |
| 4 | 0,098 | 1,138 | 1 7,22 16,3 11,8 1 |
| 5 | 0,063 | 0,867 | 1 9 29 38 18 1 |
| 6 | 0,039 | 0,717 | 1 11 43 83 73 25 1 |

На фиг. 2.7 представлен график переходных функций для систем, определяемых стандартными коэффициентами табл. 2.3. Как




Фиг. 2.7. График переходных функций для систем с передаточной функцией типа (2.11) и коэффициентами, определяемыми по табл. 2.3.

* А. А. Красовский, Г. С. Поспелов, Основы автоматики и технической кибернетики, Госэнергоиздат, 1962:

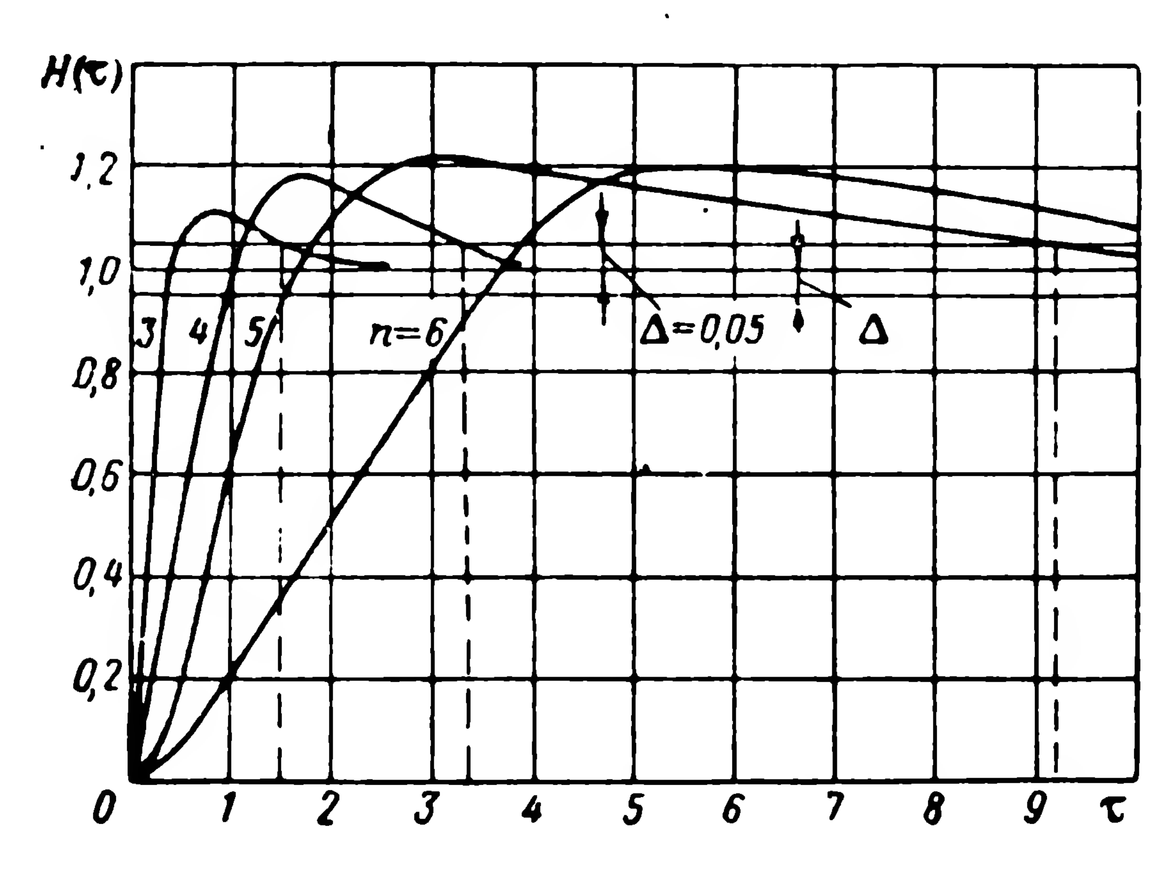
Г. С. Поспелов, Ю. П. Доброленский, Метод стандартных коэффициентов для выбора параметров линейных систем автоматического регулирования, Сб. статей по автоматике и электротехнике, Изд. АН СССР, 1956.

и на предыдущих графиках, пунктиром отмечено относительное время регулирования.

Рассмотрим, наконец, передаточную функцию с двумя нулями:

$$\Phi(p)=\frac{A_{n-2}\Omega_0^{n-2}p^2+A_{n-1}\Omega_0^{n-1}\,p+\Omega_0^n}{p^n+A_1\Omega\,p^{n-1}+\ldots+A_{n-2}\Omega_0^{n-2}p^2+A_{n-1}\Omega_0^{n-1}\,p+\Omega_0^n}\,. \quad (2.12)$$

Чтобы уменьшить влияние нулей в этом случае, рекомендуется располагать корни полинома знаменателя на отрицательной вещественной полуоси по геометрической прогрессии. В табл. 2.4 приведены значения коэффициентов полинома знаменателя $A_1$, $A_2, \ldots$, $A_{n-1}$ для такого распределения корней.




Фиг. 2.8. График переходных функций для систем с передаточными функциями типа (2.12) и коэффициентами, определяемыми по табл. 2.4.

На фиг. 2.8 дан график переходных функций для систем, определяемых стандартными коэффициентами табл. 2.4.

*Таблица 2.4*

**Стандартные коэффициенты при распределении корней по геометрической прогрессии**

| $n$ | 1-й член прогрессии | Знаменатель прогрессии | Коэффициент знаменателя |
|---|---|---|---|
| 3 | 0,182 | 5,5 | 1 6,7 6,7 1 |
| 4 | 0,185 | 3,08 | 1 7,9 15 7,9 1 |
| 5 | 0,075 | 3,63 | 1 18 69 69 18 1 |
| 6 | 0,038 | 3,7 | 1 36 251 485 251 36 1 |

Приведенные в табл. 2.1—2.4 значения стандартных коэффициентов обеспечивают оптимальные динамические свойства систем.

имеющих передаточные функции вида (2.8), (2.11) или (2.12). Методика использования этих стандартных коэффициентов для выбора параметров систем управления заключается в следующем. Коэффициенты $A_1$, $A_2, \ldots, A_{n-1}$ передаточных функций или исходных дифференциальных уравнений, из которых эти функции получены, зависят от параметров отдельных звеньев системы $a$, $b$, $c$ . . . Математически это положение может быть сформулировано следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} A_1\Omega_0 &= f_1(a, b, c, \ldots), \\ A_2\Omega_0^2 &= f_2(a, b, c, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n-1}\Omega_0^{n-1} &= f_{n-1}(a, b, c, \ldots), \\ \Omega_0^n &= f_n(a, b, c, \ldots), \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

где $f_i(a, b, c, \ldots)$ — выражение $i$-го коэффициента передаточной функции или исходного дифференциального уравнения через параметры $a$, $b$, $c, \ldots$ ее отдельных звеньев.

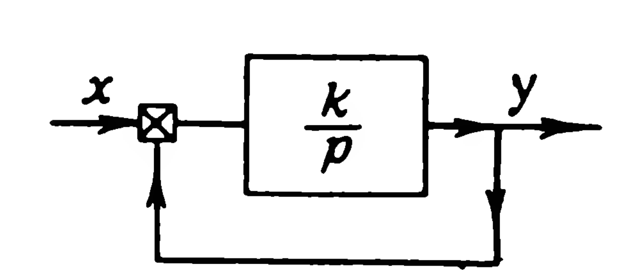
Уравнения могут образовать систему из $n$ алгебраических уравнений, если число изменяемых параметров $a$, $b$, $c, \ldots$ равно $n$. Если число изменяемых параметров больше $n$, то частью из параметров задаются, чтобы образовалась система из $n$ уравнений с $n$ неизвестными. В этом случае выбор значений изменяемых параметров сведется к решению указанной системы. Это не всегда возможно выполнить аналитически, так как система уравнений (2.13) может быть нелинейной. Однако, если тем или иным путем все $n$ корней системы (2.13) найдены и являются действительными числами, то задача о выборе параметров, при которых обеспечивается наперед заданная оптимальная переходная функция, является решенной. При этом задание $\Omega_0$ означает задание длительности переходного процесса или времени регулирования.

В тех случаях, когда число параметров $a$, $b$, $c, \ldots$ меньше $n$ или некоторые из корней получаются мнимыми, анализ уравнений (2.13) может принести известную пользу, тем более, что небольшие отступления от стандартных значений коэффициентов $A_1$, $A_2, \ldots, A_{n-1}$ не влияют существенно на динамические характеристики исследуемой системы.

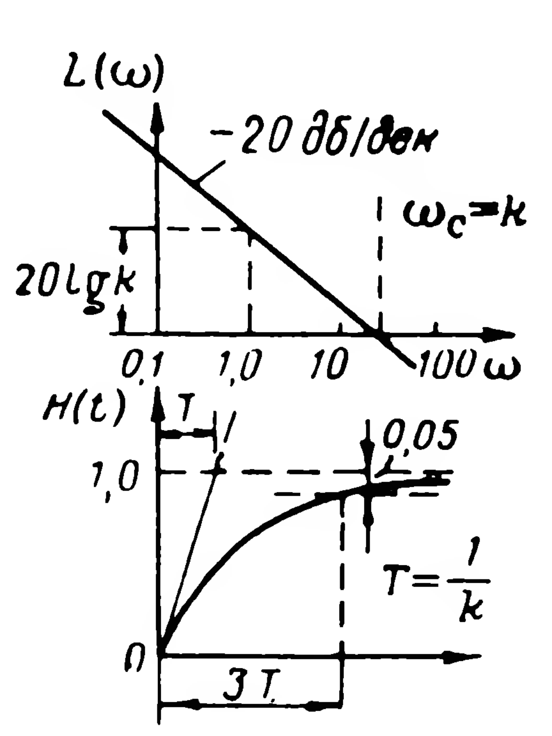
## § 2.3. МЕТОД ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК (ЛАХ)

Изложенный в предыдущем пункте метод СК в некоторых случаях оказывается недостаточно гибким. Действительно, передаточные функции некоторых замкнутых контуров в системе управ-

ления снарядом могут не совпасть ни с одной из стандартных функций (2.8)—(2.12). В другом случае система уравнений (2.13), по которой определяются параметры системы, может не иметь действительных корней. Наконец, число изменяемых параметров системы может оказаться меньше $n$, и система уравнений (2.13) в этом случае становится неполной, а иногда и несовместной. В тех случаях, когда метод СК не может быть применен, задача обычно




Фиг. 2.9. Структурная схема системы автоматического управления описываемой дифференциальным уравнением первого порядка.




Фиг. 2.10. ЛАХ и график переходной функции системы, приведенной на фиг. 2.9.

может быть решена другим достаточно простым, но более гибким методом — методом ЛАХ. Этот метод в настоящее время широко известен и здесь излагаться не будет. Необходимо лишь привести те основные рекомендации по его применению для выбора параметров систем управления, которые будут наиболее широко применяться далее. Рассмотрим связи между ЛАХ и переходными функциями на примере систем, описываемых уравнениями первого и второго порядков. Как известно, метод ЛАХ позволяет по характеристикам разомкнутой системы судить о динамических свойствах замкнутой системы.

Рассмотрим сначала простейшую систему автоматического управления, структурная схема которой приведена на фиг. 2.9. Эта система при замкнутой цепи обратной связи описывается следующим дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dy}{dt} + ky = kx. \tag{2.14}$$

Передаточная функция разомкнутой системы, как показано на фиг. 2.9, определяется выражением

$$W(p) = \frac{k}{p}. \tag{2.15}$$

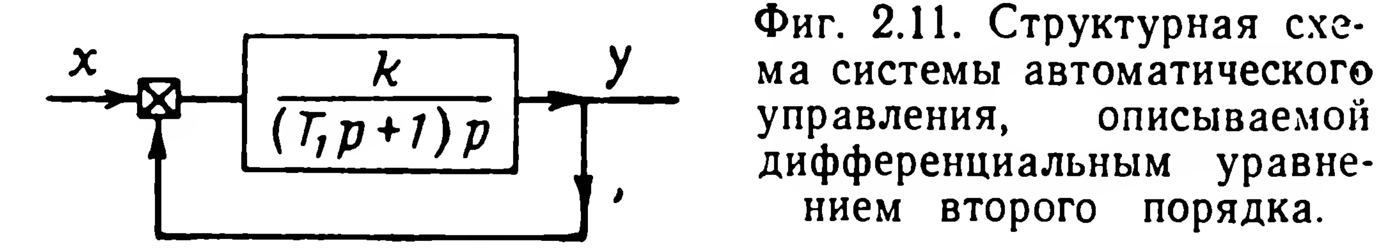
Наконец, ЛАХ для этой системы равна

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega. \tag{2.16}$$

На фиг. 2.10 показаны ЛАХ и переходная функция, построенные на основании формул (2.16) и (2.14). Эти графики наглядно указывают на следующие основные связи между рассматриваемыми характеристиками в системе, описываемой дифференциальным уравнением первого порядка:

1) частота среза $\omega_c$ равна коэффициенту усиления $k$;

2) частота среза обратно пропорциональна постоянной времени $T$ замкнутой системы.




Фиг. 2.11. Структурная схема системы автоматического управления, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка.

Таким образом, чем больше частота среза $\omega_c$, тем быстрее система будет отрабатывать любое управляющее воздействие.

На фиг. 2.11 показана структурная схема системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка. При замкнутой цепи обратной связи эта система описывается уравнением

$$T_1 \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ky = kx. \tag{2.17}$$

Передаточная функция разомкнутой системы определяется выражением

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1) p}. \tag{2.18}$$

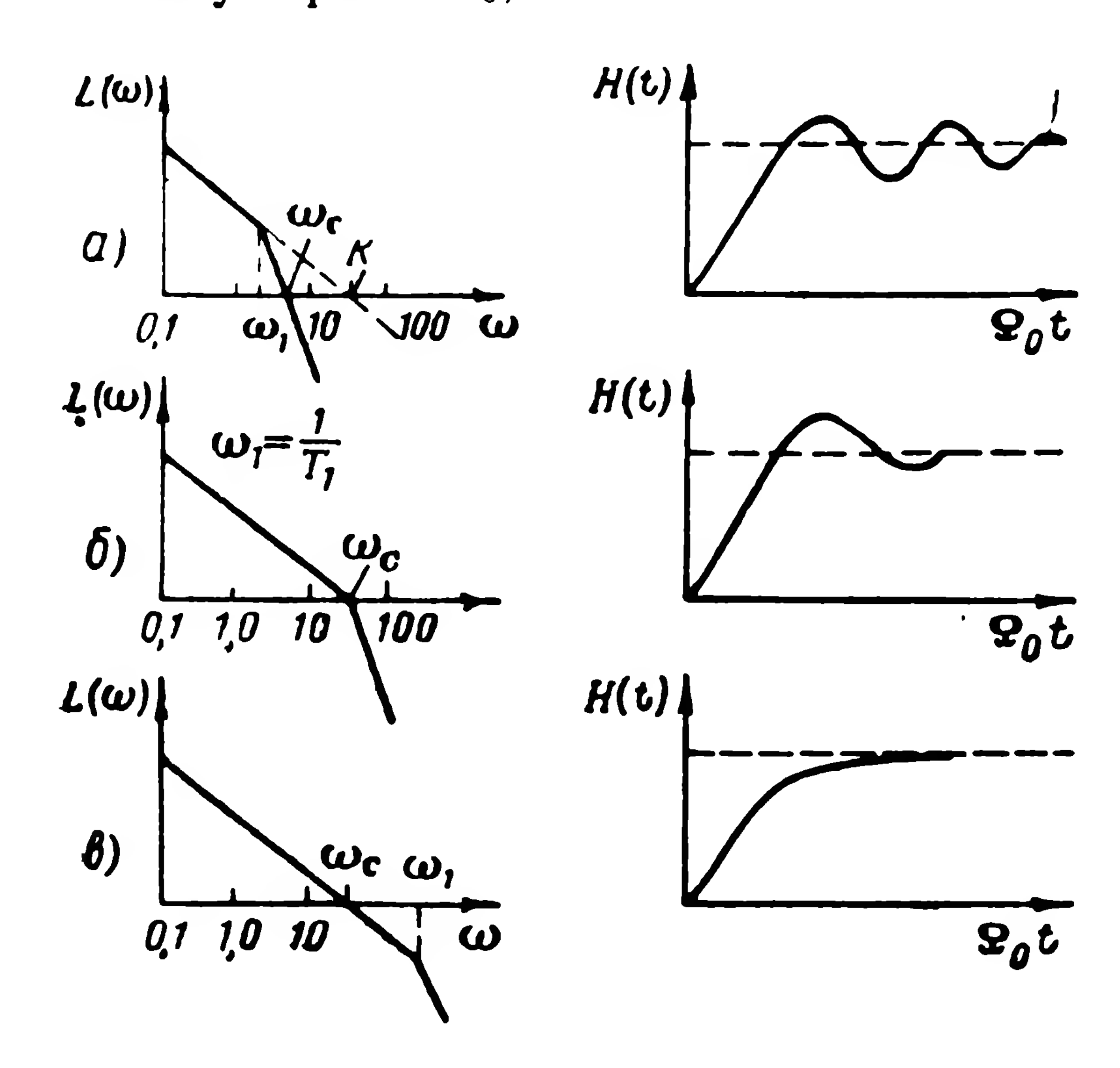
Наконец, ЛАХ для этой системы равна

$$L(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega - 20 \lg \sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}. \tag{2.19}$$

На фиг. 2.12 приведены ЛАХ и переходные функции, построенные на основании (2.17) и (2.19), при различных значениях относительного коэффициента затухания $\zeta = 0{,}5/\sqrt{T_1 k}$. Для системы, описываемой уравнением второго порядка, этот коэффициент будет меньше 0,5, если частота сопряжения $\omega_1 = 1/T_1$ меньше частоты среза $\omega_c$. В этом случае переходная функция имеет колебательный характер. При $\omega_1 = \omega_c$ относительный коэффициент затухания равен 0,5 и становится больше 0,5 при $\omega_1 > \omega_c$. Чем больше $\omega_1$ по сравнению с $\omega_c$, тем ближе к экспоненте с постоянной времени $T = 1/\omega_c$ переходная функция системы второго порядка.

На основании изложенного можно установить следующие основные связи между ЛАХ и переходной функцией для системы, описываемой дифференциальным уравнением второго порядка:

1) для ускорения переходного процесса в системе необходимо увеличивать частоту среза $\omega_c$;




Фиг. 2.12. ЛАХ и график переходных функций системы, приведенной на фиг. 2.11.

2) для получения переходной функции с хорошим затуханием необходимо, чтобы частота среза приходилась на участок ЛАХ с наклоном 20 *дб/дек*;

3) чем больше участок с наклоном 20 *дб/дек* около частоты $\omega_c$ (т. е. чем больше $\omega_1$ по сравнению с $\omega_c$), тем выше относительный коэффициент затухания.

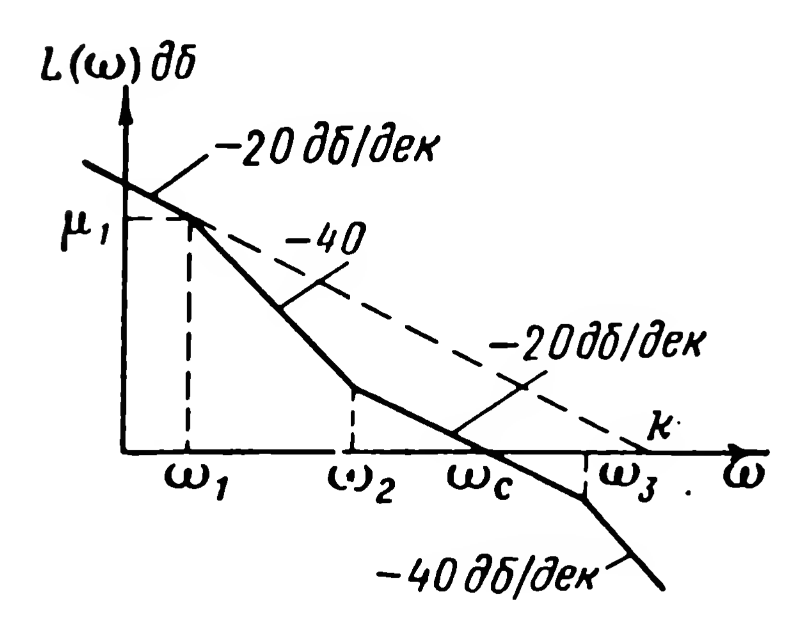
Эти выводы, полученные для системы второго порядка, оказываются справедливыми и для более сложных систем.

На фиг. 2. 13 приведена в качестве примера ЛАХ, которая соответствует следующей передаточной функции разомкнутой системы:

$$W(p) = \frac{k(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_3 p + 1)} = \frac{T_2}{T_1 T_3} \cdot \frac{k(p + \omega_2)}{p(p + \omega_1)(p + \omega_3)} . \qquad (2.20)$$

В любой системе частота среза характеризует ее быстродействие. Для получения приемлемого характера переходной функции замкнутой системы ЛАХ разомкнутой системы должна иметь вбли-

зи частоты среза достаточный (около декады) участок с наклоном 20 *дб/дек*. Кроме того, отношение частот $\omega_3/\omega_c$ рекомендуется ограничить в пределах $2<\omega_3/\omega_c<4$. Чем шире средний участок ЛАХ с наклоном 20 *дб/дек*, тем ближе к экспоненте переходный процесс в системе при воздействии на вход единичной функции.




Фиг. 2.13. ЛАХ, соответствующая передаточной функции (2.20).

Иногда ЛАХ исследуемой системы на участках от $\omega_1$ до $\omega_2$ и от $\omega_3$ до бесконечности имеет наклон, больший, чем показан на ЛАХ (фиг. 2.13). И для этих ЛАХ изложенные выше рекомендации по протеканию характеристики в области частоты среза справедливы. Однако эти рекомендации во всех случаях, когда порядок дифференциального уравнения системы выше второго, носят качественный характер. Более точная связь между ЛАХ и переходной функцией системы дается специальными номограммами*, приведенными на фиг. 2.14а — 2.14и. На этих номограммах типовая ЛАХ определяется частотами $\omega_1$, $\omega_3$ и ординатой $\mu_1$. Частоты $\omega_1$ и $\omega_3$ даны в отношении к частоте среза $\omega_c$. Как следует из графика на фиг. 2.13, задание $\mu_1$ и $\omega_1$ при выбранной частоте $\omega_c$ означает задание $\omega_2$. Увеличение любого из параметров ($\mu_1$ или $\omega_1$) при постоянстве второго приводит к увеличению $\omega_2$ и к сокращению среднего участка с наклоном 20 *дб/дек*. При этом перерегулирование и колебательность переходного процесса увеличиваются.

С помощью номограмм на фиг. 2.14 определяются следующие характеристики замкнутой системы (фиг. 2.15):

$t_р$ — время регулирования, в течение которого переходная функция выходной величины достигает значения, отличающегося от установившегося не более чем на 5%;

$t_в$ — время достижения первого выброса;

$H_m$ — максимальное значение переходной функции;

$\omega_t$ — частота колебаний переходной функции около установившегося значения;

$\omega_m$ — частота максимума амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы;

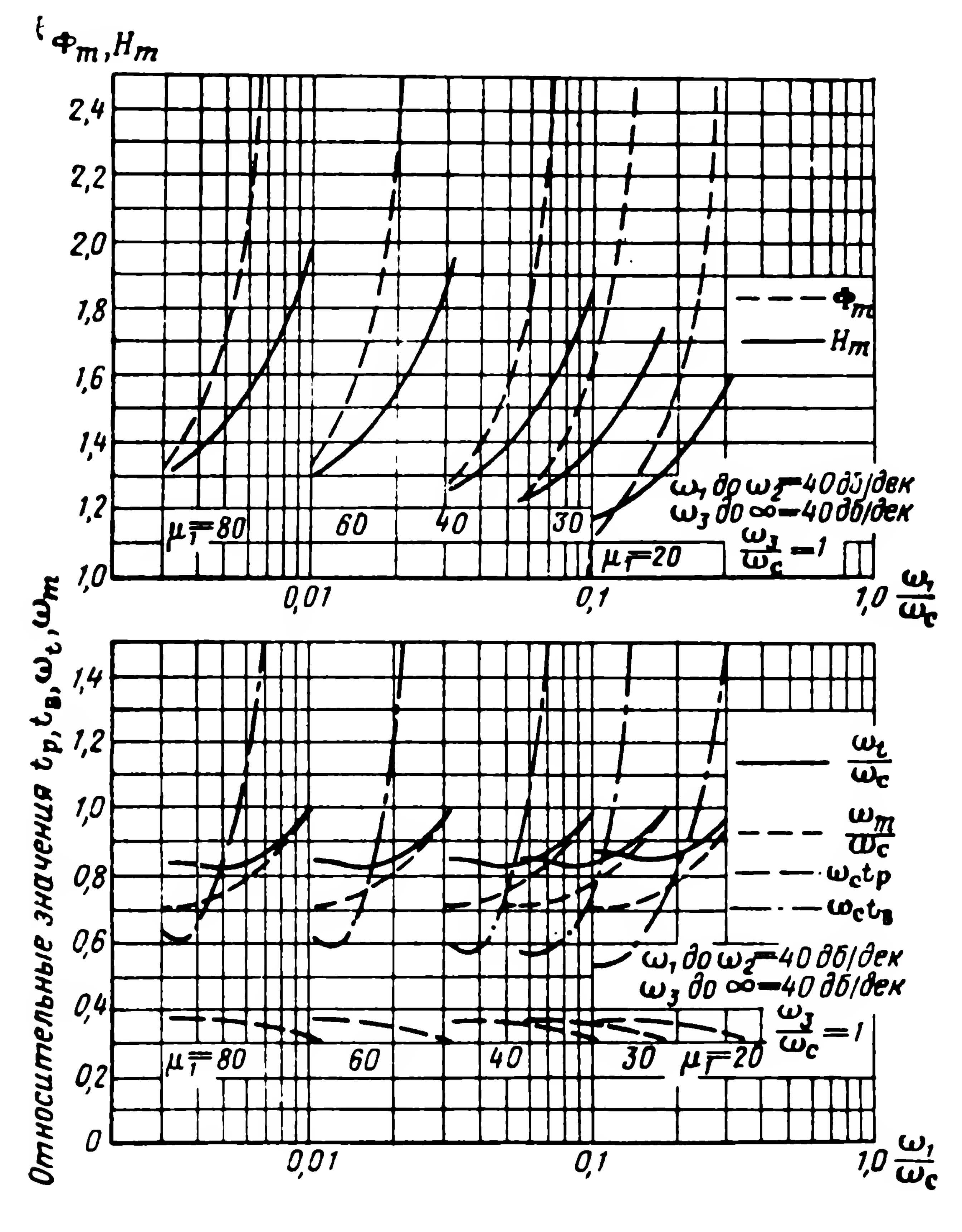
$\Phi_m$ — величина этого максимума.

---

* Справочная книга по технике автоматического регулирования, под редакцией Дж. Траксела, Госэнергоиздат, 1962.

Характеристики или параметры, приводимые на номограммах фиг. 2.14, даны в функции отношения $\omega_1/\omega_c$ для различных значений $\mu_1$ [*дб*] и отношения $\omega_3/\omega_c$. При этом на номограммах дано не абсолютное, а относительное значение параметров $t_p$, $t_в$, $\omega_t$ и $\omega_m$, которые приводятся в следующей форме: $t_p\omega_c/10$, $t_в\omega_c/10$, $\omega_t/\omega_c$, $\omega_m/\omega_c$.

При создании системы управления каким-либо объектом обычно оказывается, что ЛАХ собственно объекта вместе с простейшей системой управления или регулятором, образующим управляющий сигнал, не обеспечивает требуемых динамических свойств системы. Возникает необходимость включения в цепь передачи управляющего сигнала корректирующих устройств, чтобы «деформировать» исходную ЛАХ для получения заданных динамических характе-



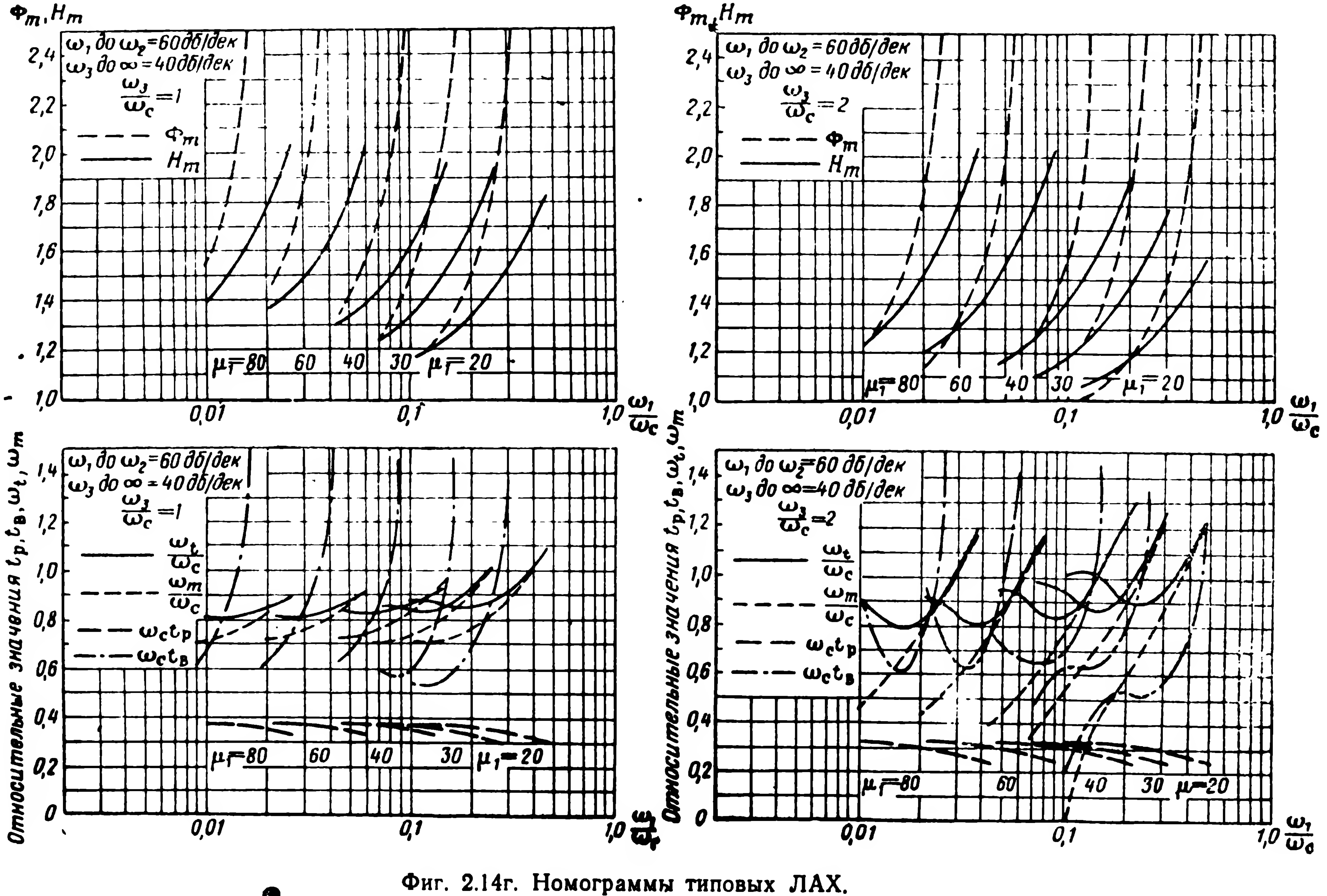

Фиг. 2.14а. Номограммы типовых ЛАХ.



Фиг. 2.14б. Номограммы типовых ЛАХ.



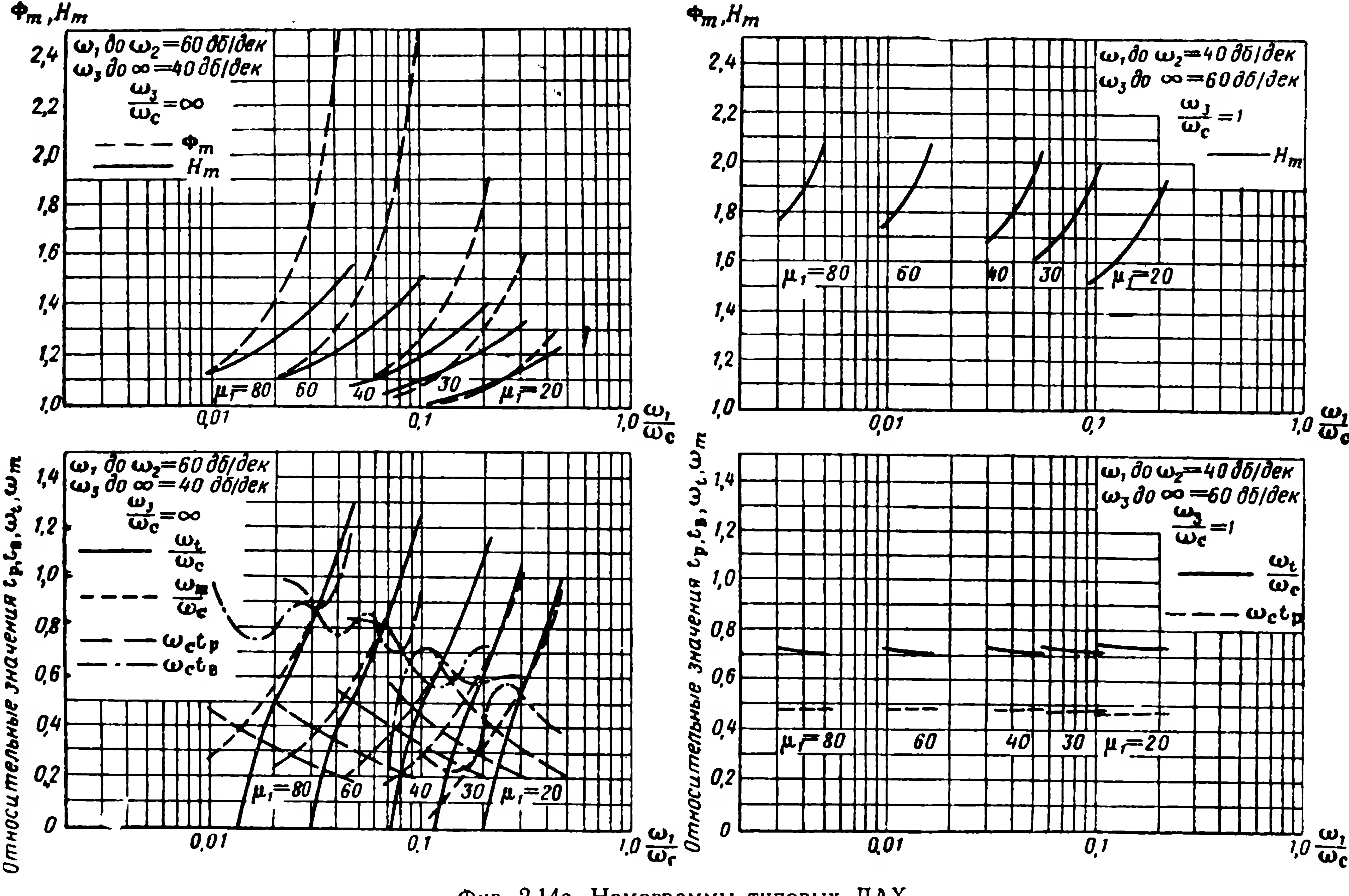
Фиг. 2.14в. Номограммы типовых ЛАХ.




Фиг. 2.14г. Номограммы типовых ЛАХ.



Фиг. 2.14д. Номограммы типовых ЛАХ.



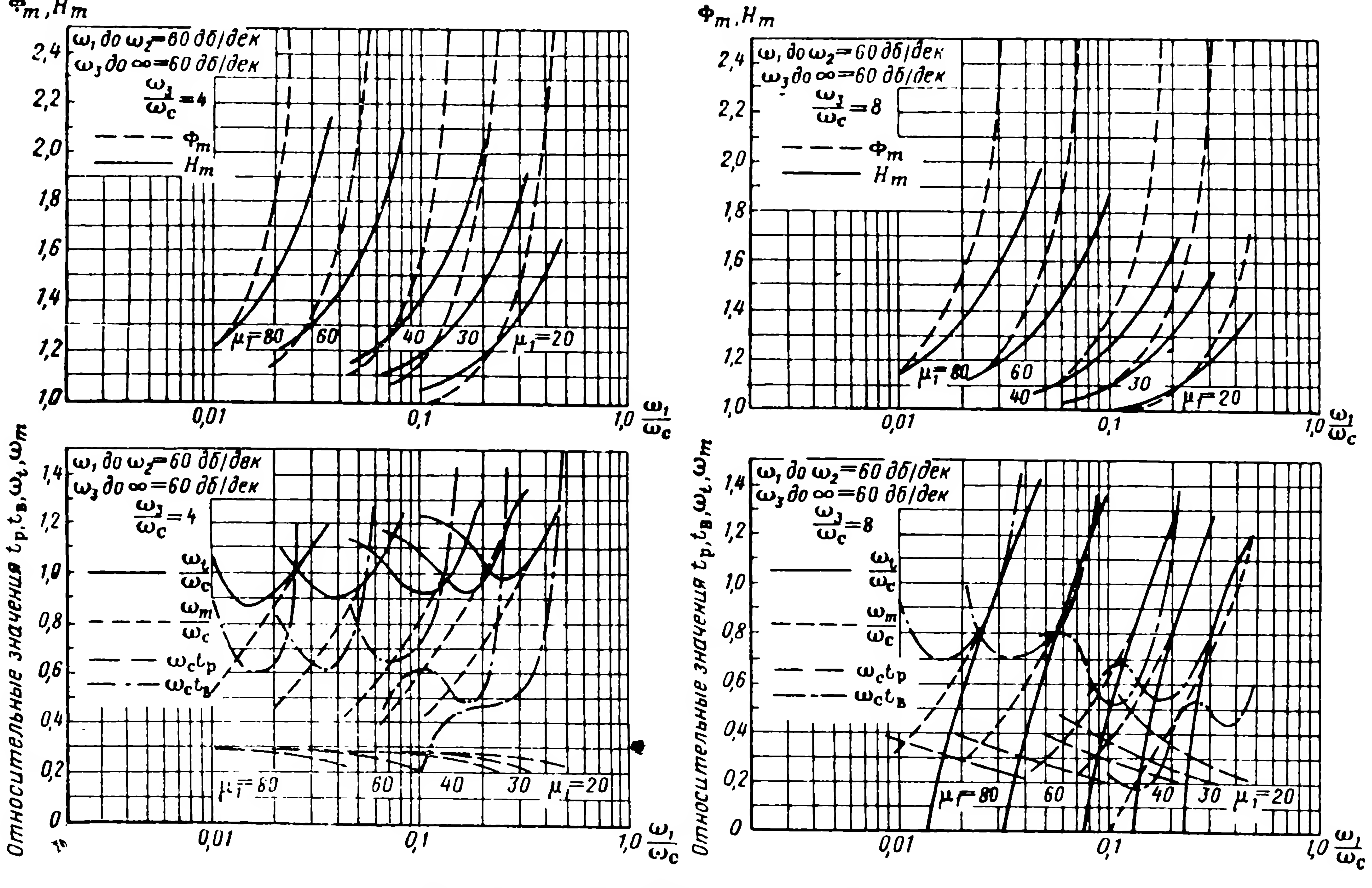

Фиг. 2.14е. Номограммы типовых ЛАХ.



Фиг. 2.14ж. Номограммы типовых ЛАХ.

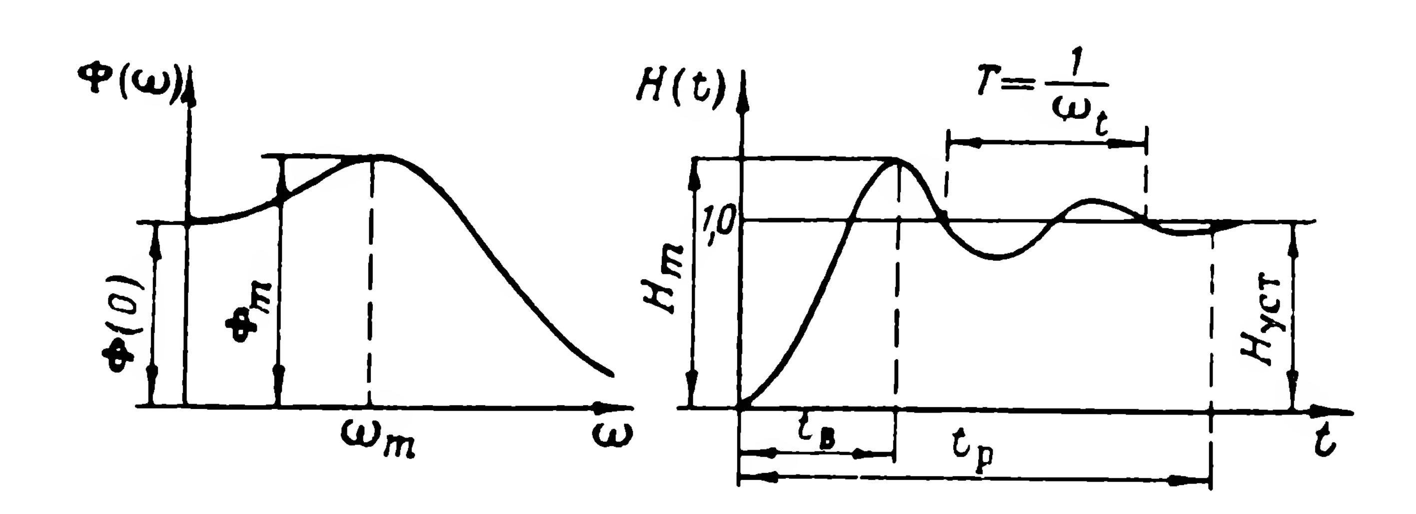


Фиг. 2.143. Номограммы типовых ЛАХ.




Фиг. 2.14и. Номограммы типовых ЛАХ.

ристик системы. Эти устройства могут иметь самую разнообразную физическую природу. Однако наибольшее распространение в системах автоматического управления получили корректирующие устройства в виде различных комбинаций из активных сопротивлений и конденсаторов. Такие схемы могут включаться в цепь передачи управляющего сигнала, если последний реализован в форме постоянного тока.




Фиг. 2.15. График типовой переходной функции замкнутой системы.

В табл. 2.5 приведены наиболее распространенные схемы корректирующих цепей, их передаточные функции и ЛАХ. Следует подчеркнуть, что этой таблицей можно пользоваться и для корректирующих устройств иной физической природы (механических, гидравлических, пневматических), если их передаточные функции совпадают с приведенными в табл. 2.5.

Идея метода ЛАХ для выбора параметров систем автоматического управления состоит в следующем. Пусть имеется система автоматического управления определенной структуры с известными параметрами, на основании которых может быть построена ЛАХ системы. Если динамические характеристики системы оказываются неудовлетворительными, то с помощью корректирующих устройств можно изменить ЛАХ системы и обеспечить нужные динамические свойства. Выбирать корректирующие устройства следует так, чтобы обеспечить прохождение корректированной ЛАХ системы в соответствии с рекомендациями, изложенными выше. Выбор параметров корректирующих устройств с использованием ЛАХ поясняется следующим примером.

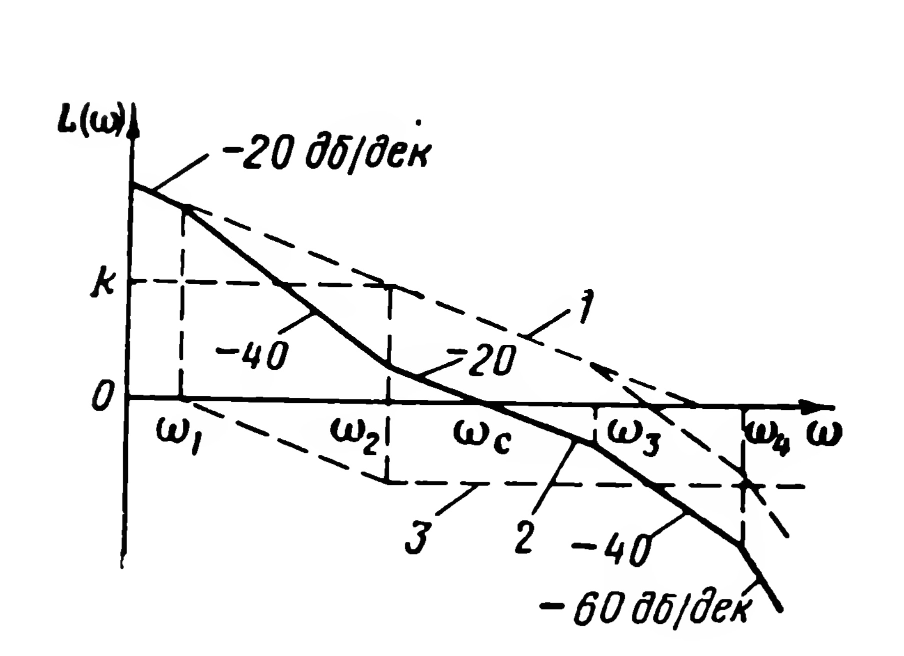
**Пример 2.1.** Пусть имеется система управления, которая в разомкнутом состоянии имеет следующую передаточную функцию:

$$W_1(p) = \frac{k}{p(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}. \qquad (2.21)$$

На фиг. 2.16 приведена ЛАХ, соответствующая передаточной функции (2.21), при следующих значениях параметров: $k=30$; $T_3=0{,}1$ *сек*; $T_4=0{,}02$ *сек*; $\omega_3=1/T_3=10$ 1/*сек*; $\omega_4=1/T_4=50$ 1/*сек*. Эта ЛАХ (кривая *1*) имеет частоту среза на участке с наклоном 40 *дб/дек*, что в соответствии с приведенными выше

рекомендациями указывает на неблагоприятный характер переходного процесса — слабое затухание колебаний. Это положение подтверждается переходной функцией замкнутой системы, представленной на фиг. 2.17 (кривая *1*).

Типовая желаемая ЛАХ для рассматриваемой системы (кривая *2* на фиг. 2.16) построена на основании упомянутых рекомендаций. Эта ЛАХ характеризуется тем же коэффициентом усиления $k=30$, но имеет следующие сопрягающие частоты: $\omega_1=0{,}1$ 1/*сек*; $\omega_2=1{,}0$ 1/*сек*; $\omega_3=10{,}0$ 1/*сек*; $\omega_4=50$ 1/*сек*. Частота среза $\omega_c$ приходится на участок ЛАХ с наклоном




Фиг. 2.16. ЛАХ, соответствующая передаточной функции (2.21).

Фиг. 2.17. Графики переходных функций систем.

*1* — некорректированная, *2* — корректированная.

20 *дб/дек*, причем $\omega_3/\omega_c=3{,}16$. Разность между ЛАХ *1* и *2* дает ЛАХ корректирующей цепи, которую нужно включить в контур системы управления, чтобы преобразовать его ЛАХ из кривой *1* в кривую *2*. Сравнивая ЛАХ *3* (см. фиг. 2.16) с типичными ЛАХ корректирующих звеньев, приведенными в табл. 2.5 отмечаем, что она представляет собой ЛАХ интегрирующей цепи (см. эскиз 8 в табл. 2.5). Эта цепь имеет передаточную функцию

$$W_k(p) = \frac{T_2 p + 1}{T_1 p + 1}, \qquad (2.22)$$

где

$$T_1 = (r_1 + r_2)\,c; \quad T_2 = r_1 c. \qquad (2.23)$$

Сравнивая эти значения постоянных корректирующей цепи с требуемыми, на основании кривой *3* получим соотношения $\omega_1=0{,}1=1/T_1$; $\omega_2=1{,}0=1/T_2$. Подставляя сюда значения $T_1$ и $T_2$ из выражений (2.23), получим: $r_1c=1$; $(r_1+r_2)c=10$ и, наконец, $r_2/r_1=9$. Задавшись любым из трех параметров корректирующей цепи, остальные два найдем из этих соотношений. Пусть, например, $c=10^{-5}$ *ф*=10 *мкф*; тогда $r_1=10^5$ *ом* и $r_2=9\cdot10^5$ *ом*.

При наличии корректирующей цепи передаточная функция рассматриваемой системы приобретет вид

$$W_2(p) = \frac{k(T_1 p + 1)}{p(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}. \qquad (2.24)$$

На фиг. 2.17 приведена переходная функция замкнутой системы (кривая *2*), имеющей корректирующую цепь с параметрами, которые были определены. По сравнению с некорректированной системой (кривая *1*) переходная функция корректированной цепи имеет принципиально иной характер.

**Корректирующие цепи**

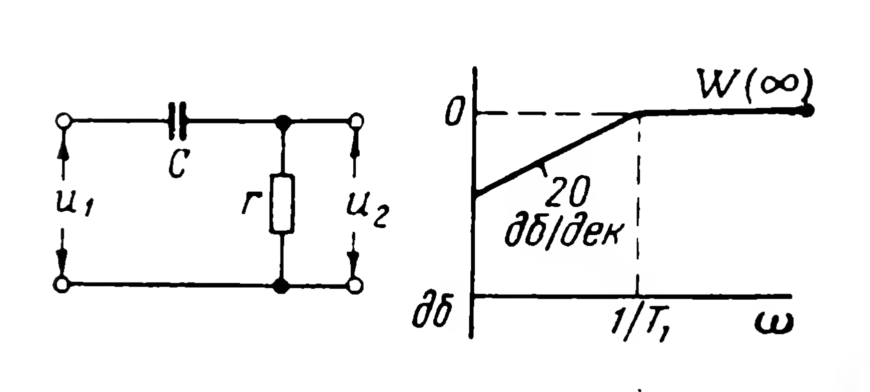
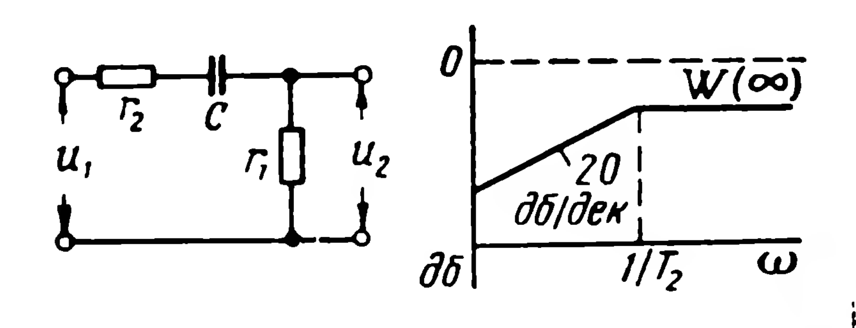
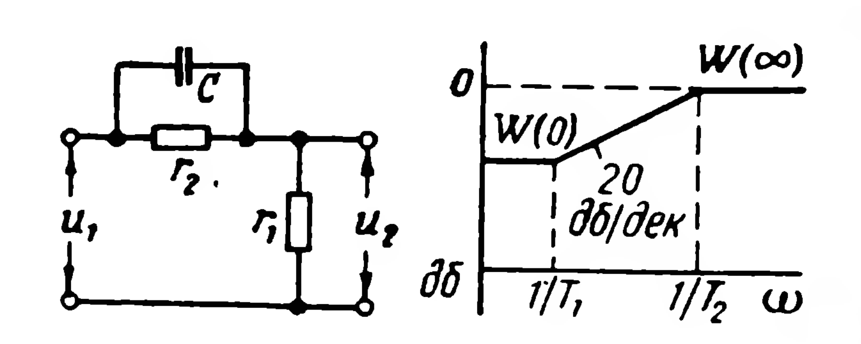
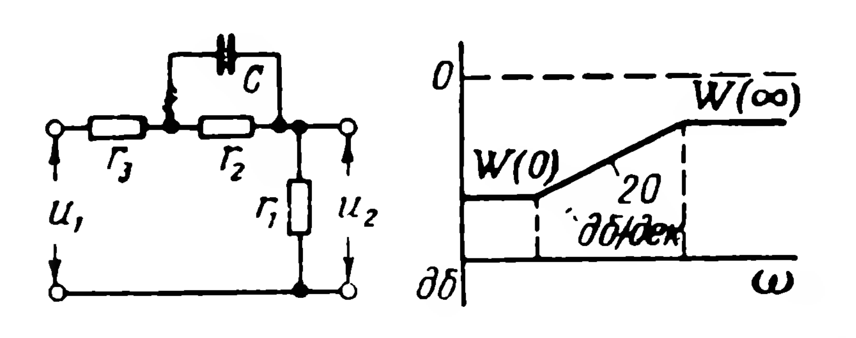
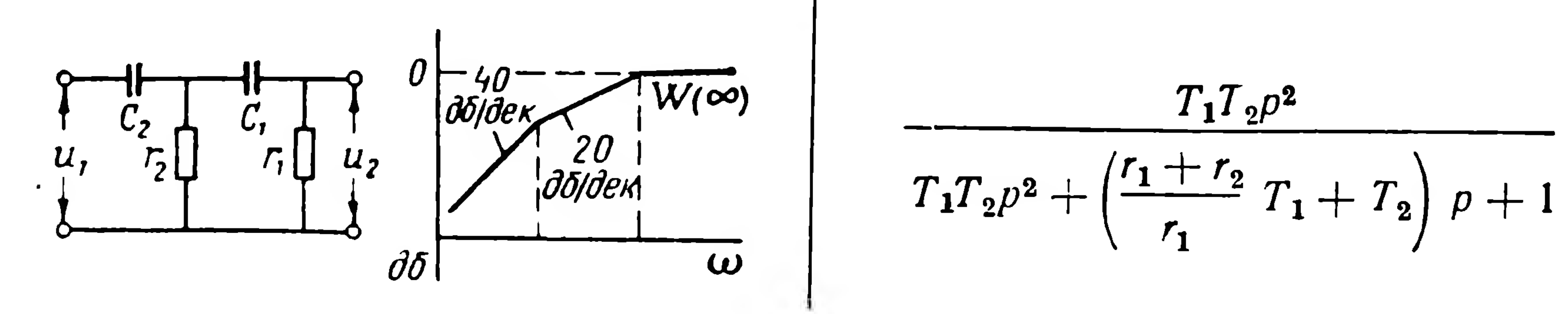
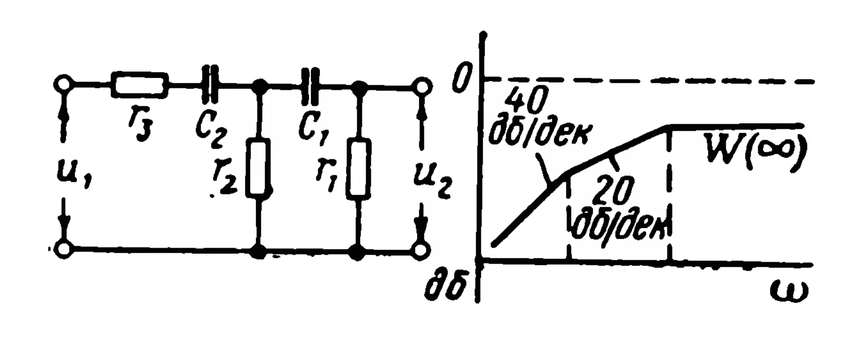
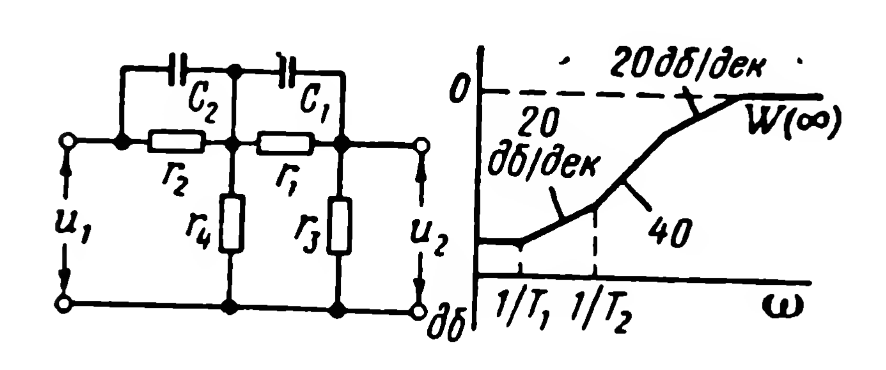
| Схема цепи и асимптотическая ЛАХ | $W(p)$ |
|---|---|
| Дифференци | |
|  | $\dfrac{T_1 p}{T_1 p + 1}$ |
|  | $\dfrac{T_1 p}{T_2 p + 1}$ |
|  | $W(0)\,\dfrac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$ |
|  | $W(0)\,\dfrac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}$ |
|  | $\dfrac{T_1 T_2 p^2}{T_1 T_2 p^2 + \left(\dfrac{r_1 + r_2}{r_1} T_1 + T_2\right) p + 1}$ |

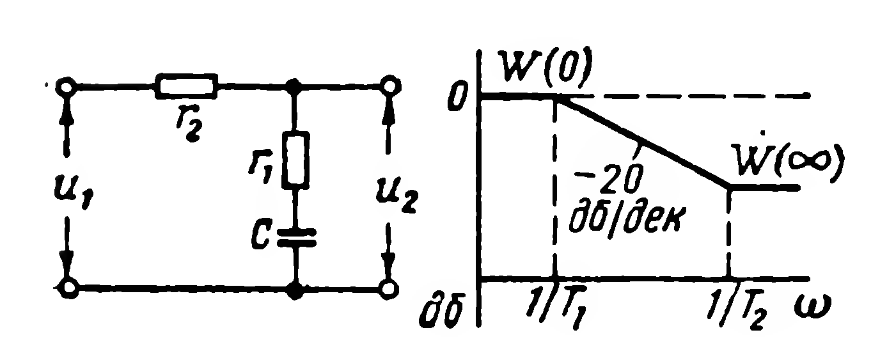
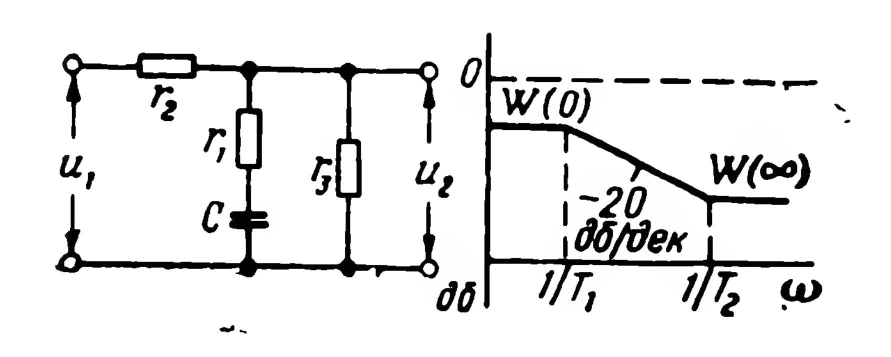
Таблица 2.5

**постоянного тока**

| $W(0)$ | $W(\infty)$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|
| руующие цепи | | | |
| 0 | 1 | $rC$ | — |
| 0 | $\frac{r_1}{r_1 + r_2}$ | $r_1C$ | $(r_1 + r_2)C$ |
| $\frac{r_1}{r_1 + r_2}$ | 1 | $r_2C$ | $\frac{r_1T_1}{r_1 + r_2}$ |
| $\frac{r_1}{r_1 + r_2 + r_3}$ | $\frac{r_1}{r_1 + r_2}$ | $r_2C$ | $\frac{r_1 + r_2}{r_1 + r_2 + r_3}T_1$ |
| 0 | 1 | $r_1C_1$ | $r_2C_2$ |

| Схема цепи и асимптотическая ЛАХ | $W(p)$ |
|---|---|
|   | $\dfrac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{T_1T_2p^2+\left[1+\dfrac{(r_1+r_2)r_3}{r_1r_2}\right]+\left[T_1\left(1+\dfrac{r_2}{r_1}\right)+T_2\left(1+\dfrac{r_3}{r_2}\right)\right]p+1}$ |
|   | $\dfrac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{T_1T_2p^2+\left\{T_1\left(1+\dfrac{r_2}{r_1}\right)+T_2\left[1+\dfrac{(r_1+r_3)r_4}{r_1r_3}\right]\right\}p+\dfrac{1}{W(0)}}$ |

Интегриру

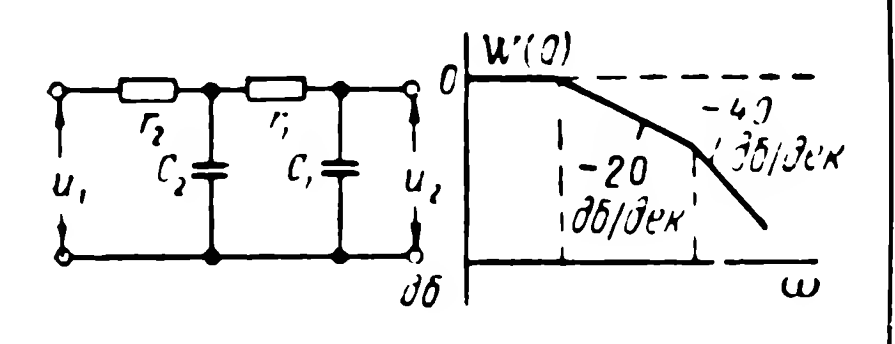
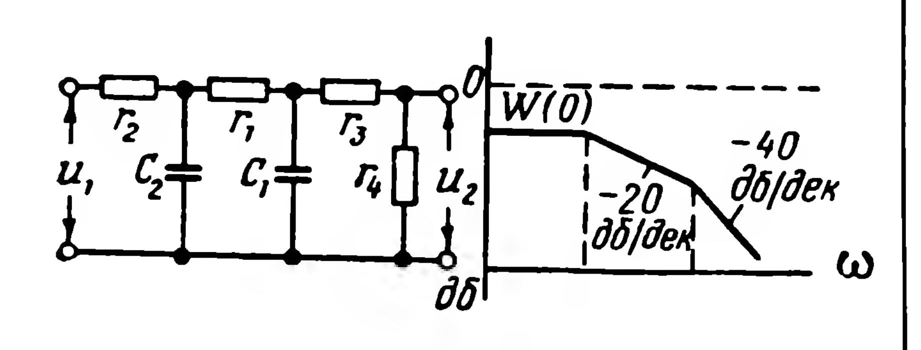
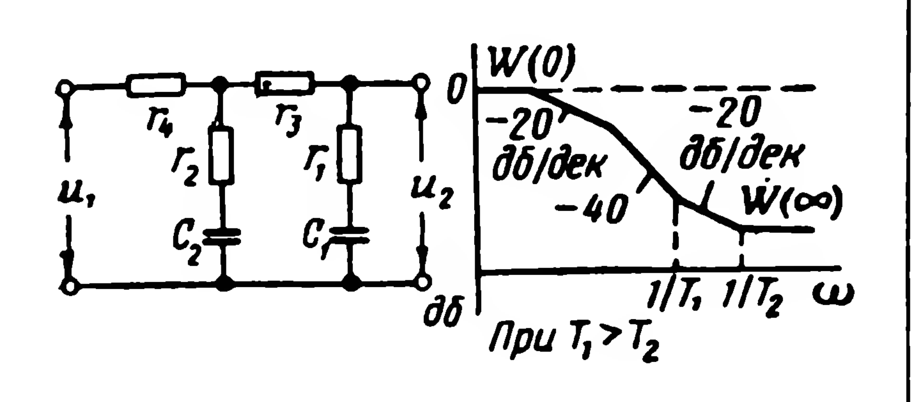
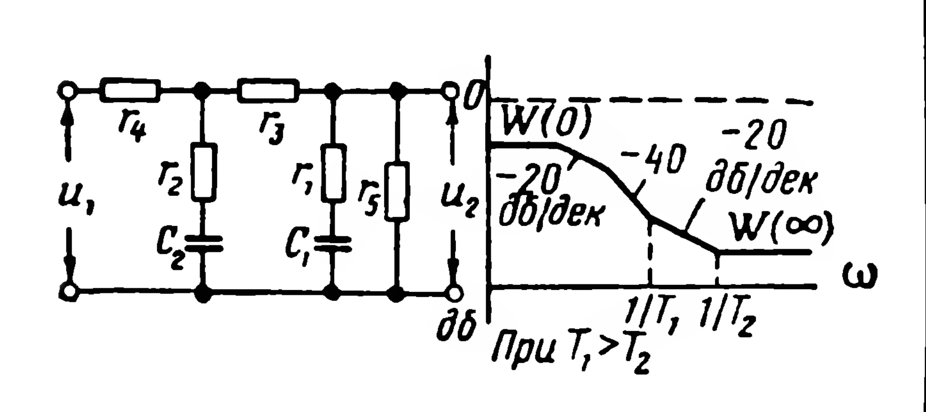
| | |
|---|---|
|   | $\dfrac{T_2p+1}{T_1p+1}$ |
|   | $W(0)\,\dfrac{T_2p+1}{T_1p+1}$ |

*Продолжение табл. 2.5*

| $W(0)$ | $W(\infty)$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{r_1 r_2}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2) r_3}$ | $r_1 C_1$ | $r_2 C_2$ |
| $\frac{r_3 r_4}{(r_1 + r_3) r_4 + (r_1 + r_3 + r_4) r_2}$ | 1 | $r_2 C_2$ | $r_1 C_1$ |

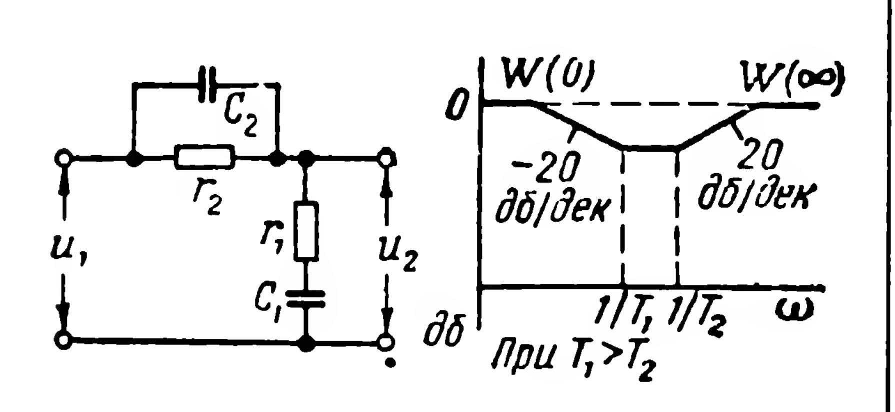
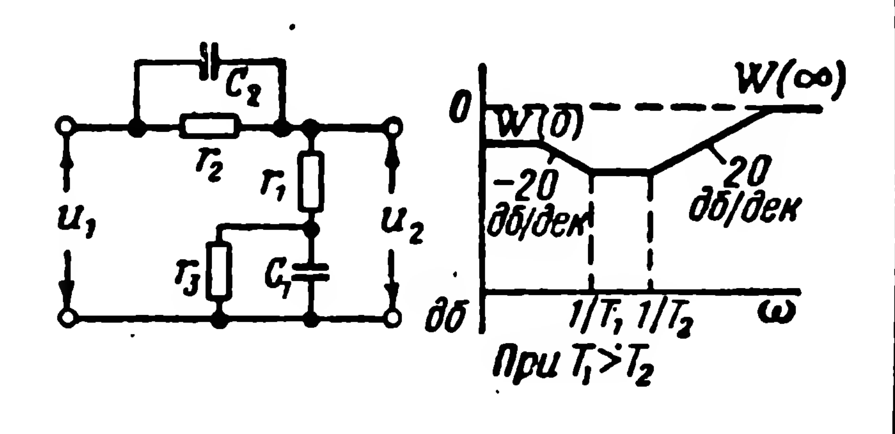
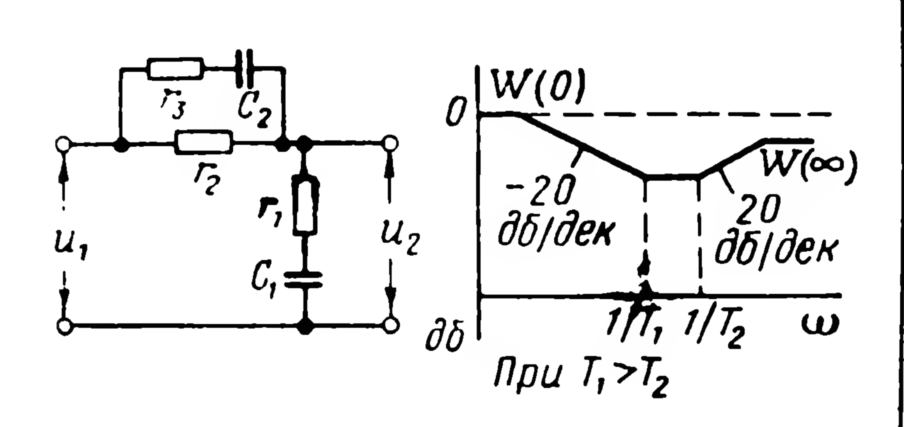
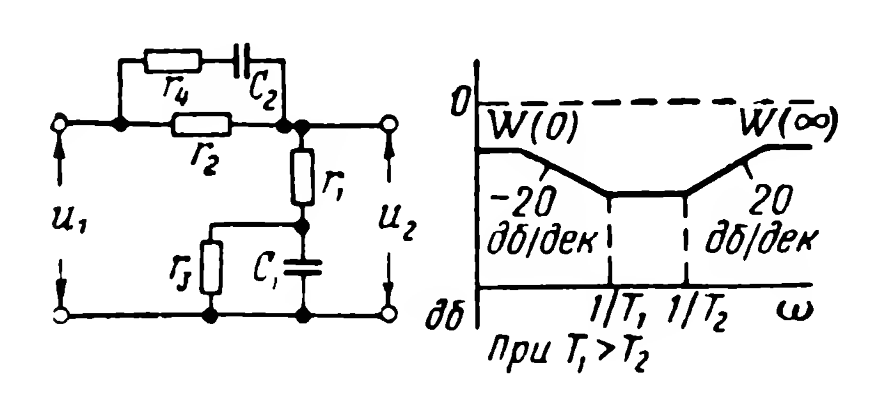
ющие цепи

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{r_1}{r_1 + r_2}$ | | $r_1 C$ |
| $\frac{r_3}{r_2 + r_3}$ | $\frac{r_1 r_3}{r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_4}$ | $\left[1 + \frac{r_2 r_3}{r_1 (r_2 + r_3)}\right] T_2$ | $r_1 C$ |

| Схема цепи и асимптотическая ЛАХ | $W(p)$ |
|---|---|
|  | $$\frac{1}{T_1T_2p^2+\left[T_1\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)+T_2\right]p+1}$$ |
|  | $$\frac{1}{T_1T_2p^2+\left[T_1\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)+T_2\left(1+\frac{r_2}{r_4}+\frac{r_3}{r_4}\right)\right]p+1}$$ |
|  | $$\frac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{T_1T_2\left[\left(1+\frac{r_3}{r_1}\right)\left(1+\frac{r_4}{r_2}\right)+\frac{r_4}{r_1}\right]p^2+\left[T_1\left(1+\frac{r_3}{r_1}+\frac{r_4}{r_1}\right)+T_2\left(1+\frac{r_4}{r_2}\right)\right]p+1}$$ |
|  | $$\frac{\frac{r_5}{r_3+r_5}(T_1p_1+1)(T_2p+1)}{T_1T_2\left\{\left[1+\frac{r_3r_5}{r_1(r_3+r_5)}\right]\left(1+\frac{r_4}{r_2}\right)+\frac{r_4(r_1+r_5)}{r_1(r_3+r_5)}\right\}p^2+\left\{T_1\left[1+\frac{r_3r_5}{r_1(r_3+r_5)}+\frac{r_4(r_1+r_5)}{r_1(r_3+r_5)}\right]+T_2+1+\frac{r_4}{r_3}+\frac{r_4}{r_3+r_5}\Big)\Big\}p+1+\frac{r_4}{r_3+r_5}}$$ |

*Продолжение табл. 2.5*

| $W(0)$ | $W(\infty)$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $0$ | $r_1C_1$ | $r_2C_2$ |
| $\dfrac{r_4}{r_1+r_2+r_3+r_4}$ | $0$ | $\dfrac{r_3+r_4}{r_4}r_1C_1$ | $r_2C_2$ |
| $1$ | $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{r_3}{r_1}\right)\left(1+\dfrac{r_4}{r_2}\right)+\dfrac{r_4}{r_1}}$ | $r_1C_1$ | $r_2C_2$ |
| $\dfrac{r_5}{r_3+r_4+r_5}$ | $\dfrac{r_1r_5}{[r_1(r_3+r_5)+r_3r_5]\left(1+\dfrac{r_4}{r_2}\right)+r_4(r_1+r_5)}$ | $r_1C_1$ | $r_2C_2$ |

| Схема цепи и асимптотическая ЛАХ | $W(p)$ |
|---|---|
| | Интегро-дифферен |
|   | $\dfrac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{T_1T_2p^2+\left[T_1\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)+T_2\right]p+1}$ |
|   | $\dfrac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{T_1T_2p^2+\left[T_1\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)+T_2\right]p+\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1+r_3}}$ |
|   | $\dfrac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{T_1T_2\left[1+\frac{r_2r_3}{r_1r_2+r_1r_3}\right]p^2+\left[T_1\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)+T_2\right]p+1}$ |
|   | $\dfrac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{T_1T_2\left(1+\frac{r_2r_4}{r_1r_2+r_1r_4}\right)p^2+\left\{T_1\left(1+\frac{r_2}{r_1}\right)+1+\frac{r_2r_4}{(r_1+r_3)(r_2+r_4)}\right\}p+\frac{r_1+r_3}{r_1+r_2+r_3}}$ |

*Продолжение табл. 2.5*

| $W(0)$ | $W(\infty)$ | $T_1$ | $T_2$ |
|---|---|---|---|
| цирующие цепи | | | |
| $1$ | $1$ | $r_1C_1$ | $r_2C_2$ |
| $\dfrac{r_1+r_3}{r_1+r_2+r_3}$ | $1$ | $\dfrac{r_1r_3}{r_1+r_3}C_1$ | $r_2C_2$ |
| $1$ | $\dfrac{r_1r_2+r_1r_3}{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_4}$ | $r_1C_1$ | $(r_2+r_3)\,C_2$ |
| $\dfrac{r_1+r_3}{r_1+r_2+r_3}$ | $\dfrac{r_1r_2+r_1r_4}{r_1r_2+r_2r_4+r_4r_1}$ | $\dfrac{r_1r_3}{r_1+r_3}C_1$ | $(r_2+r_4)\,C_2$ |

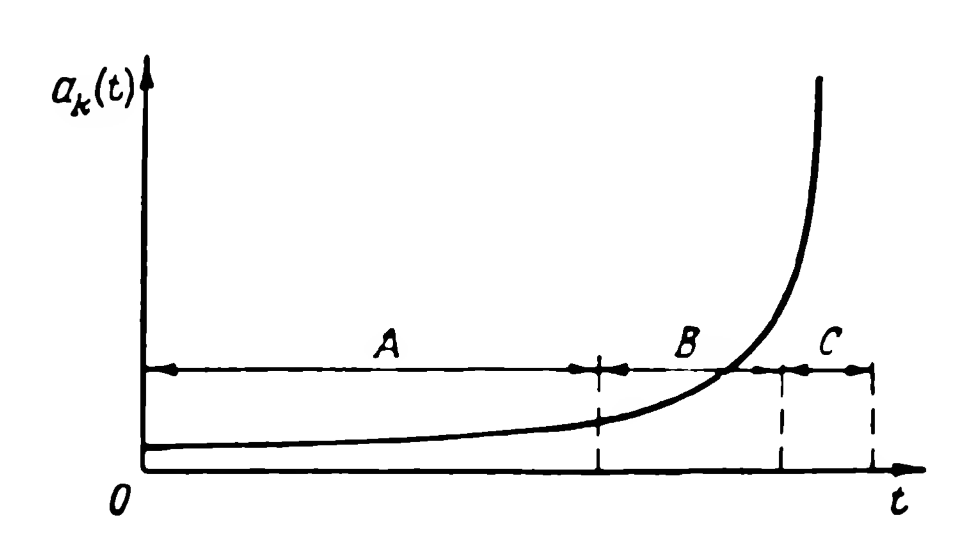
В рассмотренном примере при выборе параметров корректирующей цепи ставилось лишь одно требование — увеличить затухание. Это требование удовлетворено за счет уменьшения быстродействия системы, так как у корректированной системы частота среза значительно ниже, чем у некорректированной. Если это нежелательно, то может быть применена другая корректирующая цепь. Таким образом, выбор той или иной корректирующей цепи определяется конкретными требованиями, предъявляемыми к анализируемой системе управления.

Необходимо в заключение заметить, что метод логарифмических амплитудных характеристик в изложенном виде применим только к так называемым минимально фазовым системам. Система называется минимально фазовой, если ее передаточная функция (при разомкнутой цепи обратной связи) не содержит нулей и полюсов в правой полуплоскости комплексной плоскости. Для минимально фазовых систем характерна однозначная связь между амплитудными и фазовыми характеристиками, вследствие чего достаточно исследовать одну из этих характеристик. Поэтому метод ЛАХ оперирует только с амплитудными характеристиками. Если ЛАХ имеет достаточно большой участок с наклоном 20 *дб/дек*, то тем самым обеспечивается необходимый запас устойчивости и по фазе. При синтезе неминимально фазовых систем необходимо одновременно рассматривать амплитудные и фазо-частотные характеристики разомкнутых систем.

## § 2.4. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Методы анализа линейных систем, приведенные в § 2. 2 и 2. 3, применимы лишь к стационарным системам, описываемым линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Между тем движение управляемого снаряда в общем случае описывается нелинейными уравнениями с переменными коэффициентами. Изменение параметров собственно снаряда обусловлено изменением веса за счет выгорания топлива, изменением скорости и высоты полета. В последующих главах будет показано, что характеристики некоторых систем управления сильно зависят от расстояния между снарядом и целью. В ряде случаев удобнее считать, что эти характеристики зависят от времени полета снаряда. Путем различных приближенных методов, изложенных при рассмотрении конкретных примеров, иногда удается свести нелинейные уравнения с переменными коэффициентами к линейным, также с переменными коэффициентами. Но и при такой упрощенной постановке задачи возникает ряд трудностей.

Основная трудность исследования систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, состоит в том, что решение таких уравнений выше первого порядка не выражается элементарными функциями. Интегрирование этого класса уравнений не приводится в общем случае к квадратурам. Между тем при решении задач, связанных с управлением снаряда (и многих других), основная цель исследования состоит в определении влияния параметров системы управления на характеристики движения снаряда и в выборе оптимального значения этих параметров. Очевидно, что эту задачу наиболее полно можно решить в том случае, если имеется общее решение уравнений, описывающих движение снаряда, когда интересующие нас связи между параметрами и характеристиками движения выражены в аналитической форме. В большинстве случаев для получения такого общего решения рассматриваемую задачу приходится упрощать, пренебрегая иногда довольно существенными факторами. Конечно, полученное таким образом общее решение будет лишь приближенно описывать реальную систему.




Фиг. 2.18. Типичный график изменения коэффициентов уравнения движения самонаводящегося снаряда.

Необходимо подчеркнуть, однако, что в связи с резко возросшими возможностями точного решения задач на математических машинах роль таких приближенных аналитических методов становится все более важной. Эти методы позволяют, хотя и с небольшой точностью, но качественно верно решить задачу в общем виде, что дает основание для выбора направления более глубоких и точных исследований на математических машинах.

Поведение линейной нестационарной системы описывается уравнением вида (2.1), но коэффициенты $a_k$ и $b_k$ этого уравнения являются функциями времени. Зависимость от времени переменных коэффициентов уравнения, описывающего движение, например, самонаводящихся снарядов, может быть выражена графиком, представленным на фиг. 2. 18. На участке $A$, соответствующем большой дальности до цели, коэффициенты меняются медленно. На этом участке для анализа динамики снаряда вполне допустимо использовать метод фиксированных («замороженных») коэффициентов, причем для разных моментов времени величина этих коэффициентов берется различной. Характер движения снаряда при разных значениях коэффициентов качественно указывает, как влияет изменение коэффициентов на динамику системы.

*Таблица 2. 6*

**Преобразование нестационарных коэффициентов в квазификсированные**

| Исходное уравнение | Преобразованное уравнение | Значение квазификсированных коэффициентов |
|---|---|---|
| $a\frac{dx}{dt}+bx=0$ | $A\frac{dx}{dt}+Bx=0$ | $A=a_0;\ B=b_0$ |
| $a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=0$ <br> $a=\text{const}$ | $A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}+Cx=0$ | $A=a_0;\ B=b_0+\frac{1}{2}a_0\frac{c_1}{c_0};$ <br> $C=c_0$ |
| $a\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+cx=0$ <br> $c=\text{const}$ | $A\frac{d^2x}{dt^2}+B\frac{dx}{dt}+Cx=0$ | $A=a_0\cdot B=b_0-\frac{1}{2}a_1;$ <br> $C=c_0$ |
| $a\frac{d^3x}{dt^3}+b\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+$ <br> $+dx=0$ <br> $a=\text{const}$ | $A\frac{d^3x}{dt^3}+B\frac{d^2x}{dt^2}+$ <br> $+C\frac{dx}{dt}+Dx=0$ | $A=a_0,\ B=b_0+a_1\frac{d_1}{d_0};$ <br> $C=c_0-\frac{1}{3}b_1+\frac{4}{9}b_0\times$ <br> $\times\frac{d_1}{d_0}+\frac{2}{9}\frac{d_1^2}{d_0^2};\ D=d_0$ |
| $a\frac{d^3x}{dt^3}+b\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+$ <br> $+dx=0$ <br> $d=\text{const}$ | $A\frac{d^3x}{dt^3}+B\frac{d^2x}{dt^2}+$ <br> $+C\frac{dx}{dt}+Dx=0$ | $A=a_0;\ B=b_0-a_1;$ <br> $C=c_0-\frac{1}{3}b_1-\frac{1}{9}b_0\times$ <br> $\times\frac{a_1}{a_0}+\frac{2}{9}\frac{a_1^2}{a_0^2};$ <br> $D=d_0;$ |
| $a\frac{d^4x}{dt^4}+b\frac{d^3x}{dt^3}+c\frac{d^2x}{dt^2}+$ <br> $+d\frac{dx}{dt}+ex=0$ <br> $a=\text{const}$ | $A\frac{d^4x}{dt^4}+B\frac{d^3x}{dt^3}+C\frac{d^2x}{dt^2}+$ <br> $+D\frac{dx}{dt}+Ex=0$ | $A=a_0;B=b_0+\frac{3}{2}a_0\frac{e_1}{e_0};$ <br> $C=c_0-\frac{2}{3}b_1+\frac{11}{12}b_0\frac{e_1}{e_0};$ <br> $D=d_0-\frac{1}{4}c_1-\frac{1}{24}\frac{b_0}{a_0}b_1+$ <br> $+\frac{3}{8}c_0\frac{e_1}{e_0};\ E=e_0.$ |

Примечание. $a_0=a(t)_{t=t_0};\ b_0=b(t)_{t=t_0}$ и т. д.,

$$a_1=\left(\frac{da}{dt}\right)_{t=t_0};\ b_1=\left(\frac{db}{dt}\right)_{t=t_0}\ \text{и т. д.}$$

На участке *B*, на котором коэффициенты изменяются значительно быстрее, применяется метод квазификсированных коэффициентов. Эти коэффициенты постоянны, но не равны фиксированным для данного момента. Квазификсированные коэффициенты подсчитываются по специальным формулам. Один из методом подсчета этих коэффициентов приведен ниже. Таким образом, на участках *A* и *B* динамика снаряда описывается в конечном счете линейным уравнением с постоянными коэффициентами, анализ которого приведен в § 2.2 и 2.3. На участке *C*, когда снаряд близок к цели, переменные коэффициенты уравнения, описывающего его движение, меняются настолько быстро, что, за исключением редких случаев, относящихся к уравнению 1 и 2-го порядков, решение можно найти лишь численными методами или методом моделирования на аналоговых машинах.

Приведем данные одного из методов расчета * квазификсированных коэффициентов для участка *B*. Эти коэффициенты рассчитываются по специальным формулам, которые учитывают скорость изменения (первую производную) переменных коэффициентов исходного уравнения.

В табл. 2.6 приведены формулы для подсчета квазификсированных коэффициентов для дифференциальных уравнений от первого до четвертого порядка.

## § 2.5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

При исследовании систем управления снарядами всегда возникает необходимость оценить поведение этих систем при случайных возмущениях. Источниками таких возмущений являются собственные шумы элементов бортовой системы управления, флюктуации сигналов, несущих информацию о координатах цели, воздействие возмущенной атмосферы и т. п. Конкретные задачи о влиянии тех или иных случайных возмущений на движение снаряда будут рассмотрены в последующих главах. В этом параграфе приводятся в самой сжатой форме необходимые общие сведения о поведении линейных систем при случайных возмущениях. Случайные возмущения, действующие на снаряд, обычно являются случайными функциями времени. Случайной называется функция, реализация которой в результате опыта имеет случайный характер, т. е. не может быть предсказана заранее.

### 1. Стационарные случайные процессы

Рассмотрим вначале один класс случайных функций, который имеет наиболее важное значение в большинстве прикладных за-

* P. E. W. Grensted, Stability Qriteria for Linear Equations with Time — Varying Coeffitients, RAS, 1956, No. 3.

дач, — стационарные случайные функции. Случайная функция называется стационарной, если все ее вероятностные характеристики (определяемые ниже) не зависят от времени. Математический аппарат стационарных функций сравнительно прост, расчеты с использованием этого аппарата выполняются довольно быстро и поэтому допущение о стационарности иногда целесообразно делать также и для определенных не очень больших интервалов времени при анализе нестационарных, но медленно меняющихся случайных функций.

Дополнительным ограничением, накладываемым на рассматриваемые ниже стационарные случайные функции, является допущение о том, что эти функции обладают эргодическим свойством. Случайная функция обладает эргодическим свойством в том случае, если вероятные характеристики, полученные осреднением по времени одной реализации (на достаточно большом интервале наблюдения), приближенно совпадают с характеристиками, полученными осреднением по множеству реализаций (при фиксированном времени).

Основные вероятностные характеристики стационарной случайной функции $x(t)$, обладающей эргодическим свойством, определяются следующими выражениями.

Математическое ожидание или среднее значение:

$$\bar{x}(t) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, dt \tag{2.25}$$

(при достаточно большом $T$).

Дисперсия или средний квадрат функции:

$$\overline{x_0^2}(t) = \sigma_x^2 = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x_0^2(t)\, dt, \tag{2.26}$$

где $x_0(t) = x(t) - \bar{x}(t)$ — центрированная случайная функция.

Далее в этом параграфе будут рассматриваться только центрированные случайные функции, поэтому для удобства индекс в обозначении этих функций будет опущен.

Корреляционная функция, характеризующая степень связи между значениями случайной функции в моменты $t$ и $t+\tau$:

$$R_x(\tau) = \overline{x(t) \cdot x(t+\tau)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x(t+\tau)\, dt. \tag{2.27}$$

Из сопоставления формул (2.26) и (2.27) вытекает, что

$$R_x(0) = \sigma_x^2. \tag{2.28}$$

Прямое преобразование Фурье корреляционной функции дает спектральную плотность случайной функции *

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau. \quad (2.29)$$

Спектральная плотность характеризует распределение по частотам мощности случайной функции $x(t)$. Так как мощность не может быть отрицательной, то и спектральная плотность является положительной функцией во всем диапазоне частот от 0 до $\pm\ \infty$. Если известна спектральная плотность случайной функции, то, применяя к ней обратное преобразование Фурье, получим корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \int_{0}^{\infty} S(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega. \quad (2.30)$$

В формулах (2.29) и (2.30) замена нижнего предела интеграла на нуль (вместо $-\infty$ ) с одновременным уменьшением в два раза интервала усреднения возможна благодаря тому, что корреляционная функция и спектральная плотность являются функциями четными. Сравнение формул (2. 30) и (2. 28) приводит к следующему соотношению:

$$\sigma_x^2 = \int_{0}^{\infty} S(\omega) \, d\omega. \quad (2.31)$$

Аналитические выражения для корреляционных функций и спектральных плотностей случайных стационарных процессов могут быть самыми разнообразными. В качестве примера приведем случайный процесс, называемый «белым шумом» или «абсолютно случайным процессом». Спектральная плотность такого процесса постоянна во всем диапазоне частот, т. е.

$$S_a(\omega) = S_a(0) = \text{const}. \quad (2.32)$$

Формула (2. 32) поясняет происхождение термина «белый шум». Действительно, физическим аналогом такого случайного процесса является «белый свет», в спектре которого содержатся колебания всех частот с одинаковой амплитудой.

---

* Необходимо указать, что в формулах преобразования Фурье часто используются и другие коэффициенты перед интегралами; это обстоятельство следует учитывать при расчетах.

Корреляционная функция «белого шума» может быть получена по его спектральной плотности путем применения формулы (2.30), что дает

$$R_a(\tau) = \pi S_a(0)\,\delta(\tau). \tag{2.33}$$

Формула (2.33) поясняет происхождение второго названия рассматриваемого процесса — «абсолютно случайного процесса». Корреляционная функция типа δ-функции указывает на отсутствие корреляционной связи между любыми сколь угодно близкими друг к другу значениями случайного процесса.

Необходимо подчеркнуть, что случайный процесс типа «белого шума» является математической идеализацией реального процесса, так как физически такой процесс реализовать нельзя. Дисперсия этого процесса, как это следует из формулы (2.31), будет бесконечно большой. Следовательно, и мощность, необходимая для создания такого процесса, также бесконечна. Несмотря на это, в тех задачах, где спектр случайного воздействия значительно превосходит полосу пропускания частот исследуемой системы, с успехом можно заменить реальный спектр «белым шумом». Если же указанное соотношение между спектрами воздействия и системы не выполняется, то нужный спектр воздействия можно получить, пропуская «белый шум» через формирующий фильтр.

Перейдем теперь к анализу реакции линейных стационарных систем на возмущения типа случайных стационарных функций. Указанную реакцию можно определить, используя выражение как для корреляционной функции, так и для спектральной плотности случайного возмущения. Соответствующие формулы здесь приводятся без доказательств.*

Стационарные линейные системы описываются уравнением вида (2.1). Если входная или возмущающая величина $x(t)$ есть единичная функция, то выходная величина или реакция системы $y(t)$ называется переходной функцией и обозначается $H(t)$. Если же входная величина $x(t)$ есть δ-функция, то реакция системы $y(t)$ называется импульсной переходной функцией или весовой функцией и обозначается $K(t)$. Функции $H(t)$ и $K(t)$ связаны между собой соотношением

$$K(t) = \frac{dH(t)}{dt}. \tag{2.34}$$

В случае воздействия на вход системы произвольной функции

---

* В. С. Пугачев, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, 1961;

Дж. Х. Лэнинг, Р. Г. Бэттин, Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, 1958;

В. В. Солодовников, Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, 1960.

времени $x(t)$ реакция $y(t)$ стационарной системы определяется интегралом свертки (интеграл Дюамеля)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau. \qquad (2.35)$$

Нижний предел в (2.35) указывает, что в общем случае сигнал $x(t)$ может начать действовать на систему при $t=-\infty$. Верхний предел указывает, что реакция системы обусловлена только теми значениями $x(t)$, для которых $\tau\leqslant t$. Он может быть заменен на бесконечность, если это удобно, так как для любых реальных систем $K(t-\tau)=0$ при $\tau>t$.

Для дальнейшего более удобна форма интеграла свертки, получаемая из (2.35) путем замены переменных (с соответствующим изменением пределов):

$$y(t)=\int_{0}^{\infty} K(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau. \qquad (2.36)$$

Выражение (2.36) поясняет термин «весовая функция». Действительно, $y(t)$ в момент $t$ есть взвешенная сумма (или интеграл) от значений $x(t)$, имевших место $\tau$ секундами раньше момента $t$.

Если на вход стационарной линейной системы действует случайная стационарная функция $x(t)$, корреляционная функция которой есть $R_y(\tau)$, то корреляционная функция выходной величины $R_y(\tau)$ определяется выражением

$$R_y(\tau)=\int_{0}^{\infty} K(\tau_1)\,d\tau_1\int_{0}^{\infty} K(\tau_2)\,R_x(\tau-\tau_2+\tau_1)\,d\tau_2. \qquad (2.37)$$

В соответствии с (2.28) из (2.37) при $\tau=0$ получим дисперсию выходной величины системы

$$\overline{y^2}(t)=\sigma_y^2=\int_{0}^{\infty} K(\tau_1)\,d\tau_1\int_{0}^{\infty} K(\tau_2)\,R_x(\tau_1-\tau_2)\,d\tau_2. \qquad (2.38)$$

Если входная функция $x(t)$ начинает действовать на систему при $t\geqslant 0$, т. е. нижний предел в (2.35) будет нулем, то верхний предел в (2.36), (2.37) и (2.38) может быть заменен на $t$. Сохранение бесконечности в качестве верхнего предела при указанных условиях может быть допущено, так как на результаты вычисления это не повлияет.

Более простой вид имеет формула связи между спектральными плотностями входного возмущения $S_x(\omega)$ и выходной величины $S_y(\omega)$:

$$S_y(\omega) = \Phi_y(j\omega)\Phi_y(-j\omega)S_x(\omega) = |\Phi_y(j\omega)|^2 S_x(\omega), \tag{2.39}$$

где $\Phi_y(j\omega)$ — комплексная передаточная замкнутая функция системы, на которую действует случайное возмущение $x(t)$.

Если система не имеет обратной связи (разомкнута или отсутствует вообще), то в соотношении (2.39) вместо $\Phi_y(j\omega)$ подставляется передаточная функция системы без обратной связи, обозначаемая как $W(j\omega)$ [см. формулу (2.4)].

На основании уравнений (2.39) и (2.31) дисперсия выходной величины равна

$$\sigma_y^2 = \int_0^\infty |\Phi_y(j\omega)|^2 S_x(\omega)\,d\omega. \tag{2.40}$$

Расчеты, связанные с определением дисперсии по формулам (2.38) или (2.40), довольно трудоемки. Затраты времени значительно возрастают, если необходимо определять дисперсию по различным вариантам параметров исследуемой системы. Поэтому представляет интерес описание методики определения дисперсии в стационарных линейных системах на аналоговых вычислительных машинах (моделирование).

Моделированием принято называть такой способ изучения каких-либо явлений, при котором реальная система заменяется более простой по выполнению системой (моделью) и некоторые явления в ней подчиняются тем же аналитическим зависимостям, что и в реальной системе. Обычно в качестве моделей используют стандартные электронные или электромеханические вычислительные машины — интеграторы. Эти машины представляют собой набор блоков, в которых выполняются операции сложения, вычитания, умножения, деления, а также интегрирования и дифференцирования. Специальные блоки служат для воспроизведения величин, изменяющихся во времени по заданному закону, а также различных нелинейных характеристик.

Моделирование систем управления снарядами может быть чисто математическим или смешанным, когда одна часть системы моделируется, а другая — берется реальной. При чисто математическом моделировании все элементы системы управления и связи между ними заменяются математическими соотношениями. При этом могут быть учтены как нелинейные характеристики отдельных элементов системы, так и зависимость некоторых параметров ее от времени. Полученные математические соотношения, представляющие обычно систему интегро-дифференциальных уравне-

ний, воспроизводятся набором соответствующих блоков интегратора, а затем исследуется поведение системы управления при различных начальных условиях и внешних воздействиях. По желанию оператора может быть просмотрен на осциллографе или зарегистрирован характер изменения любой координаты рассматриваемой системы.

Математические основы использования аналоговых машин для определения дисперсии любой выходной величины исследуемой динамической системы вытекают из сопоставления выражения (2.40) с формулой Парсеваля, называемой иногда теоремой Релея:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |\Phi_y(j\omega)|^2\,d\omega, \tag{2.41}$$

где $y(t)$ и $\Phi_y(t)$ должны быть связаны между собой преобразованием Фурье.

Поскольку спектральная плотность является действительной, четной и неотрицательной функцией $\omega$, то она всегда может быть аппроксимирована дробно-рациональной функцией с действительными коэффициентами, содержащей только четные степени $\omega$. Следовательно, спектральную плотность входной величины можно представить в форме

$$S_x(\omega) = \sigma_x^2\,|W_x(j\omega)|^2, \tag{2.42}$$

где $W_x(j\omega)$ — передаточная функция звена, служащего для получения изображения спектральной плотности в области оригиналов.[1] Подставляя (2.42) в (2.40), получим следующее выражение для дисперсии:

$$\sigma_y^2 = \int_{0}^{\infty} |\Phi_y(j\omega)|^2\,\sigma_x^2\,|W_x(j\omega)|^2\,d\omega. \tag{2.43}$$

Применяя к уравнению (2.43) формулу Парсеваля, устанавливаем связь между искомой дисперсией выходной величины системы и интегральной квадратичной оценкой функции $y(t)$:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \left|\sigma_x \sqrt{\pi}\, W_x(j\omega)\,\Phi_y(j\omega)\right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)\,dt. \tag{2.44}$$

Соотношение (2.44) показывает, что $y(t)$ есть импульсная пе-

[1] Это звено иногда называют формирующим фильтром.

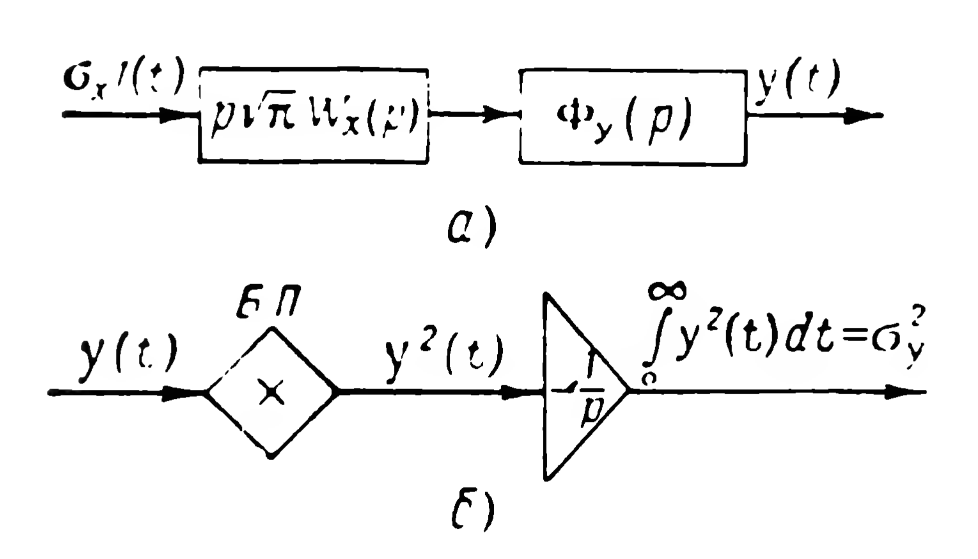
реходная функция системы, передаточная функция которой определяется выражением

$$W'_y(p) = \sigma_x \sqrt{\pi}\, W_x(p)\, \Phi_y(p). \qquad (2.45)$$

При моделировании на аналоговых машинах удобнее в качестве возмущения использовать не δ-функцию, а единичную функцию. На основе (2.34) можно утверждать, что $y(t)$ будет переходной функцией системы, передаточная функция которой получается из формулы (2.45) умножением на $p$, т. е.

$$W_y(p) = \sigma_x \sqrt{\pi}\, p W_x(p)\, \Phi_y(p). \qquad (2.46)$$

Структурная схема моделирования $y(t)$ приведена на фиг. 2.19, *а*. Для получения дисперсии $\sigma_y^2$, как это следует из выражения (2.44), достаточно $y(t)$ возвести в квадрат и проинтегрировать. Соответствующая схема из блока перемножения (БП) и интегратора приведена на фиг. 2.19, *б*.




Фиг. 2.19. Структурная схема моделирования системы при случайном входном сигнале.

*а* — схема для получения выходной величины, *б* — схема возведения в квадрат и интегрирования.

В заключение необходимо остановиться на методике моделирования систем, передаточные функции которых содержат нули. К таким передаточным функциям относится, как правило, функция исследуемой системы $\Phi_y(p)$, а иногда и функция формирующего фильтра $W_x(p)$. Как известно, наличие нулей у передаточной функции системы, на вход которой подается единичная функция, связано с появлением δ-функции и ее производных в правой части дифференциального уравнения системы. Решение уравнений подобного типа на аналоговых машинах обычно сводят к решению однородных уравнений с ненулевыми начальными условиями. Неудобство указанного метода состоит в том, что при варьировании параметров системы будут изменяться коэффициенты уравнения, а следовательно, и начальные условия, так как они связаны рекуррентными соотношениями с коэффициентами. При большом числе нулей вычисление и ввод начальных условий становится трудоемкой задачей. Ниже обосновывается метод моделирования, лишенный указанного недостатка.

Пусть исследуемая динамическая система описывается неоднородным дифференциальным уравнением, записанным в символической форме

$$(p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0)\, y(t) = $$
$$= (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0)\, x(t),$$

причем $n > m$.

Разделив левую и правую части этого уравнения на характеристический полином, получим

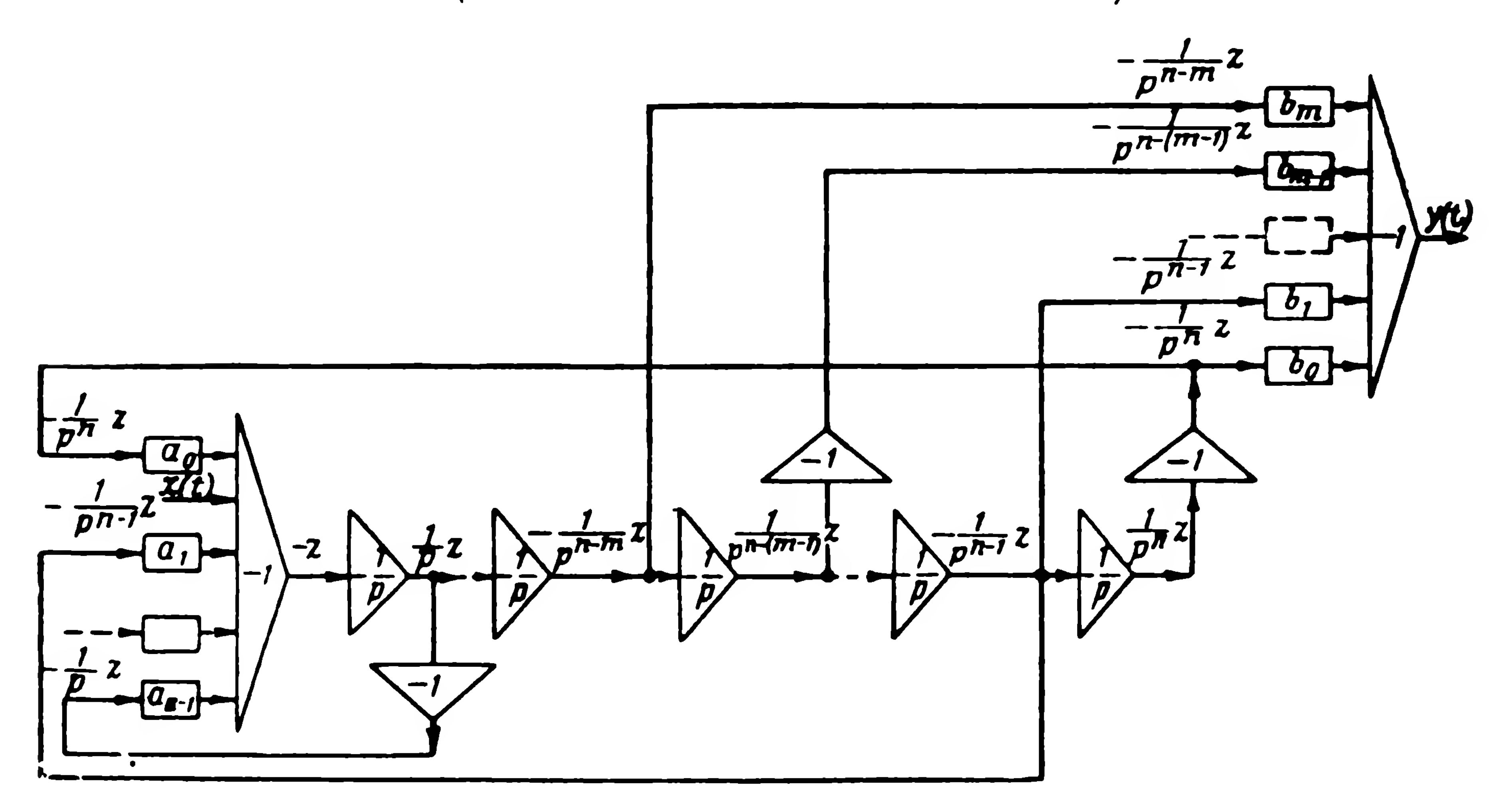
$$y(t) = \left( b_m \frac{1}{p^{n-m}} + b_{m-1} \frac{1}{p^{n-m+1}} + \ldots + b_1 \frac{1}{p^{n-1}} + b_0 \frac{1}{p^n} \right) z(t), \quad (2.47)$$

где $z(t)$ — вспомогательная функция, определяемая выражением

$$z(t) = \frac{p^n x(t)}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}$$

или

$$z(t) = x(t) - \left( a_{n-1} \frac{1}{p} + \ldots + a_1 \frac{1}{p^{n-1}} + a_0 \frac{1}{p^n} \right) z(t). \quad (2.48)$$



Фиг. 2.20. Структурная схема моделирования системы, передаточная функция которой содержит нули.

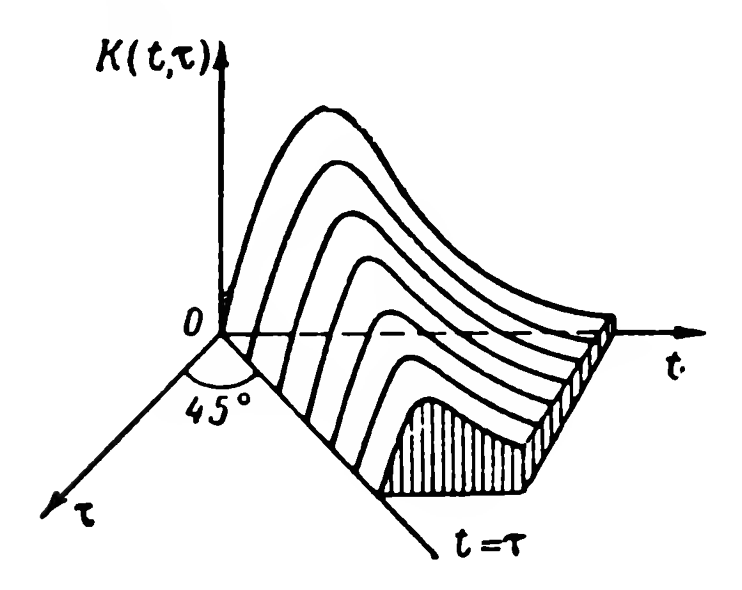
Уравнение (2.48) используется для составления структурной схемы, на выходе которой получается вспомогательная функция $z(t)$. Затем на основании формулы (2.47) составляется общая структурная схема для получения выходной величины системы $y(t)$. Эта схема представлена на фиг. 2.20. Описанный метод позволяет моделировать системы, передаточные функции которых содержат нули, без введения ненулевых начальных условий.

## 2. Нестационарные случайные процессы

Рассмотрим общее выражение для выходной величины нестационарной линейной системы, находящейся под нестационарным случайным воздействием. Для любого воздействия

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau, \qquad (2.49)$$

где входную величину $x(t)$ можно определить в интервале $-\infty \leqslant t \leqslant \infty$. Выходная величина может быть любой интересующей нас координатой управляемого снаряда, в частности, одной из координат центра тяжести, по которой можно оценить промах снаряда.




Фиг. 2.21. Кривые импульсной переходной функции нестационарной системы.

Необходимо подчеркнуть отличие формулы (2.49) для нестационарных систем от формулы (2.35) для стационарных систем. В случае стационарных систем импульсная переходная функция зависит только от разности между текущим временем $t$ и моментом $\tau$, в который к системе прикладывается $\delta$-функция. Очевидно, что в нестационарной системе импульсная переходная функция является функцией не разности $(t-\tau)$, а обеих этих переменных, так как в такой системе характер реакции системы зависит от времени приложения к системе $\delta$-функции. Импульсную переходную функцию $K(t, \tau)$ можно изобразить в виде поверхности в прямоугольной системе координат $t$, $\tau$ (фиг. 2.21). Так как в реальных системах выходной сигнал не может появиться раньше входного, то справедливо тождество

$$K(t, \tau) \equiv 0 \quad \text{при } t < \tau.$$

Если $x(t)$ есть случайная функция времени, то математическое ожидание выходной величины определяется выражением

$$\overline{y(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, \tau)\, \overline{x(\tau)}\, d\tau, \qquad (2.50)$$

где $\overline{x(t)}$ — математическое ожидание входной возмущающей функции.

Корреляционная функция выходной величины $R_y(t_1, t_2)$ по

известной корреляционной функции входной величины $R_x(t_1, t_2)$ может быть подсчитана по формуле *

$$R_y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{t_1} K(t_1, \tau_1)\, d\tau_1 \int_{-\infty}^{t_1} K(t_2, \tau_2) R_x(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2. \qquad (2.51)$$

Для получения дисперсии выходной величины достаточно в уравнении (2.51) принять $t_1 = t_2 = t$:

$$\sigma_y^2(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t, \tau_1)\, d\tau_1 \int_{-\infty}^{t} K(t, \tau_2) R_x(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2. \qquad (2.52)$$

Формулы (2.50)—(2.52) относятся к случаю, когда на систему действует один входной сигнал. Для систем управления снарядом представляет интерес определить выходную величину (например, промах) при действии одновременно большого числа входных величин — случайных и неслучайных.

Если на нестационарную линейную систему действует $n$ входных сигналов $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, то выходная величина на основании принципа суперпозиции, приложимого к линейным системам, будет определяться выражением

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{t} K_k(t, \tau)\, x_k(\tau)\, d\tau.$$

Корреляционная функция выходной величины $R_y(t_1, t_2)$ по известным корреляционным $R_{xk}(t_1, t_2)$ и взаимным корреляционным $R_{xjk}(t_1, t_2)$ функциям входных величин может быть определена по формуле

$$R_y(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{t_1} K_j(t_1, \tau_1)\, d\tau_1 \int_{-\infty}^{t_2} K_k(t_2, \tau_2) R_{xk}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2. \qquad (2.53)$$

Если все $n$ входных функций статистически независимы и имеют нулевые математические ожидания, то в (2.53) члены с разными индексами ($j \neq к$) будут равны нулю:

$$R_y(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{t_1} K_k(t_1, \tau_1)\, d\tau_1 \int_{-\infty}^{t_2} K_k(t_2, \tau_2) R_{xk}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2. \qquad (2.54)$$

* Формула (2.51) в принципе аналогична формуле (2.37) для стационарных систем.

Положив в (2. 54) $t_1=t_2=t$, получим дисперсию для частного случая статистической независимости возмущающих систему воздействий:

$$\sigma_y^2(t) = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{t} K_k(t, \tau_1)\, d\tau_1 \int_{-\infty}^{t} K_k(t, \tau_2) R_{xk}(\tau_1, \tau_2)\, d\tau \qquad (2.55)$$

или

$$\sigma_y^2(t) = \sigma_{y_1}^2(t) + \sigma_{y_2}^2(t) + \ldots + \sigma_{y_n}^2(t). \qquad (2.56)$$

Выражение (2. 56) показывает, что в этом частном случае дисперсия выходной величины равна сумме дисперсий, обусловленных каждым входным воздействием в отдельности.

Рассмотрим, наконец, случай, когда на нестационарную систему, имеющую ненулевые, но случайные начальные условия, в момент $t=0$ начинает действовать случайная возмущающая функция $x(t)$. Корреляционная функция для выходной величины в этом случае определяется выражением

$$R_y(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} u_j(t_1)\, u_k(t_2)\, \overline{c_j c_k} + \sum_{j=1}^{n} u_j(t_1) \int_0^{t_2} K(t_2, \tau)\, \overline{c_j x(\tau)}\, d\tau +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} u_j(t_2) \int_0^{t_1} K(t_1, \tau)\, \overline{c_j x(\tau)}\, d\tau +$$

$$+ \int_0^{t_1} K(t_1, \tau_1)\, d\tau_1 \int_0^{t_2} K(t_2, \tau_2) R_x(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2, \qquad (2.57)$$

где $u_j(t)$ — выходная функция системы, обусловленная $j$-м ненулевым начальным условием, равным единице, при равных нулю остальных начальных условиях;

$c_j$ — случайное значение $j$-го начального условия.

Усреднение в (2. 57) производится по множеству возможных комбинаций начальных условий. В частном случае, когда начальные условия статистически независимы, а также не зависят от возмущающей функции и имеют нулевые средние значения, выражение для дисперсии выходной величины имеет вид

$$\sigma_y^2(t) = \sum_{k=1}^{n} (\bar{c}_k)^2 u_k^2(t) + \int_0^{t} K(t, \tau_1)\, d\tau_1 \int_0^{t} K(t, \tau_2) R_x(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_2. \qquad (2.58)$$

Приведенные выше формулы для анализа нестационарных линейных систем, на которые действуют случайные возмущения, чрезвычайно сложны и практически не дают возможности аналитически исследовать эти системы. Поэтому указанные формулы обычно используются для обоснования той или иной методики статистических испытаний на машинах-аналогах или на электронных цифровых машинах *. Один из методов моделирования таких систем заключается в следующем. На модель системы поочередно подается значительное число реализаций случайных воздействий и регистрируются реализации случайного процесса изменения интересующей нас выходной величины. Обрабатывая полученное множество реализаций выходной величины, можно получить нужные вероятностные характеристики этой величины. В задаче о полете управляемого снаряда наибольший интерес, очевидно, будут представлять вероятностные характеристики (математическое ожидание, дисперсия) промаха снаряда относительно цели.

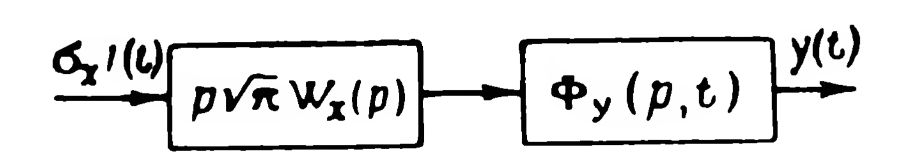



Рис. 2.22. Структурная схема моделирования нестационарной системы.

Описанный метод изучения воздействия случайных возмущений на нестационарные системы обладает рядом несомненных достоинств. Он может применяться для систем любого класса, в том числе и нелинейных, и позволяет получать очень точные данные о характеристиках исследуемой системы. Недостатком метода является необходимость иметь большое количество реализаций возмущающих воздействий и некоторая сложность ввода в моделирующую установку этих реализаций.

Рассмотрим в заключение метод моделирования для получения дисперсии нестационарной системы, на которую действует стационарное случайное возмущение.

Структурная схема системы, собираемая на машине-аналоге, приведена на фиг. 2.22. Поскольку параметры системы изменяются в функции времени, то вместо передаточной функции вводится оператор системы $\Phi_y(p, t)$. Передаточная функция является частным случаем оператора, когда система из нестационарной становится стационарной. Передаточная функция формирующего фильтра $W_x(p)$, поскольку входной сигнал является стационарным, остается дробно-рациональной функцией $p$ и определяется по спектральной плотности входного сигнала на основании (2.42). Эта передаточная функция (см. фиг. 2.22) умножена на $p$, поэтому импульсная переходная функция на выходе системы будет полу-

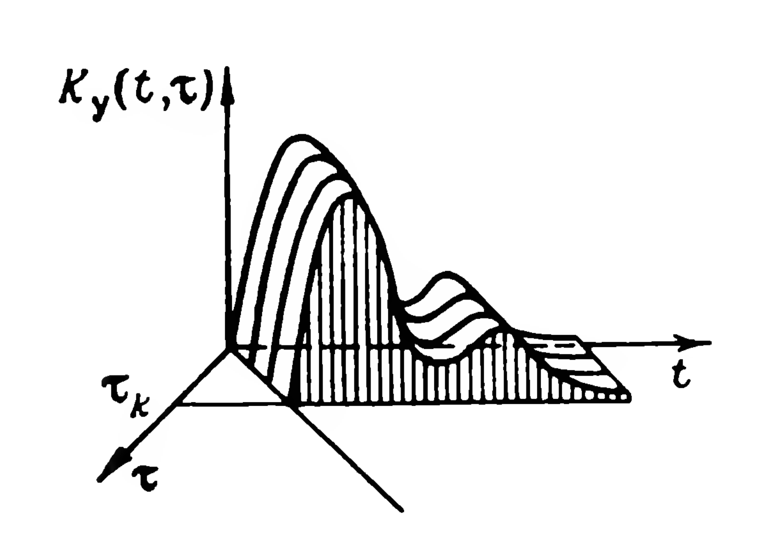
* Н. П. Бусленко, Метод статистических испытаний, Физматгиз, 1962.

чаться при подаче на вход единичной функции, а не δ-функции. Возмущение типа единичной функции более просто осуществить на машинах-аналогах.

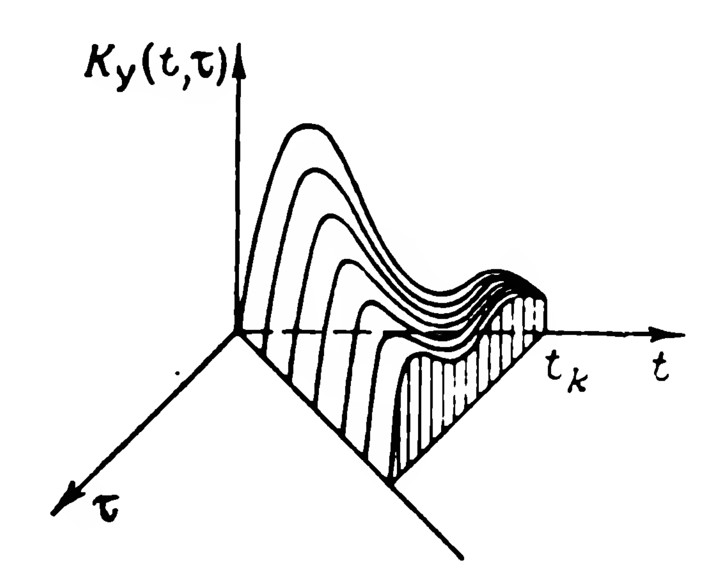
Обозначим импульсную переходную функцию для системы, состоящей из формирующего фильтра и исследуемой нестационарной системы, через $K_y(t, \tau)$. Такая импульсная переходная функция может быть в принципе определена для любой выходной величины системы $y(t)$. Дисперсия для этой выходной величины, очевидно, выражается формулой

$$\sigma_y^2(t) = \int_{-\infty}^{t} K_y^2(t, \tau)\, d\tau. \tag{2.59}$$

Для определения дисперсии $\sigma_y^2(t)$ методом численного интегрирования, необходимо получить функцию $K_y(t, \tau)$. Для этого




Фиг. 2.23. Сечение поверхности $K_y(t, \tau)$ плоскостью $\tau_k$=const.



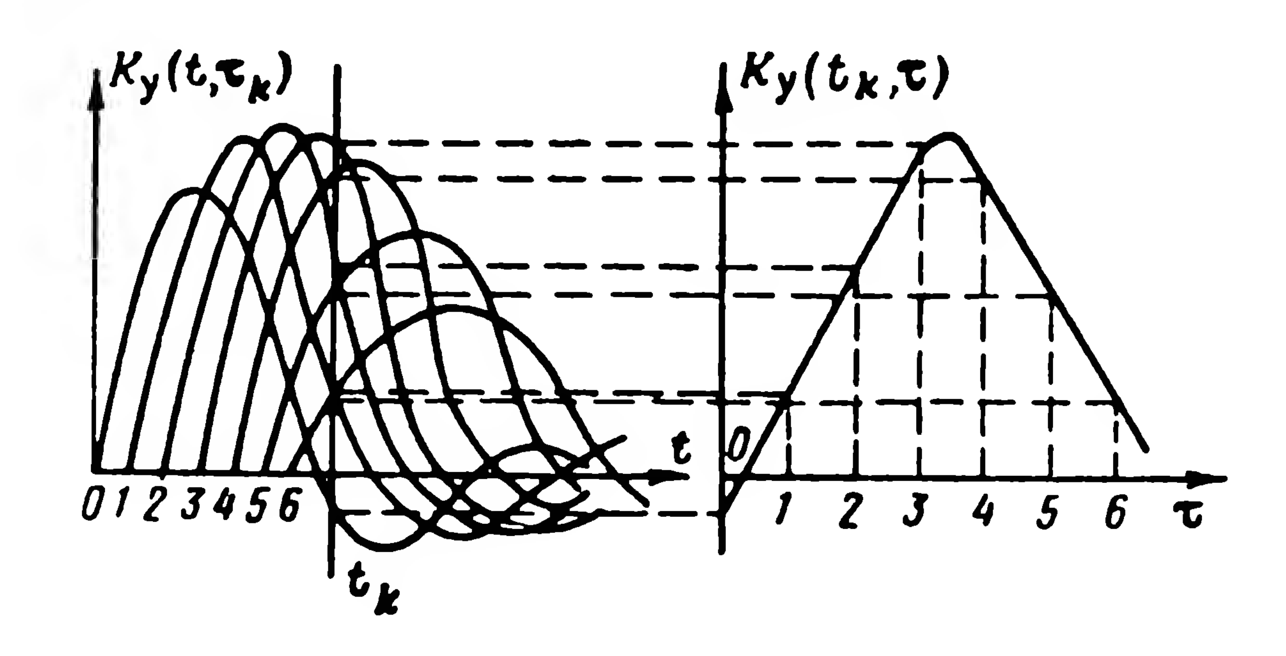

Фиг. 2.24. Сечение поверхности $K_y(t, \tau)$ плоскостью $t_k$=const.

на схему фиг. 2.22 будем подавать в разные моменты времени $\tau$ единичную функцию $\sigma_x 1(\tau)$. Физически подача единичной функции в разные моменты времени $\tau$ означает, что в соответствии с изменением времени $\tau$ меняют свое значение параметры системы $\overline{\Phi}_y(p, \tau)$. От каждого воздействия в момент $\tau_k$ единичной функцией на вход этой схемы на выходе получим реакцию, являющуюся импульсной переходной функцией $K_y(t, \tau_k)$. Такая реакция есть функция времени $t$ и момента $\tau_k$ включения единичной функции. Сказанное поясняется фиг. 2.23, где сечения поверхности $K_y(t, \tau)$ показаны вертикальными плоскостями, параллельными оси $t$. Каждому значению $\tau_k$ соответствует свое сечение и, следовательно, своя кривая $K_y(t, \tau_k)$. В соответствии с формулой (2.59) для вычисления дисперсии выходной величины при данном $t = t_k$ необходимо получить кривую $K_y(t_k, \tau)$, т. е. сечение поверхности $K_y(t, \tau)$ вертикальной плоскостью, параллельной оси $\tau$ (фиг. 2.24). Получение этой кривой графическим методом на

базе семейства кривых $K_y(t, \tau_k)$, снятых экспериментально (см. фиг. 2.22), иллюстрируется на фиг. 2.25. Полученная графическим методом функция $K_y(t_k, \tau)$ возводится в квадрат и интегрируется. Результат интегрирования в соответствии с (2.59) дает

$$\sigma_y^2(t_k) = \int_0^{t_k} K_y^2(t_k, \tau)\, d\tau. \qquad (2.60)$$

Нижний предел в интеграле (2.60) взят нулевым, так как при экспериментальных исследованиях принимается $t \geqslant 0$.




Фиг. 2.25. Графический метод получения характеристики $K_y(t_k, \tau)$.

В случае исследования системы управления снарядом обычно интересуются какой-либо координатой снаряда на определенной плоскости, в которой находится цель. В этом случае получение дисперсии выходной величины системы для определенного момента времени $t = t_k$ с помощью соотношения (2.60) будет конечной целью расчета, если выбрать за $t_k$ время пролета снаряда сквозь указанную плоскость. Если нужно определить $\sigma_y^2$ как функцию времени, то указанные расчеты необходимо повторить столько раз, сколько точек требуется получить для функции $\sigma_y(t)$.

## § 2.6. МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ АНАЛИЗА РЕЛЕЙНЫХ СИСТЕМ

В системах управления снарядами применяются релейные усилительные устройства или другие элементы, обладающие характеристиками релейного типа. Наличие в системе управления хотя бы одного такого элемента делает невозможным использование рассмотренных выше методов анализа линейных систем.

Для исследования процессов регулирования в релейных системах широко применяется метод фазовой плоскости, отличающийся достаточной хорошей наглядностью и обеспечивающий высокую точность. Существенным ограничением в использовании этого метода является то, что метод фазовой плоскости может быть использован для исследования систем, описываемых нелинейным дифференциальным уравнением не выше второго порядка. Исследование систем, описываемых уравнениями более высоких порядков, вызывает необходимость отображения протекающих в них процессов в так называемом фазовом пространстве и наглядность метода резко уменьшается.

Рассмотрим основные положения этого метода. Фазовой плоскостью называется плоскость, на которой по двум осям координат $(z, y)$ откладываются переменные, характеризующие поведение системы в переходном процессе. В качестве таких переменных удобно брать отклонение регулируемой величины $y$ и скорость изменения этого отклонения $z=dy/dt$. Пусть поведение некоторой системы описывается нелинейным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(y, \frac{dy}{dt}\right). \tag{2.61}$$

Введя обозначение $z=dy/dt$, представим это уравнение в виде двух уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f_1(y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= f_2(y, z), \end{aligned}\right\} \tag{2.62}$$

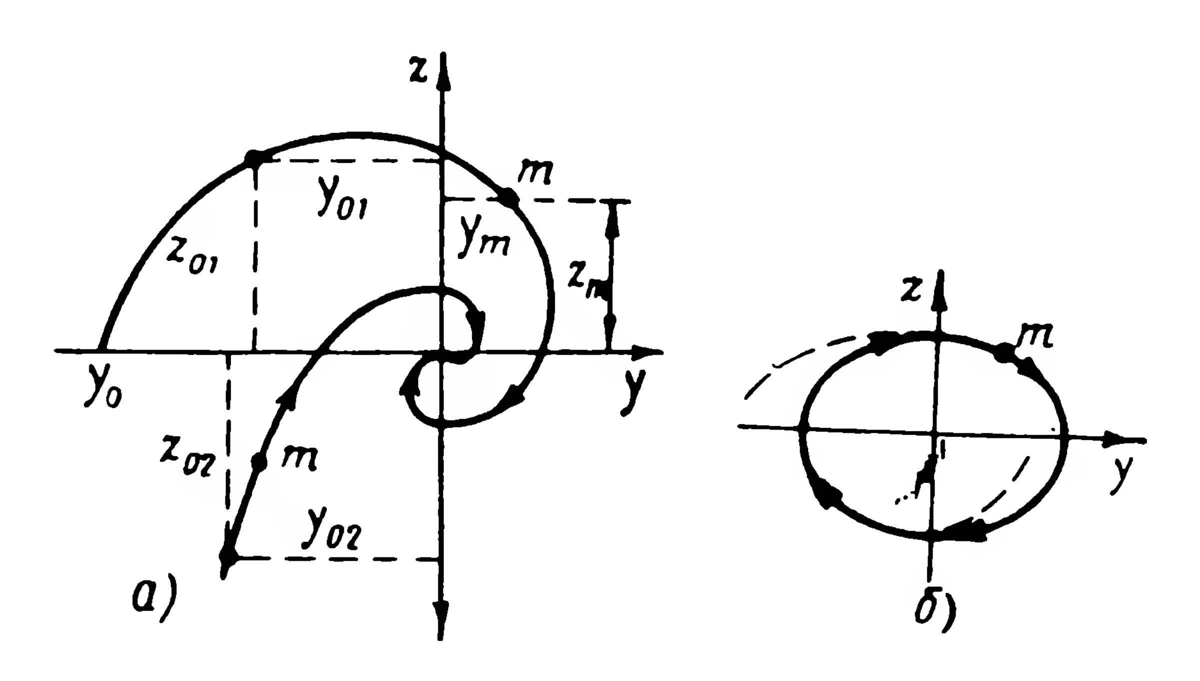
где $f_1$, $f_2$ — в общем случае нелинейные функции.

Решение уравнений (2.62) дает закон изменения во времени отклонения $y$ и его скорости $z$. Оба выражения можно рассматривать как дифференциальные уравнения в параметрической форме некоторой кривой в плоскости $y$, $z$, где параметром является время $t$. Деля формулы (2.62) почленно друг на друга (исключая параметр $t$), получим дифференциальное уравнение этой кривой на фазовой плоскости

$$\frac{dz}{dy} = \frac{f_2(y, z)}{f_1(y, z)}. \tag{2.63}$$

Проинтегрировав уравнение (2.63), получим уравнение интегральной кривой $z=F(y, c)$ на фазовой плоскости. Кривая $z= =F(y, c)$ называется фазовой кривой или фазовой траекторией движения системы, где $c$ — постоянная интегрирования, опреде-

ляемая из начальных условий. Возможный вид фазовой траектории приведен на фиг. 2.26. Некоторая точка $m$ на фазовой плоскости с координатами $y_m$, $z_m$, называемая изображающей, характеризует состояние системы в данный момент. Переходный процесс в системе (ликвидация отклонения $y$) будет характеризоваться движением точки $m$, которая по мере протекания переходного процесса в системе описывает кривую — фазовую траекторию (см. фиг. 2.26, *а*). Бесчисленное множество начальных условий определяет бесчисленное количество фазовых траекторий.



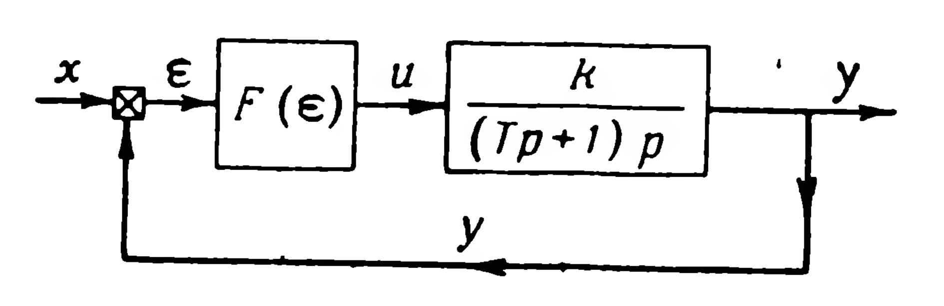

Фиг. 2.26. Фазовые траектории.
*а* — затухающих колебаний, *б* — автоколебаний.

Поскольку при определенных начальных условиях дифференциальные уравнения имеют единственное решение, изображающая точка будет двигаться по вполне определенной траектории и при отсутствии внешних сил не может перейти на другую траекторию.

В устойчивой системе, независимо от того, описывается ли ее поведение линейными или нелинейными уравнениями, переходный процесс затухает и при $t \to \infty$ $y \to 0$ и $z \to 0$. Это означает, что в устойчивой системе изображающая точка по фазовой траектории всегда будет двигаться к началу координат. На фиг. 2. 26, *а* приведены фазовые траектории устойчивой системы.

Если переходный процесс колебательно-затухающий, то изображающая точка будет приближаться к началу координат по спирали, так как величины отклонения и скорости, изменяя знаки, уменьшаются по абсолютному значению. Если в системе возможны незатухающие колебания, т. е. уравнение системы имеет периодическое решение, то изображающая точка будет непрерывно двигаться по некоторой замкнутой кривой — замкнутому циклу (фиг. 2.26, *б*), так как значения отклонений и скорости повторяются через период. Время одного оборота изображающей точки, очевидно, будет равно периоду автоколебаний. В неустойчивой системе изображающая точка уходит от начала координат, т. е. отклонение и скорость нарастают беспредельно.

После изложения этих общих положений проанализируем процессы регулирования в конкретных системах методом фазовой плоскости. Рассмотрим нелинейную (релейную) систему со структурной схемой, приведенной на фиг. 2.27. Такую схему имеет, в частности, следящая система с релейным усилителем, система стабилизации угла крена снаряда с релейным управлением и ряд других систем.




Фиг. 2.27. Структурная схема системы с передаточной функцией линейной части (2.64).

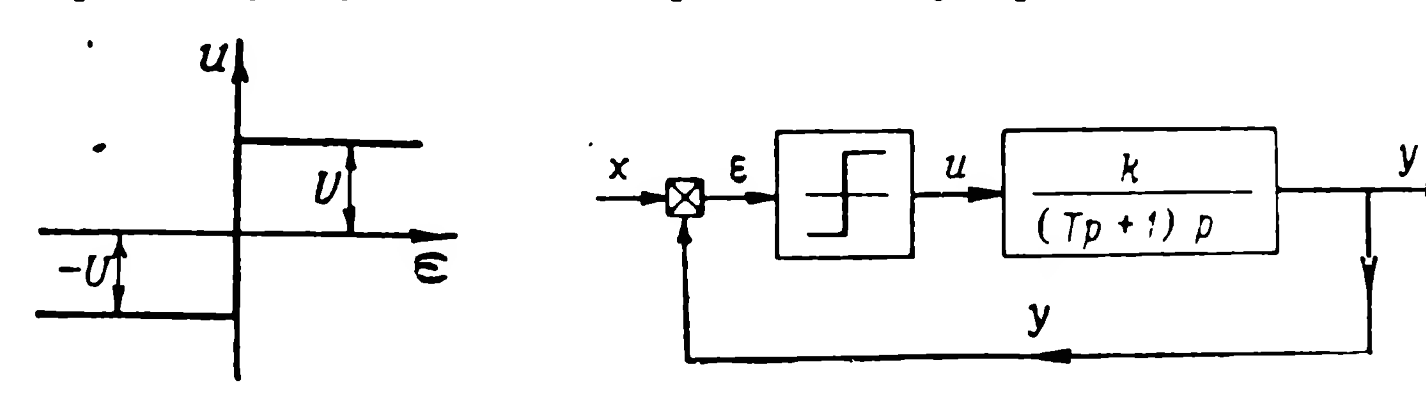
На фиг. 2.27 через $F(\varepsilon)$ обозначены характеристики нелинейного (релейного) элемента, сигнал с которого воздействует на линейную часть системы с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{(Tp+1)p}, \tag{2.64}$$

где $T$ и $k$ — постоянная времени и коэффициент усиления системы.

## 1. Анализ простейшей релейной следящей системы с идеальными характеристиками

Рассмотрим процессы в системе, содержащей нелинейный элемент с идеализированной характеристикой (фиг. 2.28). Такую характеристику будет иметь релейное устройство, если его чувствительность очень велика. Кроме того, пренебрежем запаздыванием в срабатывании реле. Структурная схема системы с подобной характеристикой представлена на фиг. 2.29.




Фиг. 2.28. Идеализированная релейная характеристика.

Фиг. 2.29. Структурная схема системы с релейной характеристикой (см. фиг. 2.28).

Запишем уравнения движения системы и проанализируем процесс отработки входной величины $x$. Уравнение линейной части системы имеет вид

$$T\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = ku. \tag{2.65}$$

Сигнал $u$, подаваемый на линейную часть системы, постоянен по величине, знак же его определяется знаком рассогласования, т. е.

$$u = U \operatorname{sign} \varepsilon. \tag{2.66}$$

Это выражение является символическим обозначением скачкообразной функции, изображенной на фиг. 2. 28.

Заметим, что уравнение (2. 66) можно представить в виде

$$u = U \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}. \tag{2.67}$$

Если к уравнениям (2.65) и (2.66) добавить уравнение, определяющее рассогласование

$$\varepsilon = x - y, \tag{2.68}$$

то получим систему уравнений простейшей релейной системы.

Исключая из формул (2. 65), (2. 66) и (2. 68) $\varepsilon$ и $u$, получим связь между входной и выходной величинами следящей системы в виде нелинейного дифференциального уравнения

$$T \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - kU \operatorname{sign}(x - y) = 0. \tag{2.69}$$

Сначала рассмотрим случай $x=\text{const}$. В этом случае, не нарушая общности рассмотрения, можно считать, что $x=0$. Если при этом учесть, что $\operatorname{sign}(x-y)$ — нечетная функция, т. е. $\operatorname{sign}(-\varepsilon) = -\operatorname{sign}(\varepsilon)$, то получим уравнение системы в следующем виде:

$$T \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \omega_0 \operatorname{sign} y = 0, \tag{2.70}$$

где $\omega_0 = kU$.

Уравнение (2. 70) содержит конкретные параметры системы $T$ и $\omega_0$. Чтобы дальнейшее исследование имело общий характер, целесообразно записать его в стандартной форме.

Учитывая очевидное свойство функции $\operatorname{sign}(ay) = \operatorname{sign}(y)$, где $a$ — любое положительное число, получим

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \varkappa, \tag{2.71}$$

где $\tau = \frac{t}{T}$ — безразмерное время;

$\bar{y} = \frac{y}{T\omega_0}$ — безразмерное значение выходной величины;

$\frac{d\bar{y}}{d\tau} = \frac{1}{\omega_0}\frac{dy}{dt}$ — безразмерная скорость;

$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} = \frac{T}{\omega_0}\frac{d^2y}{dt^2}$ — безразмерное ускорение;

$\varkappa = -\operatorname{sign}\bar{y}$.

Заметим, что

$$\varkappa = 1 \text{ при } \bar{y} < 0,$$
$$\varkappa = -1 \text{ при } \bar{y} > 0.$$

Учитывая также, что $d\bar{y}/d\tau = \bar{z}$, получим взамен одного уравнения (2.71) два уравнения первого порядка

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{z}}{d\tau} + \bar{z} &= \varkappa, \\ \frac{d\bar{y}}{d\tau} &= \bar{z}, \end{aligned}\right\} \tag{2.72}$$

Исключив из (2.71) независимую переменную $\tau$, найдем уравнение, связывающее $\bar{z}$ и $\bar{y}$:

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} = \frac{\varkappa - \bar{z}}{\bar{z}}. \tag{2.73}$$

После интегрирования (2.73) при начальных значениях $\tau = 0$, $\bar{y} = \bar{y}_0$ и $\bar{z} = \bar{z}_0$ получим уравнение фазовых траекторий

$$\bar{y} = \bar{y}_0 + \bar{z}_0 - \bar{z} + \varkappa \ln\frac{\bar{z}_0 - \varkappa}{\bar{z} - \varkappa}. \tag{2.74}$$

При $\bar{y} < 0$ $\varkappa = 1$, т. е. для всей левой части фазовой плоскости будем иметь

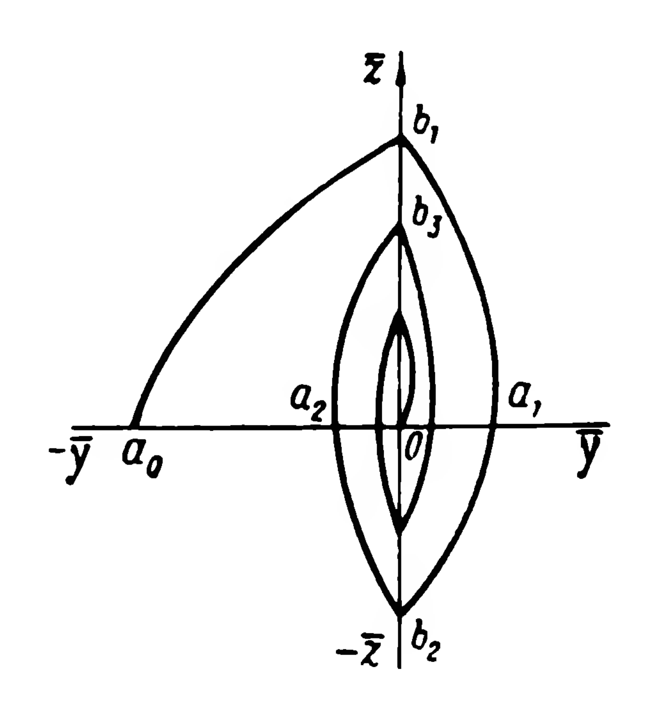
$$\bar{y} = \bar{y}_0 + \bar{z}_0 - \bar{z} + \ln\frac{1 - \bar{z}_0}{1 - \bar{z}}. \tag{2.75}$$

При $\bar{y} > 0$ $\varkappa = -1$, т. е. для всей правой части фазовой плоскости будем иметь

$$\bar{y} = \bar{y}_0 + \bar{z}_0 - \bar{z} - \ln\frac{1 + \bar{z}_0}{1 + \bar{z}}. \tag{2.76}$$

На фиг. 2.30 по уравнениям (2.75) и (2.76) построены фазовые траектории при начальных условиях $\bar{z}_0 = 0$ и $\bar{y}_0 = 0a_0$. Участок

$a_0b_1$ построен по уравнению (2.75), участок $b_1a_1b_2$ — по уравнению (2.76), участок $b_2a_2b_3$ — по (2.75). Начальные значения для второго участка $\bar{y}_0=0$, $\bar{z}_0=0b_1$, для третьего участка $\bar{y}_0=0$, $\bar{z}_0=0b_2$ и т. д. Продолжая построение фазовой траектории по участкам, можно заметить, что получается кривая, сходящаяся к началу координат. Это означает, что система устойчива и в ней имеет место колебательно-затухающий переходный процесс. Фазовая траектория процесса на оси ординат имеет изломы. Эти изломы обусловлены изменением знака управляющего сигнала $U$ на выходе релейного элемента.




Фиг. 2.30. Фазовые траектории, построенные по уравнениям (2.75) и (2.76).

Найдем зависимость выходной величины $\bar{y}$ и скорости ее изменения $\bar{z}$ от времени. Решение первого уравнения системы (2.72) при начальных условиях $\tau=0$, $\bar{z}=\bar{z}_0$ будет иметь следующий вид:

$$\bar{z}=\bar{z}_0e^{-\tau}+\varkappa(1-e^{-\tau}). \qquad (2.77)$$

Проинтегрировав полученное значение $\bar{z}$, найдем $\bar{y}$ как функцию $\tau$:

$$\bar{y}=\int\bar{z}\,d\tau+c=-\bar{z}_0e^{-\tau}+\varkappa\tau+\varkappa e^{-\tau}+c.$$

Произвольную постоянную $c$ определим из начальных условий, считая, что при $\tau=0$ $\bar{y}=\bar{y}_0$, $\bar{z}=\bar{z}_0$. В этом случае

$$c=\bar{y}_0+\bar{z}_0-\varkappa$$

и

$$\bar{y}=\bar{y}_0+\bar{z}_0(1-e^{-\tau})+\varkappa[\tau-(1-e^{-\tau})]. \qquad (2.78)$$

На основании (2.77) и (2.78) можно методом припасовывания начальных условий построить графики изменения $\bar{y}$ и $\bar{z}$ в функции времени.

Временные зависимости $\bar{z}=\bar{z}(\tau)$ и $\bar{y}=\bar{y}(\tau)$ можно получить также непосредственно по фазовому портрету движения системы. Чтобы определить время, за которое изображающая точка переместится из положения *1* (координаты $\bar{y}_1$, $\bar{z}_1$) в положение *2* (координаты $\bar{y}_2$, $\bar{z}_2$) (фиг. 2.31), сложим уравнения (2.77) и (2.78),

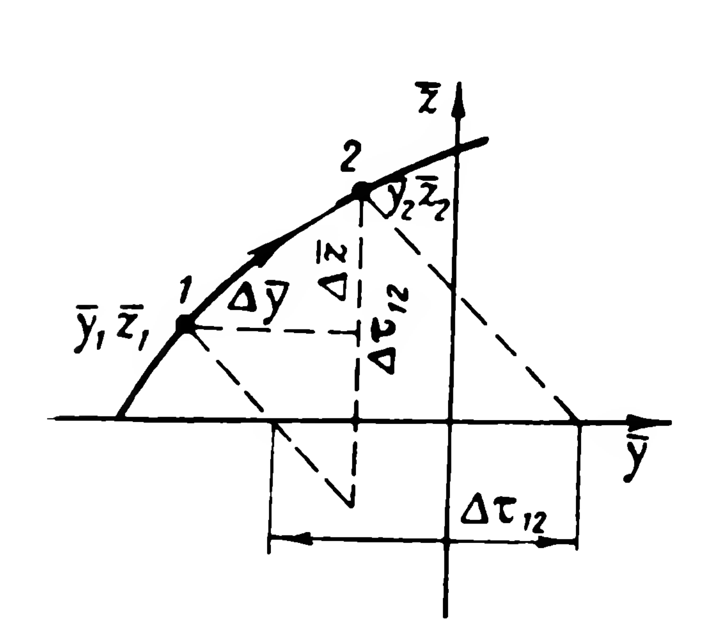
заменив соответственно $\bar{z}_0$, $\bar{y}_0$, на $\bar{z}_1$, $\bar{y}_1$ и $\bar{z}$, $\bar{y}$ на $\bar{z}_2$, $\bar{y}_2$. Тогда получим

$$\tau_2 - \tau_1 = \Delta\tau_{1,2} = \frac{1}{\varkappa}\left[\left(\bar{y}_2 - \bar{y}_1\right) + \left(\bar{z}_2 - \bar{z}_1\right)\right]$$

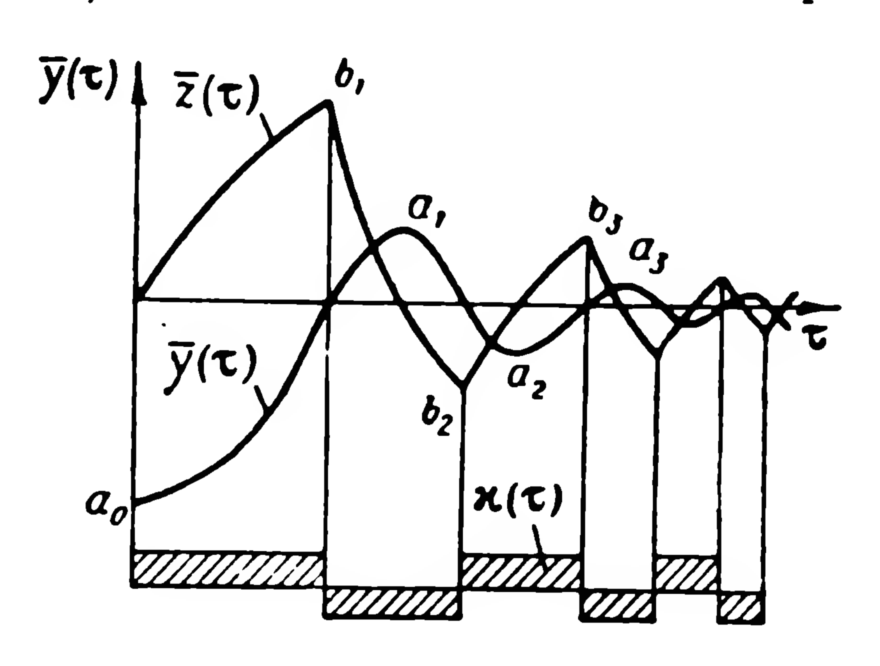
или

$$\Delta\tau_{1,2} = \frac{1}{\varkappa}\left(\Delta\bar{y} + \Delta\bar{z}\right). \tag{2.79}$$

Приращение времени $\Delta\tau_{1,2}$ равно сумме приращений координат $\Delta\bar{y}$ и $\Delta\bar{z}$. Координаты $\Delta\bar{y}$ и $\Delta\bar{z}$ должны быть взяты с соответствующими знаками. Из выражения (2.79) вытекает также способ про-




Фиг. 2.31. К определению временных зависимостей по фазовому портрету системы.



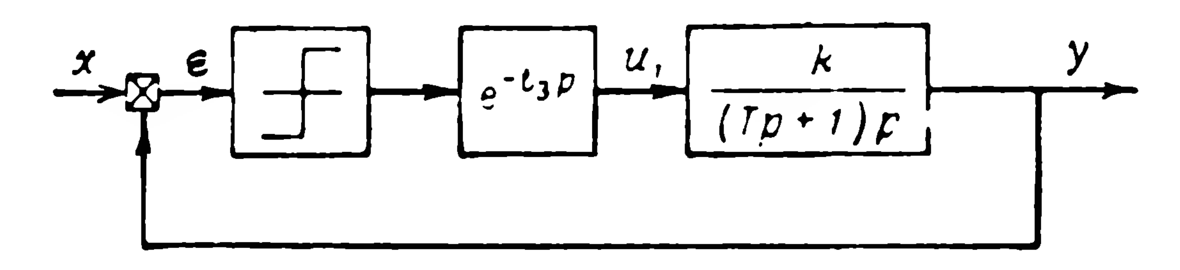

Фиг. 2.32. К переходным процессам в системе с фазовым портретом, представленным на фиг. 2.30.

стого графического определения времени, в течение которого изображающая точка переместится из положения *1* в положение *2*. Для этого достаточно провести через точки *1* и *2* (в любом квадранте) две параллельные прямые под углом 135° к оси $\bar{y}$. Эти две прямые на осях $\bar{y}$ или $\bar{z}$ отсекут отрезок, численно равный искомому времени $\Delta\tau_{1,2}$ при условии одинакового масштаба по осям $\bar{z}$ и $\bar{y}$.

На фиг. 2.32 построены графики изменения $\bar{y}$ и $\bar{z}$ в функции времени. Эти графики соответствуют фазовому портрету системы, приведенной на фиг. 2.30. На фиг. 2.32 изображен также процесс изменения $\varkappa$, т. е. процесс переключения релейного усилителя системы. Из этих графиков следует также, что частота переключения непрерывно растет, стремясь в пределе к бесконечности. Таким образом, в состоянии покоя рассматриваемая система будет характеризоваться колебаниями бесконечно большой частоты и бесконечно малой амплитуды. Этот результат объясняется допущением, сделанным выше, о возможности мгновенного срабатывания релейного элемента системы.

## 2. Процессы в релейной системе при наличии запаздывания

Реальные релейные элементы не могут воспроизводить входной сигнал бесконечно большой частоты. Для каждого релейного элемента существует некоторая предельная частота, на которой он еще может работать. Время, проходящее с момента подачи сигнала на вход релейного элемента до момента возникновения сигнала на его выходе, назовем временем запаздывания и обозначим через $t_з$. Структурная схема системы, у которой учитывается запаздывание релейного элемента, приведена на фиг. 2.33. Здесь $e^{-t_з p}$ — передаточная функция звена с постоянным запаздыванием.




Фиг. 2.33. Структурная схема системы с запаздыванием.

Аналогично предыдущему запишем уравнение движения системы в безразмерной форме

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \frac{d\bar{y}}{d\tau} + \mathrm{sign}_{\Delta\tau}(\bar{y}) = 0, \tag{2.80}$$

где $\Delta\tau = \frac{t_з}{T}$ — безразмерное время запаздывания;

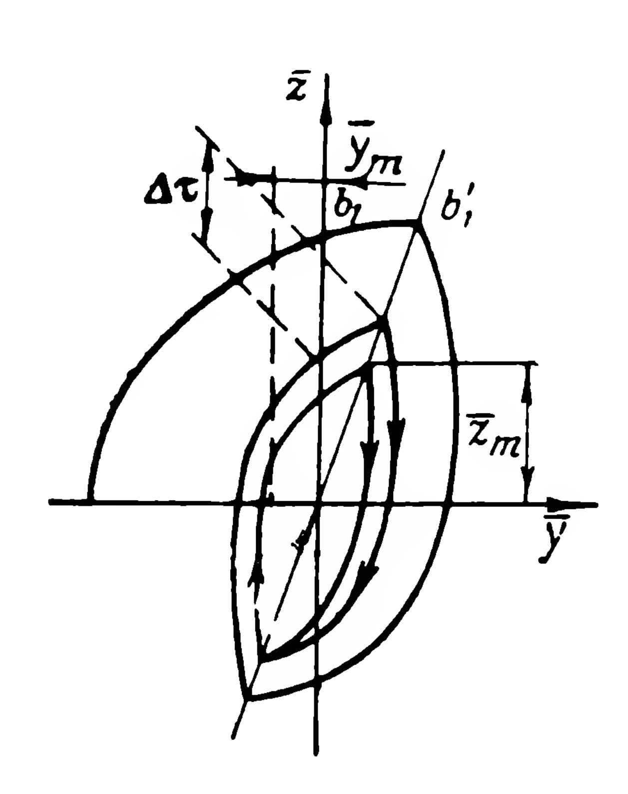
$\mathrm{sign}_{\Delta\tau}(\bar{y})$ — скачкообразная функция, аналогичная изображенной на фиг. 2.28, но запаздывающая на время $\Delta\tau$.

Обозначив $\mathrm{sign}_{\Delta\tau}(\bar{y}) = -\varkappa$ по (2.80), получим те же уравнения, что и в предыдущем случае, т. е. уравнения вида (2.72).

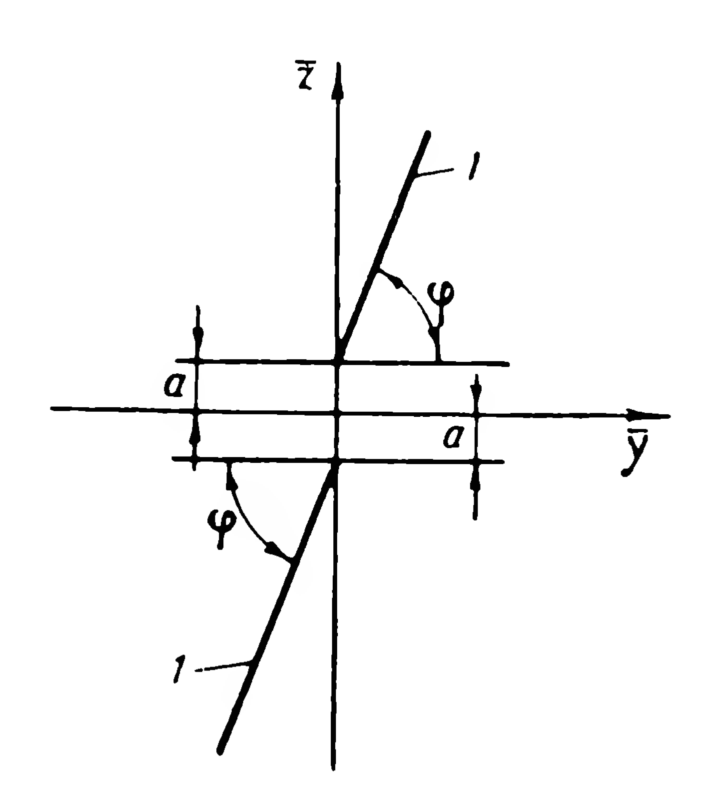
Влияние запаздывания заключается в том, что $\varkappa$ изменяется с $-1$ до $+1$ не на оси ординат, а в некоторой точке $b_1'$ (фиг. 2.34). Зная величину запаздывания, всегда можно, пользуясь изложенным выше методом (см. фиг. 2.31), определить точку переключения. Фазовая траектория, построенная с учетом запаздывания (см. фиг. 2.34), не стремится к началу координат, а сходится к некоторому циклу. Это означает, что в системе установится периодическое движение, называемое автоколебаниями. Построение на фиг. 2.34 производилось при начальном отклонении, большем амплитуды установившихся колебаний. Если взять начальное отклонение, меньшее амплитуды автоколебаний (меньше $\bar{y}_m$), то кривая фазовой траектории начнет разворачиваться и вновь установится

тот же самый цикл. При любых начальных условиях фазовая траектория будет сходиться к одному и тому же циклу, который в связи с этим называется предельным циклом.

Благодаря запаздыванию излом фазовых траекторий смещается вправо по часовой стрелке по отношению к оси ординат. Можно показать, что линия переключения (линия излома траекторий) так-




Фиг. 2.34. Фазовые траектории системы с запаздыванием.




Фиг. 2.35. Линии переключений.
Ось $z$ — линия переключений без запаздывания:
1 — линии переключения при запаздывании.

же остается прямой (фиг. 2.35) с углом наклона $\varphi$, пересекающей ось $\bar{z}$ на расстоянии $a$ от начала координат. Пользуясь способами измерения времени на фазовой плоскости, можно перейти от картины на фазовой плоскости (см. фиг. 2.34) к графикам процессов во времени. Процессы, соответствующие такой фазовой картине, приведены на фиг. 2.36. На этих графиках, а также на фазовых портретах указаны основные параметры автоколебаний:

период автоколебаний $\theta$ или частота $\frac{1}{\theta}$;

максимальное значение отклонения $\bar{y}_m$;

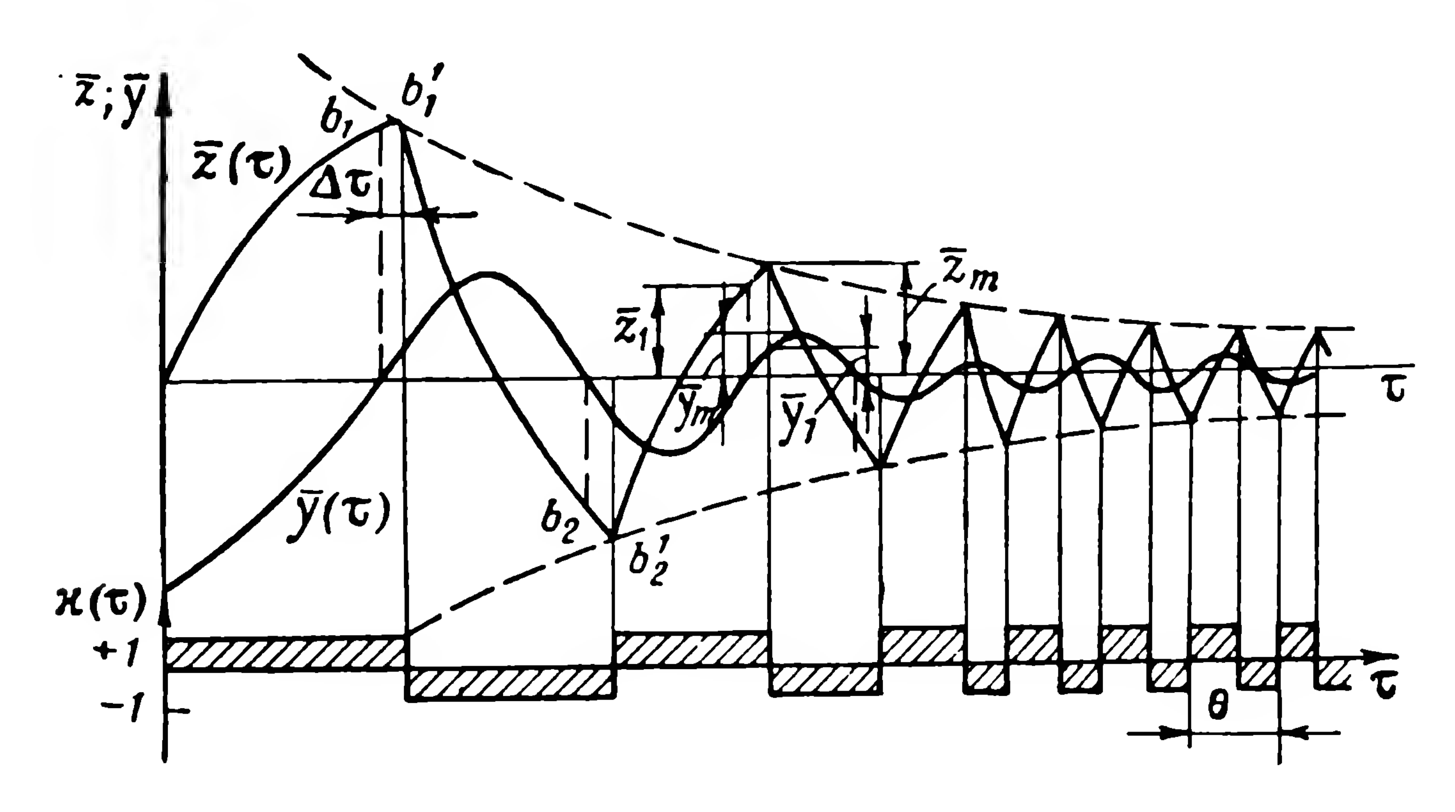
максимальное значение скорости $\bar{z}_m$;

значение скорости $\bar{z}=\bar{z}_1$ в момент, когда $\bar{y}=0$;

значение отклонения $\bar{y}=\bar{y}_1$ при $\bar{z}=\bar{z}_m$.

Цикл автоколебаний образован двумя кривыми, описанными уравнениями (2. 75) и (2. 76). В связи с этим все параметры автоколебаний однозначно связаны между собой. Достаточно знать один из них, чтобы можно было определить остальные четыре.

Для того чтобы определить параметры автоколебаний, необходимо какой-либо из параметров выразить через запаздывание. Наиболее просто выражается через запаздывание скорость $\bar{z}_1$ в момент, когда $\bar{y}=0$. При более детальном анализе процесса установ-




Фиг. 2.36. К переходным процессам автоколебательной системы.

ления автоколебаний можно получить интересующую связь между $\Delta\tau$ и $\bar{z}_1$ в следующем виде:

$$\Delta\tau = \ln \frac{1+\sqrt{1-(1-\bar{z}_1)^2 e^{2\bar{z}_1}}}{(1-\bar{z}_1)e^{2\bar{z}_1}}. \qquad (2.81)$$

Зная $\bar{z}_1$ и воспользовавшись (2.75), получим $\bar{z}_m$

$$\bar{z}_m = 1-(1-\bar{z}_1)\,e^{-\Delta\tau}. \qquad (2.82)$$

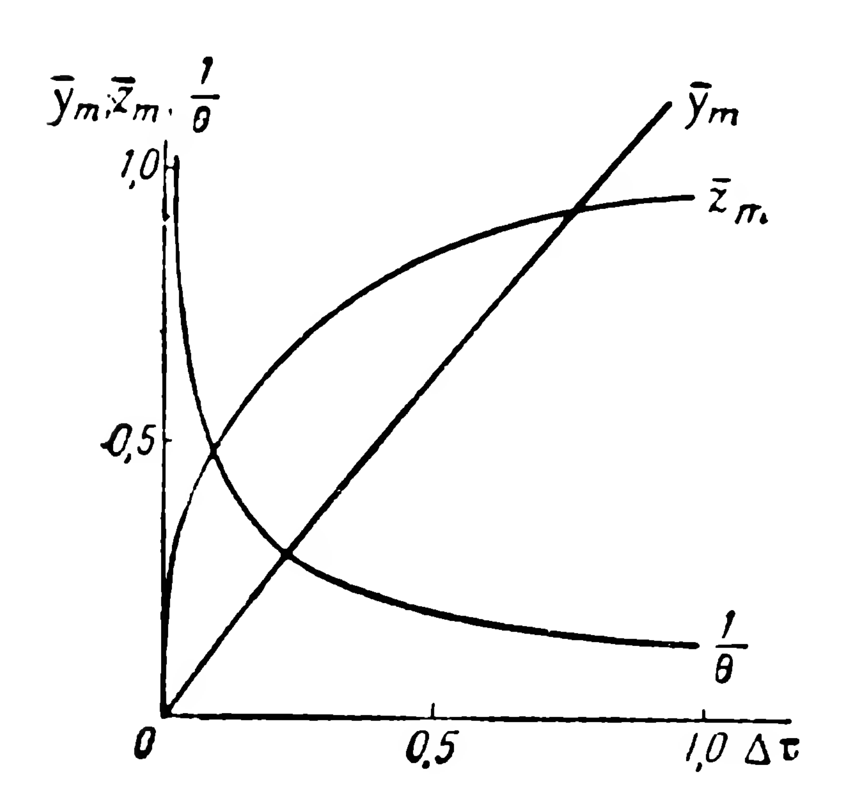
Из рассмотрения цикла автоколебаний на основании правила измерения отрезков времени на фазовой плоскости вытекает выражение для периода автоколебаний $\theta$:

$$\theta = 4(\bar{z}_1 + \Delta\tau). \qquad (2.83)$$

Амплитуду отклонения $\bar{y}_m$ найдем, воспользовавшись выражением (2.75), подставив начальные значения $\bar{y}_0=-\bar{y}_m$ и $z_0=0$ и конечные значения $\bar{y}=0$ и $\bar{z}=\bar{z}_1$:

$$\bar{y}_m = \ln\frac{1}{1-\bar{z}_1} - \bar{z}_1\,. \qquad (2.84)$$

На основании полученных формул на фиг. 2.37 построены $\bar{y}_m$, $\bar{z}_m$ и $1/\theta$ в функции запаздывания. Параметры автоколебаний были вычислены в предположении, что на фазовой плоскости образовался замкнутый цикл, которому в системе соответствуют автоколебания. Однако реально могут существовать только устойчивые автоколебания, которым на фазовой плоскости соответствует устойчивый цикл. В данном простом случае устойчивость автоколебаний с очевидностью следует из того факта, что все фазовые траектории при графическом построении сходятся к одному и тому же циклу, параметры которого однозначно определяются запаздыванием.




Фиг. 2.37. Графики $\bar{y}_m$, $\bar{z}_m$ и $1/\theta$ в функции запаздывания.

Из графиков фиг. 2.37 следует, что при небольшом запаздывании период и амплитуда оказываются малыми. В большинстве случаев можно допустить в системе наличие таких малых колебаний. Однако обычно величина запаздывания в релейных устройствах такова, что возникают автоколебания малой частоты и большой амплитуды. Системы становятся неработоспособными, поэтому необходимо принять меры к подавлению автоколебаний или к снижению их амплитуды и повышению частоты. Это можно сделать при помощи следующих методов:

— введением в систему элемента с зоной нечувствительности;

— введением корректирующих устройств — обратных связей и дифференцирующих цепей.

Рассмотрим эти методы.

## 3. Влияние зоны нечувствительности

Пусть характеристика релейного усилителя имеет вид, приведенный на фиг. 2.38. Здесь $\Delta\varepsilon$ — зона нечувствительности реле. Структурная схема системы остается прежней, изменяется лишь характеристика нелинейного элемента. Пренебрежем сначала влиянием запаздывания в релейном элементе. Уравнения системы с зоной нечувствительности можно записать в следующем виде:

$$T\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = ku;$$

$$u = F(\varepsilon); \quad \varepsilon = x - y;$$

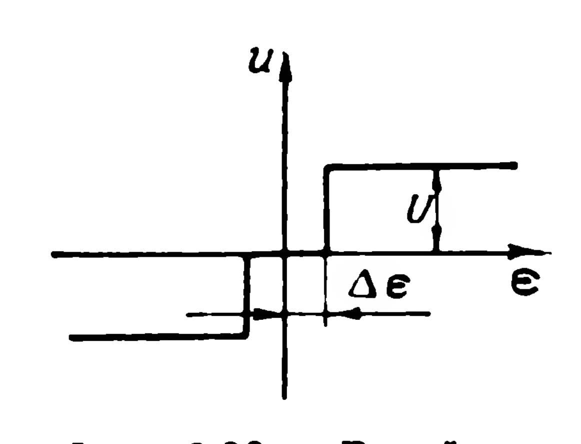
$$u = U \text{ при } \varepsilon > \Delta\varepsilon;$$
$$u = -U \text{ при } \varepsilon < -\Delta\varepsilon; \qquad (2.85)$$
$$u = 0 \text{ при } -\Delta\varepsilon < \varepsilon < \Delta\varepsilon.$$

Для случая $x=0$ уравнение системы будет иметь вид, аналогичный уравнению (2.71):

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \frac{d\bar{y}}{d\tau} + F(\bar{y}) = 0. \qquad (2.86)$$

Функция $F(\bar{y})$ имеет следующие свойства:

$$\left.\begin{aligned} F(\bar{y}) &= 1 \quad \text{при} \quad \bar{y} < -\eta, \\ F(\bar{y}) &= 0 \quad \text{при} \quad -\eta < \bar{y} < \eta, \\ F(\bar{y}) &= -1 \quad \text{при} \quad y > \eta, \end{aligned}\right\} \qquad (2.87)$$



Фиг. 2.38. Релейная характеристика с зоной нечувствительности.

где $\eta = \frac{\Delta\varepsilon}{T\omega_0} = \frac{\Delta\bar{y}}{T\omega_0}$ — безразмерное значение зоны нечувствительности $\Delta\varepsilon$, равной в данном случае $\Delta\bar{y}$.

Вне зоны нечувствительности по-прежнему обозначим $F(\bar{y}) = \varkappa$. Тогда для областей, где $|\bar{y}| > |\eta|$, будем иметь

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \frac{d\bar{y}}{d\tau} = \varkappa. \qquad (2.88)$$

Для зоны нечувствительности $|\bar{y}| < |\eta|$ получим

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \frac{d\bar{y}}{d\tau} = 0. \qquad (2.89)$$

Решение уравнения (2.88) было уже получено и все результаты будут справедливы и в данном случае, но только в области $|\bar{y}| > |\eta|$. Осталось рассмотреть поведение системы в зоне нечувствительности, т. е. проанализировать решение уравнения (2.89). Так как $\frac{d\bar{y}}{d\tau} = \bar{z}$, то уравнение (2.89) можно записать в форме

$$\frac{d\bar{z}}{d\tau} + \bar{z} = 0; \qquad (2.90)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \bar{z}. \qquad (2.91)$$

Интеграл уравнения (2.90) имеет вид

$$\bar{z} = \bar{z}_0 e^{-\tau}, \tag{2.92}$$

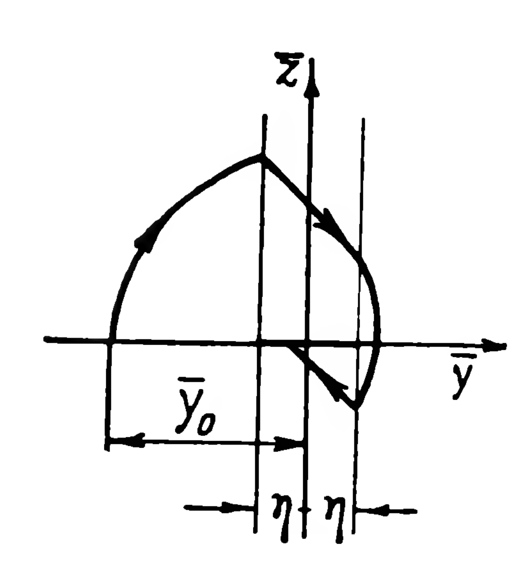
и, следовательно,

$$\bar{y} = \bar{y}_0 + \bar{z}_0 (1 - e^{-\tau}). \tag{2.93}$$

Выражение (2.93) показывает, что в этом случае не только $\bar{z}$, но и $\bar{y}$ является экспоненциальной функцией времени.

Для того чтобы выяснить характер фазовых кривых в зоне нечувствительности, исключим время $\tau$ из уравнений (2.92) и (2.93), после чего получим

$$\bar{z} = \bar{y}_0 + \bar{z}_0 - \bar{y}. \tag{2.94}$$



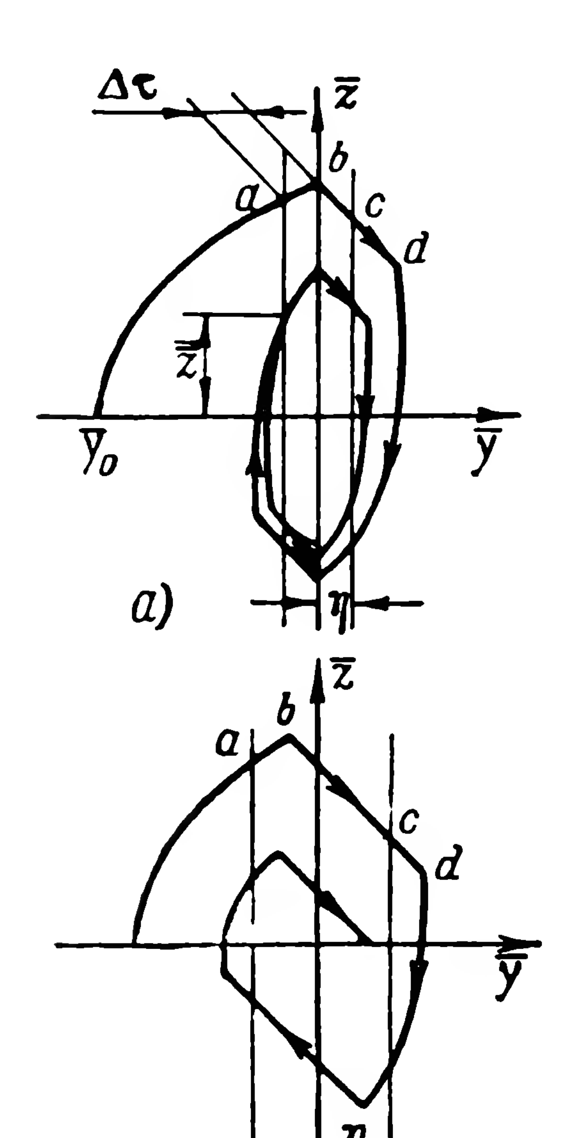
Фиг. 2.39. Фазовый портрет системы с зоной нечувствительности.

Из уравнения (2.94) видно, что в зоне нечувствительности фазовые траектории являются прямыми, имеющими наклон 135° к оси $\bar{y}$. На фиг. 2.39 построен фазовый портрет движения системы при начальных условиях $\bar{z}_{\tau=0} = 0$, $\bar{y}_{\tau=0} = -|y_0|$. Вне зоны нечувствительности фазовые траектории построены по уравнению (2.74). Из этого графика следует, что в зоне нечувствительности резко падает скорость; система при большой зоне нечувствительности быстро приходит в состояние покоя. Состояние равновесия характеризуется на фазовой плоскости не точкой с координатами $\bar{z}=0$; $\bar{y}=0$, как это было в предыдущем случае, а отрезком на оси абсцисс $-\eta \leqslant \bar{y} \leqslant \eta$.

Появление запаздывания и в этом случае увеличивает склонность системы к автоколебаниям. В зависимости от соотношения между зоной нечувствительности $\eta$ и запаздыванием $\Delta\tau$ в системе может установиться автоколебательный режим или же автоколебания окажутся невозможными. На фиг. 2.40, *а* и *б* показаны фазовые картины для обоих этих случаев. На фиг. 2.40, *а* зона нечувствительности оказалась слишком малой, чтобы при данном запаздывании предотвратить автоколебания. На фиг. 2.40, *б*, наоборот, зона нечувствительности оказалась достаточной для предотвращения автоколебаний. Таким образом, в нелинейной системе рассмотренной структуры всегда можно подавить автоколебания за счет увеличения зоны нечувствительности. Это связано, конечно, с введением погрешности в воспроизведении входной величины. Погрешность в установившемся режиме при $x=\text{const}$ может быть равна ширине зоны нечувствительности $(\pm\eta)$.

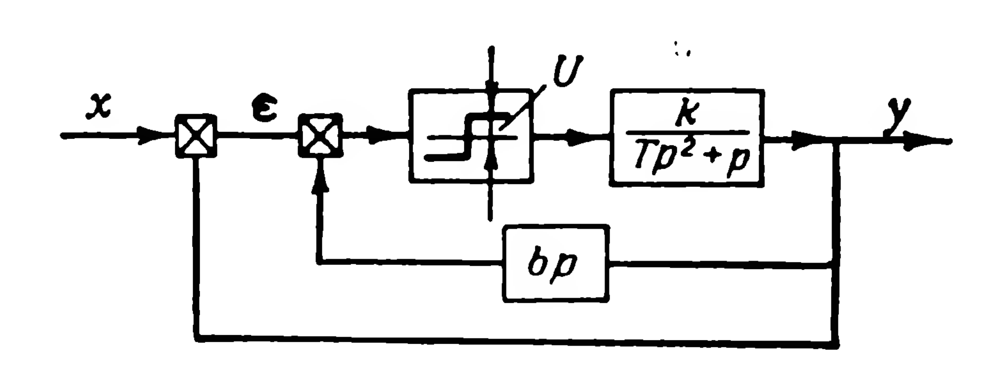
## 4. Снижение амплитуды и повышение частоты автоколебаний за счет корректирующих средств

В качестве корректирующих устройств в системах автоматического регулирования широкое распространение получила скоростная обратная связь. Для осуществления скоростной обратной связи обычно используют тахогенераторы, скоростные гироскопы и дифференцирующие цепочки. В качестве примера рассмотрим процессы в нелинейной системе с идеальным релейным элементом и скоростной обратной связью. Структурная схема системы приведена на фиг. 2.41. Скоростная обратная связь в данном случае осуществляется за счет дифференцирования выходного сигнала $y$ и суммирования на дополнительной обмотке реле с сигналом рассогласования $\varepsilon$.




Фиг. 2.40. Фазовые портреты систем.

*а* – автоколебательной при наличии зоны нечувствительности, *б* — с колебаниями, затухающими в зоне нечувствительности.




Фиг. 2.41. Структурная схема системы со скоростной обратной связью.

Запишем уравнения системы

$$\left.\begin{aligned} T\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}&=ku, \\ u&=U\,\mathrm{sign}\left[\varepsilon-b\frac{dy}{dt}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{2.95}$$

По-прежнему, рассматривая случай $x=0$, получим

$$T\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+\omega_0\,\mathrm{sign}\left(y+b\frac{dy}{dt}\right)=0. \tag{2.96}$$

В данном уравнении аргумент нелинейной функции sign состоит из суммы отклонения и его производной с коэффициентом $b$. В безразмерной форме уравнение (2.96) приобретает вид

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \frac{d\bar{y}}{d\tau} + \operatorname{sign}\left(\bar{y} + \zeta \frac{d\bar{y}}{d\tau}\right) = 0, \tag{2.97}$$

где $\zeta = \frac{b}{T}$ — относительное значение коэффициента скоростной обратной связи;

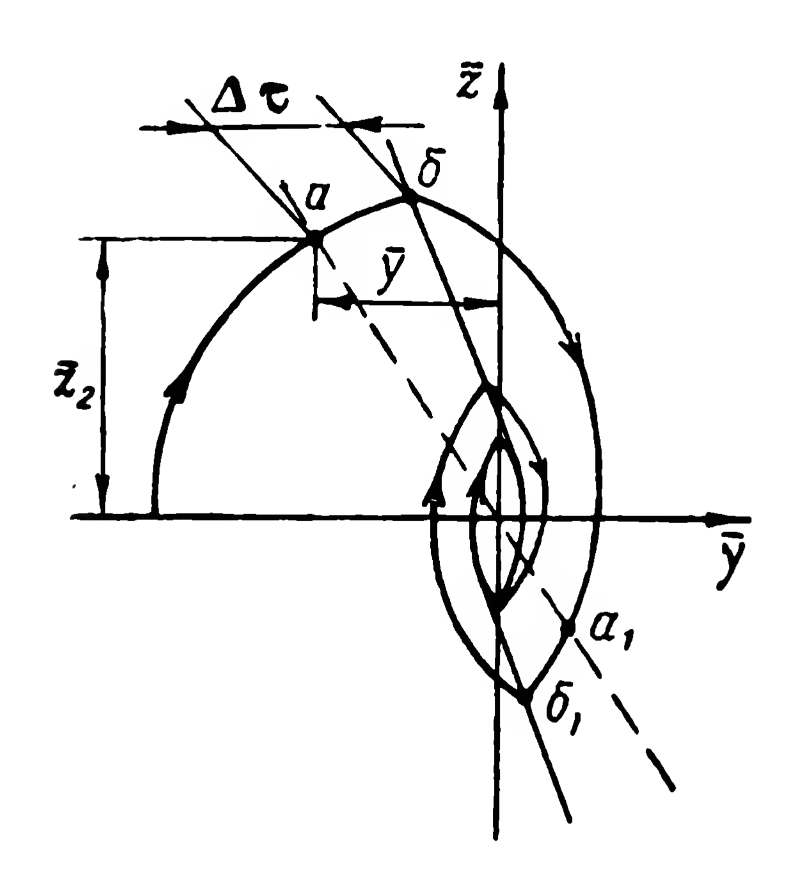
$\frac{d\bar{y}}{d\tau} = \bar{z}$.

Последний член уравнения (2.97) по модулю равен 1 и меняет знак при прохождении суммы $\bar{y}+\zeta\bar{z}$ через нуль. В связи с этим можно обозначить $\operatorname{sign}(\bar{y}+\zeta\bar{z}) = -\varkappa$, изменив соответственно условия перемены знака $\varkappa$. При таком обозначении уравнение (2.97) оказывается идентичным двум уравнениям (2.72). Таким образом, выражения (2.74), (2.75) и (2.78) оказываются справедливыми и для рассматриваемой системы. При этом следует только учесть, что если раньше знак $\varkappa$ изменялся при прохождении отклонения $y$ через нуль, то теперь — только при прохождении через нуль суммы $\bar{y}+\zeta\bar{z}$. Если ранее переключение происходило на прямой $\bar{y}=0$, то теперь — на прямой $\bar{y}+\zeta\bar{z}=0$. Линия переключения $\bar{y}=0$ повернулась на угол $\operatorname{arctg}\frac{1}{\zeta}$ против часовой стрелки. При таком повороте линии переключения автоколебания возникают так же, как и в случае системы со структурной схемой на фиг. 2.29. Однако включение скоростной обратной связи изменяет характер движения системы к состоянию покоя, уменьшая его колебательность и снижая время движения.

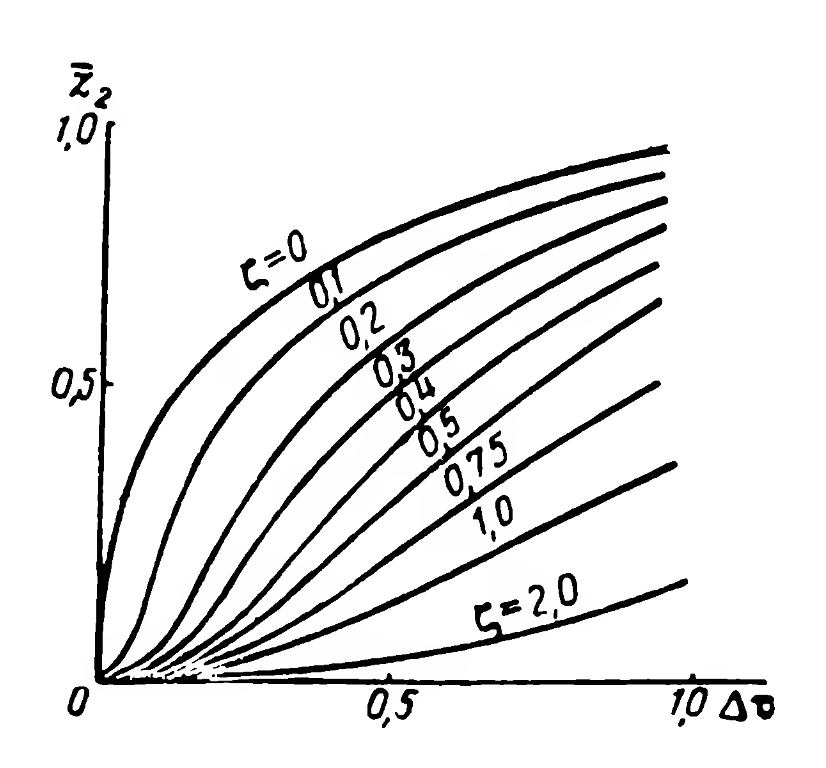
Эффект включения корректирующего устройства проявляется также ощутимо и при наличии запаздывания в релейном элементе. Как было показано выше, запаздывание поворачивало прямую переключений по часовой стрелке, что и приводило в результате к автоколебаниям. Поворот же прямой переключений против часовой стрелки будет в некотором смысле компенсировать запаздывание и приводить к снижению амплитуды и повышению частоты автоколебаний, причем тем больше, чем больше $\zeta$. Однако ни при каких значениях $\zeta$ автоколебания не могут быть исключены, если только система не имеет зоны нечувствительности.

На фиг. 2.42 изображена фазовая картина установления автоколебаний при сравнительно небольшом значении $\zeta$. На прямой переключений в точке $a$ произошло бы переключение, но благодаря запаздыванию процесс переключения (изменение знака $\varkappa$) происходит в точке $б$, которая может быть определена при из-

вестном значении $\Delta\tau$ способом, рассмотренным выше. Таким же образом определяется положение точки $б_1$ по отношению к $a_1$. В конечном счете, как уже указывалось, фазовая траектория сойдется к некоторому циклу автоколебаний, параметры которого будут функцией как $\Delta\tau$, так и $\zeta$. Наиболее просто через $\Delta\tau$ и $\zeta$ выражается параметр автоколебаний $\bar{z}_2$ (значение скорости, при которой сумма $\bar{y}+\zeta y$ обращается в нуль). Зная $z_2$, можно по формулам, аналогичным (2.81) — (2.84), получить остальные параметры автоколебаний.




Фиг. 2.42. Фазовый портрет системы с запаздыванием и скоростной обратной связью.



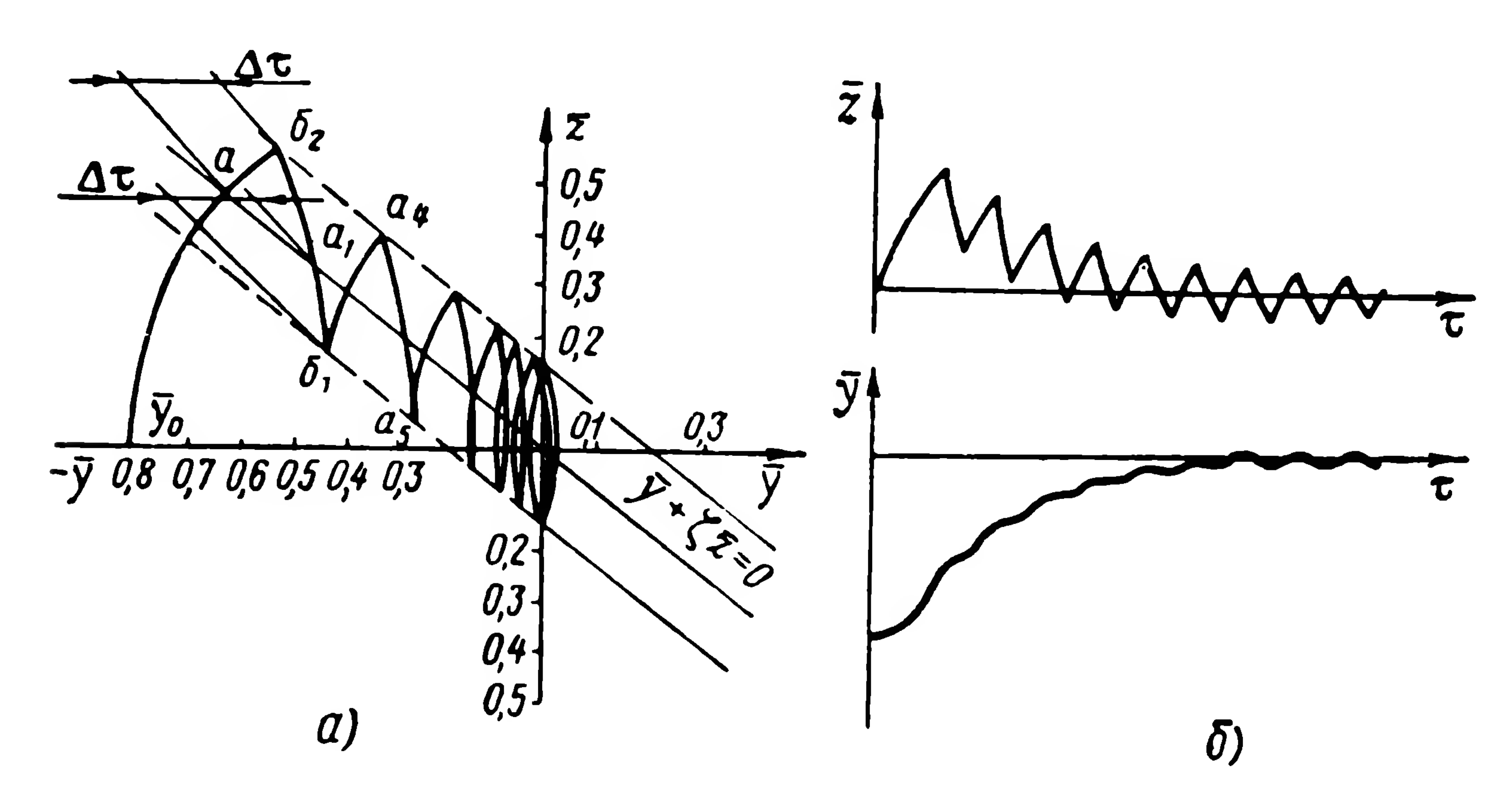

Фиг. 2.43. Зависимость значения параметра $\bar{z}_2$ от относительного запаздывания.

Зависимость $\bar{z}_2=\bar{z}_2(\Delta\tau,\ \zeta)$ приведена на фиг. 2.43. Как видно из этого графика, с увеличением коэффициента скоростной обратной связи $\zeta$ значительно снижается $\bar{z}_2$, а следовательно, и амплитуда автоколебаний. Величина $\zeta$ влияет не только на амплитуду и частоту автоколебаний, но также и на процесс установления автоколебаний, т. е. на переходный процесс в релейно-контактной системе. При малых $\zeta$ (см. фиг. 2.42) общий характер процесса установления автоколебаний (переходного процесса) мало отличается от случая $\zeta=0$, рассмотренного выше. При малых $\zeta$ процесс установления автоколебаний сохраняет колебательный характер. При увеличении $\zeta$ ($\zeta$ порядка единицы и более) форма переходного процесса изменяется. В качестве примера на фиг. 2.44, *а* построен фазовый портрет системы при сравнительно большом $\zeta$. В соответствии с фазовым портретом на фиг. 2.44, *б* построены кривые $\bar{z}=\bar{z}(\tau)$ и $\bar{y}=\bar{y}(\tau)$. Как видно, система «толчками» стремится к положению равновесия. Такой режим движения получил

название скользящего режима. Благодаря этому режиму переходный процесс может чрезмерно затянуться. В связи с этим слишком большие значения $\zeta$ не могут быть рекомендованы. Коэффициент $\zeta$ необходимо выбирать так, чтобы, с одной стороны, амплитуда колебаний была достаточно мала, а с другой — переходный процесс был не слишком продолжительным. Оптимальное значение $\zeta$ может быть выбрано в зависимости от запаздывания по следующей формуле *:



$$\zeta_{\text{опт}} = 1 - \ln 2 \cdot e^{-\Delta\tau} \qquad (2.98)$$




Фиг. 2.44. Фазовый портрет (*а*) и переходные процессы (*б*) при большом значении $\zeta$.

Выбор $\zeta$ в соответствии с (2.98) гарантирует достаточно малую амплитуду автоколебаний, а также минимальную продолжительность переходного процесса. При небольшой зоне нечувствительности и при $\zeta \neq 0$ автоколебания легко подавляются. При этом для подавления автоколебаний нужна значительно меньшая зона нечувствительности, чем при $\zeta = 0$.

В заключение заметим, что вместо дифференцирования выходной величины, можно было бы тем или иным способом ввести производную от рассогласования. В этом случае переходный процесс при начальном отклонении и автоколебания в системе можно изменять выбором параметров дифференцирующего устройства. В следящих системах с точки зрения точности последний вариант следует предпочитать введению производной от выходной величины.

---

* А. А. Красовский, Г. С. Поспелов, Основы автоматики и технической кибернетики, Госэнергоиздат, 1962.

## 5. Вибрационная линеаризация релейных систем

### Реакция релейных систем на медленно меняющиеся воздействия

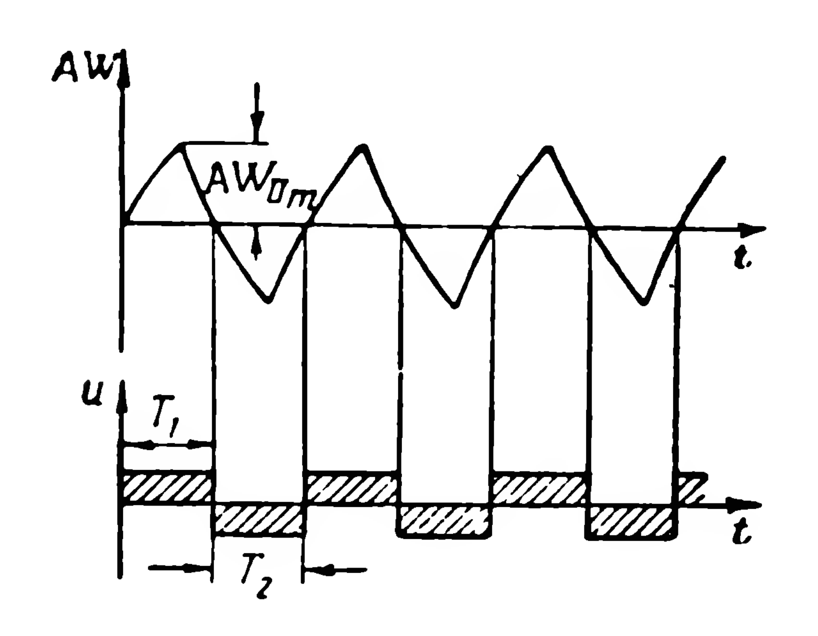
Наличие в релейной системе колебаний, спектр частот которых значительно выше спектра управляющих $x(t)$ и возмущающих воздействий $F(t)$, приводит к эффекту вибрационной линеаризации. Это означает, что реакция на воздействия $F(t)$ и $x(t)$, которые по условию являются медленно меняющимися функциями по сравнению с колебаниями в релейной системе, оказывается близкой к реакции линейных систем. Точно так же переходные процессы при ограниченных начальных отклонениях оказываются близкими к переходным процессам в линейных системах. Высокочастотными колебаниями в релейной системе могут быть или вынужденные колебания, или автоколебания. Рассмотрим указанные способы вибрационной линеаризации.

### Вибрационная линеаризация вынужденными колебаниями

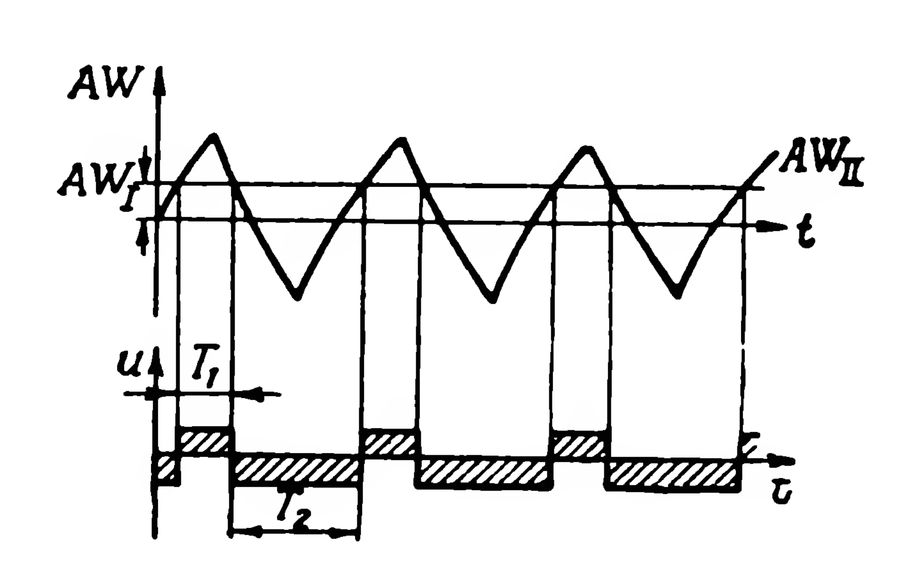
Пусть на вход релейного элемента воздействует медленно меняющаяся функция $x(t)$ и периодический сигнал $\varphi(t)$. Частоту этого сигнала выберем достаточно высокой, но такой, чтобы релейный элемент успевал срабатывать за каждый полупериод. Сигнал $x(t)$ и сигнал от источника высокочастотных колебаний можно суммировать различными методами. Рассмотрим, как осуществляется линеаризация, когда эти сигналы суммируются на обмотках поляризованного реле. К одной обмотке с ампер-витками $AW_{\text{I}}$ подводится напряжение, пропорциональное сигналу $x(t)$, а ко второй с ампер-витками $AW_{\text{II}}$ — напряжение от источника высокочастотных колебаний.

Поскольку в качестве источника переменного тока обычно используется генератор пилообразных колебаний, примем, что переменный ток имеет треугольную форму. В этом случае при сигнале $x(t)=0$ диаграмма переключений, т. е. выходной сигнал релейного элемента, имеет вид, изображенный на фиг. 2.45. Диаграмма построена в предположении, что запаздывание реле равно нулю и знак сигнала $u$ изменяется при прохождении тока во второй обмотке через нуль (ток в первой обмотке равен нулю, так как сигнал $x(t)$ равен нулю). Средняя величина сигнала $u$ будет в данном случае равна нулю. Частота переключений контактов реле должна быть такой, чтобы обусловленные ими колебания выходной величины $y(t)$ имели пренебрежимо малую амплитуду. Поэтому в дальнейшем будем принимать во внимание только среднее значение этого сигнала.

Теперь рассмотрим случай, когда сигнал $x(t)$ отличен от нуля. Значение ампер-витков $AW_{\text{I}}$ в обмотке I поляризованного реле (фиг. 2.46) будет пропорционально сигналу $x(t)$. Знак сигнала $u$ будет изменяться в этом случае в тот момент, когда сумма ампер-витков обмотки I и обмотки II будет проходить через нуль. Диаграмма изменения сигнала $u$ для этого случая приведена на фиг. 2.46.




Фиг. 2.45. Диаграмма переключений для рассогласования, равного нулю.




Фиг. 2.46. Диаграмма переключений для рассогласования, не равного нулю.

На основании этой диаграммы определим среднее значение напряжения на выходе релейного усилителя

$$U_{\text{ср}} = U\text{K}, \tag{2.99}$$

где К — коэффициент команды, равный

$$\text{K} = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}. \tag{2.100}$$

Значение коэффициента К можно выразить через ампер-витки обмоток I и II реле:

$$\text{K} = \frac{AW_{\text{I}}}{AW_{\text{II}m}}, \tag{2.101}$$

где $AW_{\text{II}m}$ — амплитудное значение ампер-витков обмотки II.

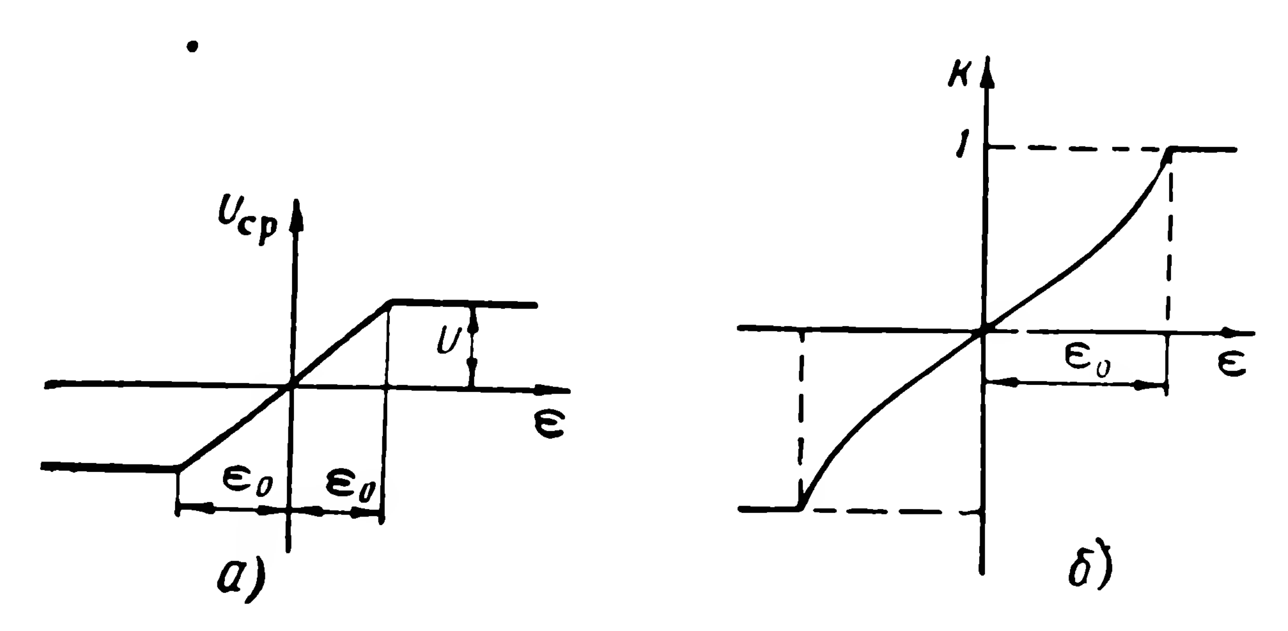
Так как $AW_{\text{I}}$ пропорциональны сигналу $x(t)$, который в системе автоматического регулирования может быть сигналом ошибки или рассогласования $\varepsilon$, то из (2.101) получим

$$\text{K} = \frac{k_{\varepsilon}\varepsilon}{AW_{\text{II}m}}. \tag{2.102}$$

Закон (2.102) будет соблюдаться только в диапазоне $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, причем

$$\varepsilon_0 = \frac{AW_{\text{II}m}}{k_{\varepsilon}}. \tag{2.103}$$

Выражение (2.103) показывает, что зона пропорциональности определяется амплитудой пилообразных колебаний. На фиг. 2.47 изображена зависимость среднего напряжения $U_{ср}$ от рассогласования $\varepsilon$. Без воздействия пилообразных колебаний эта зависимость имела бы вид, изображенный на фиг. 2.28. Таким образом, благодаря воздействию пилообразных колебаний нелинейная характеристика превратилась в известном диапазоне в линейную.




**Фиг. 2.47. Линеаризованные характеристики релейных систем.**

*а* — при пилообразном сигнале, *б* — при синусоидальном сигнале.

В этом диапазоне релейная система может рассматриваться как линейная. Релейный усилитель в структурной схеме в этом случае заменяется линейным с коэффициентом усиления $k_\varepsilon/AW_{IIm}$.

Выше предполагалось, что запаздывание релейного усилителя $\Delta t$ равно нулю. Если же его учесть, то место релейного усилителя должен занять линейный усилитель с запаздыванием, передаточная функция которого имеет следующий вид:

$$W(p) = \frac{k_\varepsilon}{AW_{IIm}} e^{-\Delta t p}. \tag{2.104}$$

Если в релейной системе существовали автоколебания, то они при линеаризации подавляются приложенными внешними колебаниями. Частота внешних колебаний должна быть в несколько раз выше частоты автоколебаний, ибо это обеспечивает незначительную величину амплитуды колебаний выходной величины системы.

В некоторых случаях в качестве линеаризирующих колебаний используются колебания синусоидальной формы. В этом случае зависимость между K и рассогласованием $\varepsilon$ будет нелинейной и выражается соотношением *.

* См. сноску на стр. 96.

$$K = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{k_\varepsilon \varepsilon}{AW_{IIm}}. \qquad (2.105)$$

Графически эта зависимость изображена на фиг. 2.47, *б*. Указанный закон будет соблюдаться только в диапазоне $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, где

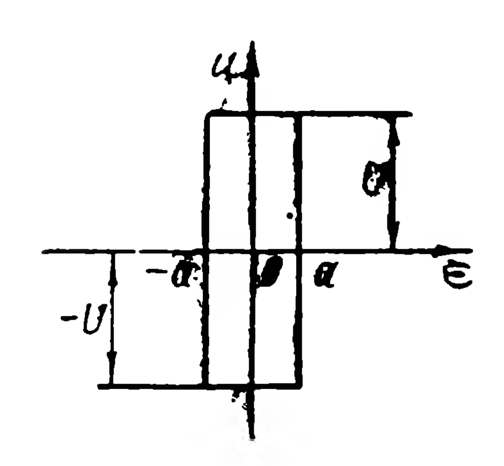
$$\varepsilon_0 = \frac{AW_{IIm}}{k_\varepsilon}.$$

Однако при малых значениях рассогласования эту зависимость можно принять за линейную и считать, что

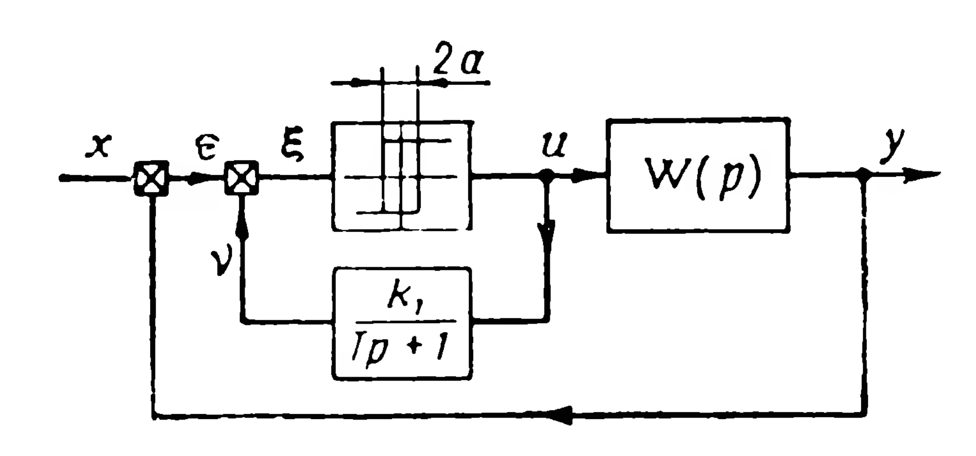
$$K = \frac{2}{\pi} \frac{k_\varepsilon \varepsilon}{AW_{IIm}}. \qquad (2.106)$$

## Вибрационная линеаризация за счет запаздывающей обратной связи вокруг релейного элемента

Пусть релейный элемент системы имеет характеристику, представленную на фиг. 2.48. Такая характеристика свойственна двух-




Фиг. 2.48. Релейная характеристика с петлей.




Фиг. 2.49. Структурная схема системы с запаздывающей обратной связью.

позиционному поляризованному реле. Люфты в механических передачах нелинейной системы также приводят к появлению петлеобразной характеристики. Охватим релейный элемент системы обратной связью, содержащей инерционное звено с постоянной времени $T$ и коэффициентом усиления $k_1$ (фиг. 2.49). В контуре, состоящем из релейного элемента и инерционного звена, возникают автоколебания, которые иногда называют релаксационными, а сам контур — релаксационным генератором. Частоту автоколебаний контура выбирают достаточно высокой, чтобы в выходном сигнале $y$ (или ошибке $\varepsilon$) автоколебательной составляющей можно было бы пренебречь. При такой постановке вопроса

возникает задача определения передающих свойств релаксационного контура для медленно меняющегося сигнала ошибки $\varepsilon$.

Запишем уравнения контура в соответствии с обозначениями, приведенными на фиг. 2.49:

$$\left.\begin{aligned} u &= F(\xi), \\ \xi &= \varepsilon - \nu, \\ T\frac{d\nu}{dt} + \nu &= k_1 u. \end{aligned}\right\} \qquad (2.107)$$

Наличие в контуре высокочастотных автоколебаний позволяет записать систему уравнений (2.107) для средних значений сигналов. Эти значения отметим звездочкой:

$$\left.\begin{aligned} u^* &= \frac{\omega_a}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_a}} F(\varepsilon)\,dt = \psi(\varepsilon), \\ \xi^* &= \varepsilon - u^*, \\ T\frac{d\nu^*}{dt} + \nu^* &= k_1 u^*, \end{aligned}\right\} \qquad (2.108)$$

где $\omega_a$ — частота автоколебаний.

Среднее значение выходного сигнала контура $u^* = \psi(\varepsilon)$ является функцией только входного сигнала $\varepsilon$ и для релейного элемента (см. фиг. 2.48) равно коэффициенту команды К, т. е.

$$\psi(\varepsilon) = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}, \qquad (2.109)$$

где $T_1$ — длительность положительного импульса;
$T_2$ — длительность отрицательного импульса.

Обе величины $T_1$, $T_2$, а следовательно, и период автоколебаний $T_1 + T_2 = 2\pi/\omega_a$ являются функциями входного сигнала $\varepsilon$. Вид колебаний в контуре для величины $\nu$ показан на фиг. 2.50. При $\varepsilon = 0$ в контуре имеют место симметричные автоколебания $T_1 = T_2$. При $\varepsilon \neq 0$ автоколебания становятся несимметричными. Знак $\varepsilon$ определяет соотношение $T_1$ и $T_2$, а следовательно, и знак $u^*$. В интервалах $T_1$ и $T_2$ законы изменения $\nu_{a1}(t)$ и $\nu_{a2}(t)$ описываются уравнениями экспонент $\pm k_1 U(1 - 2e^{-t/T})$. Поэтому для интервала $0 \leqslant t \leqslant T_1$

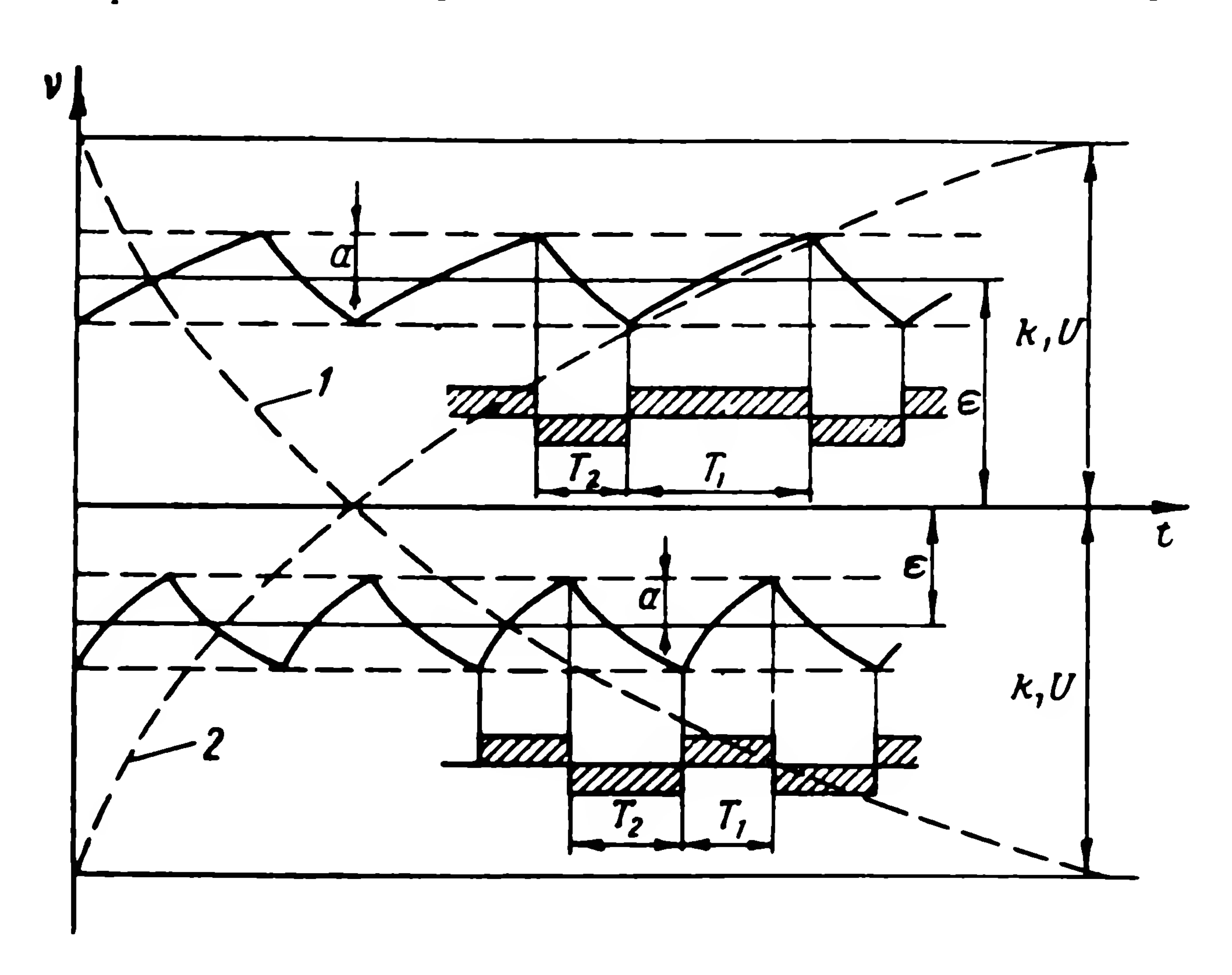
$$\nu_{a1}(t) = (\varepsilon - a)\,e^{-t/T} + k_1 U(1 - e^{-t/T}). \qquad (2.110)$$

а для интервала $0 \leqslant t \leqslant T_2$

$$\nu_{a2}(t) = (\varepsilon + a)\, e^{-t/T} - k_1 U\,(1 - e^{-t/T}). \qquad (2.111)$$

В формулах (2.110) и (2.111) время отсчитывается от начала интервалов.

Полупериод $T_1$ заканчивается, и переключение происходит, когда $\xi = \varepsilon - \nu_{a1}(t)$ достигает значения $-a$. Полупериод $T_2$ заканчивается, и переключение происходит при $\xi = \varepsilon - \nu_{a2}(t)$, равном $+a$.

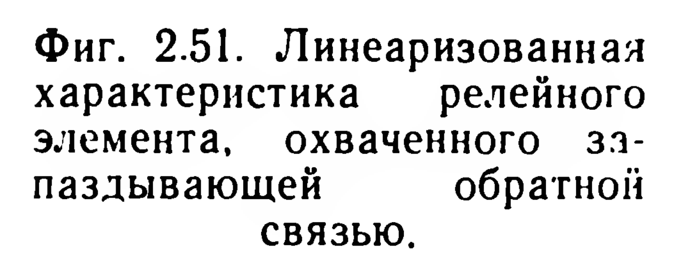



Фиг. 2.50. Кривые колебаний в контуре обратной связи системы, схема которой приведена на фиг. 2.49.
*1* и *2* — предельные экспоненты.

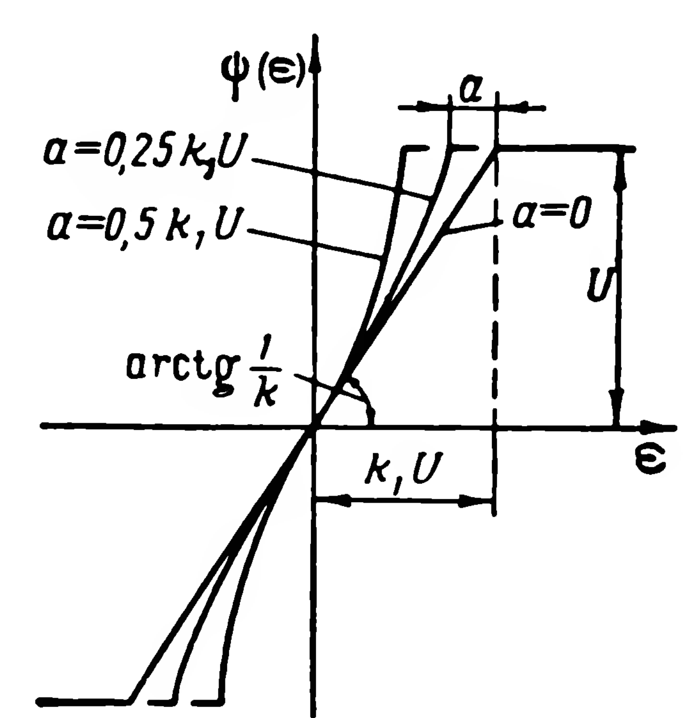
По этим соотношениям $T_1$ и $T_2$ могут быть выражены через $\varepsilon$, $a$ и, следовательно, может быть получена интересующая нас зависимость $y^* = \psi(\varepsilon, a)$. Графики функций $y^* = \psi(\varepsilon)$ при различных значениях $a$ приведены на фиг. 2.51. При $a \to 0$, когда релейный элемент с характеристикой, изображенной на фиг. 2.48, превращается в релейный элемент с характеристикой, изображенной на фиг. 2.28, частота автоколебаний становится бесконечно большой, а $\psi(\varepsilon)$ в диапазоне $-k_1 U \leqslant \varepsilon \leqslant k_1 U$ превращается в линейную функцию с коэффициентом усиления $\frac{1}{k_1}$, т. е. $\psi(\varepsilon) = \frac{1}{k_1}\varepsilon$. Если $|\varepsilon \pm a| \ll k_1 U$, то, как следует из фиг. 2.51, приближенно можно принять $\psi(\varepsilon) = \frac{1}{k_1}\varepsilon$ и при $a \neq 0$.

Релаксационный контур может быть образован также за счет охвата запаздывающей обратной связью трехпозиционного поля-

ризованного реле с характеристиками, представленными на фиг. 2.52. Зависимость $\psi(\varepsilon)$ для данного случая может быть найдена аналитически. Графики функций $\psi(\varepsilon)$ для различных $a$ при-



Фиг. 2.51. Линеаризованная характеристика релейного элемента, охваченного запаздывающей обратной связью.

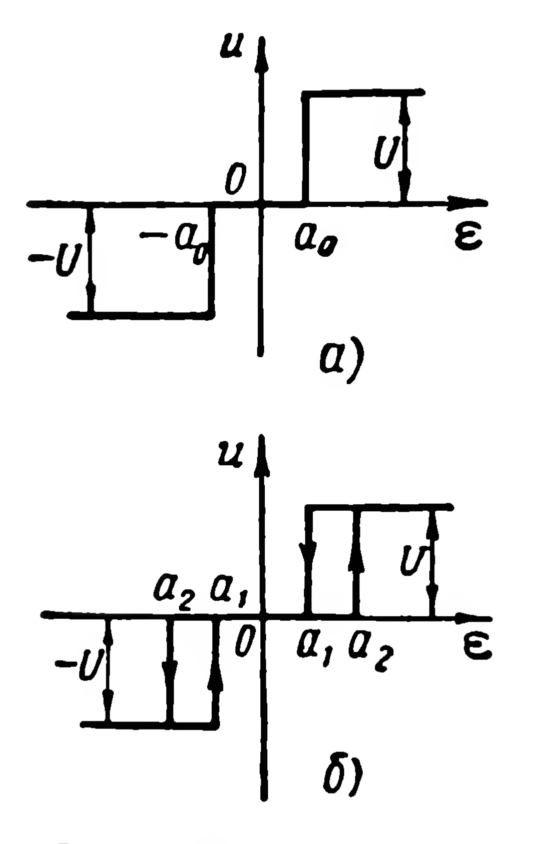



ведены на фиг. 2.53. Как следует из этих графиков, функция $\psi(\varepsilon)$ близка к линейной в диапазоне

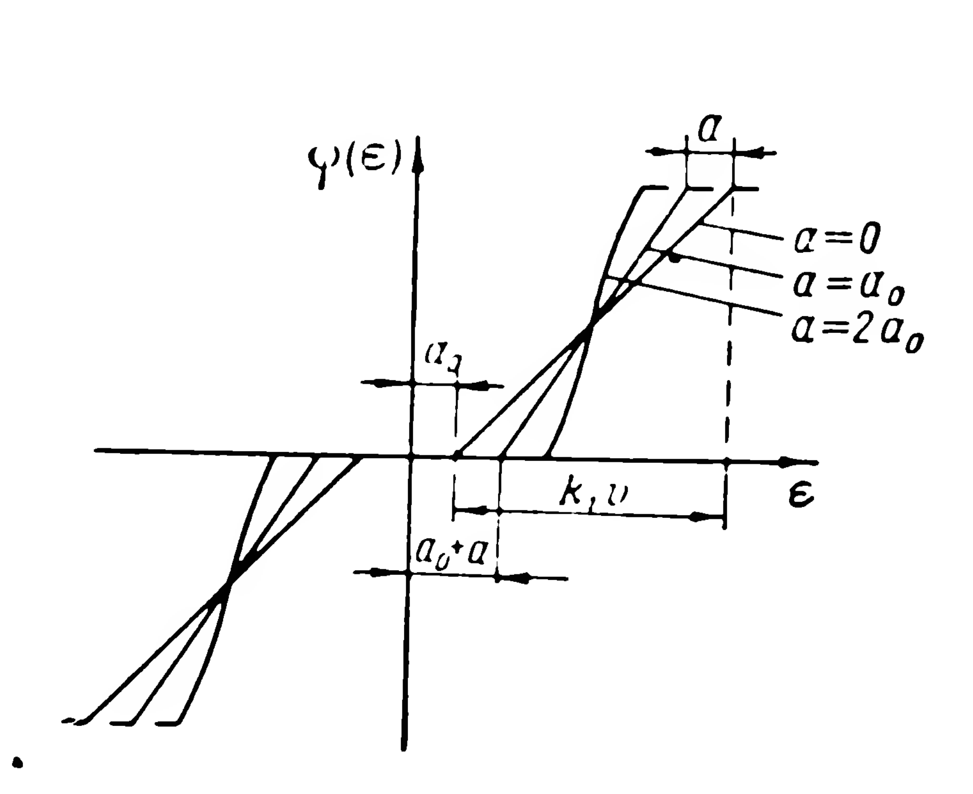
$$(a_0 + a) \leqslant \varepsilon \leqslant (k_1 U + a_0 - a)$$

для положительных $\varepsilon$ и соответственно для отрицательных $-(a_0+a) \geqslant \varepsilon \geqslant (k_1 U + a_0 - a)$, где $a_0 = \frac{a_1 + a_2}{2}$, $a = \frac{a_2 - a_1}{2}$.

В предельном случае, когда $a \to 0$, т. е. характеристика, приведен-




Фиг. 2.52. Релейные характеристики с зоной нечувствительности (*а*) и петлей (*б*).

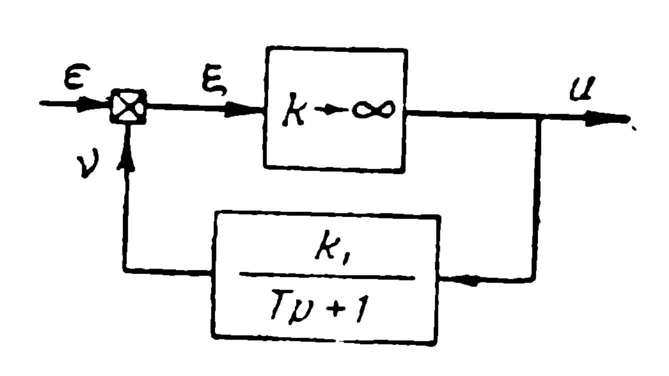



Фиг. 2.53. Линеаризованные характеристики релейного элемента (см. фиг. 2.52), охваченного запаздывающей обратной связью.

ная на фиг. 2.52, *б*, превращается в характеристику, данную на фиг. 2.52, *а*, то

$$\psi(\varepsilon) = -\frac{a_0}{k_1} + \frac{1}{k_1}\varepsilon. \tag{2.112}$$

В диапазоне $|\varepsilon| < (a_0 + a)$ характеристика на фиг. 2.53 имеет зону нечувствительности. Если $\varepsilon$ находится в указанном диапазоне, то автоколебания в контуре отсутствуют. Графики функций $\psi(\varepsilon)$, приведенные на фиг. 2.51 и 2.53, являются статическими характеристиками релаксационных контуров, они справедливы для различных неизменных значений $\varepsilon$. Найдем передаточную функцию релаксационных контуров, справедливую для динамического режима, когда $\varepsilon = \varepsilon(t)$, ограничившись при этом предельными релейными характеристиками, представленными на фиг. 2.28 и 2.52, *а*. В предельных случаях, когда $a \to 0$, а частота колебаний $\omega_a \to \infty$, входной сигнал релейного элемента также стремится к нулю. Следовательно, в предельном случае $\nu^* = \varepsilon$ и из последнего уравнения системы (2.108) находим, что




Фиг. 2.54. Структурная схема усилителя с бесконечно большим коэффициентом усиления.

$$u^* = \frac{1}{k_1}\left(\varepsilon + T\frac{d\varepsilon}{dt}\right). \tag{2.113}$$

Выражение (2.113) показывает, что в рассматриваемом предельном случае передаточная функция релаксационного контура представляет собой передаточную функцию идеального форсирующего звена первого порядка

$$W_{\varepsilon/u^*}(p) = \frac{1}{k_1}(Tp + 1). \tag{2.114}$$

Заметим, что такую же передаточную функцию имеет усилитель с бесконечно большим коэффициентом усиления, имеющий в цепи отрицательной обратной связи инерционное звено (фиг. 2.54). В предельном случае вибрационно-линеаризованный релейный усилитель действительно имеет коэффициент усиления, равный бесконечности, поскольку $k = u^*/\xi$, а так как $\xi \to 0$, то и $k \to \infty$. Форсирующие свойства релейного усилителя с обратной связью (релаксационного контура) сопровождаются запаздыванием при преобразовании входного сигнала $\varepsilon$. Запаздывание опре-

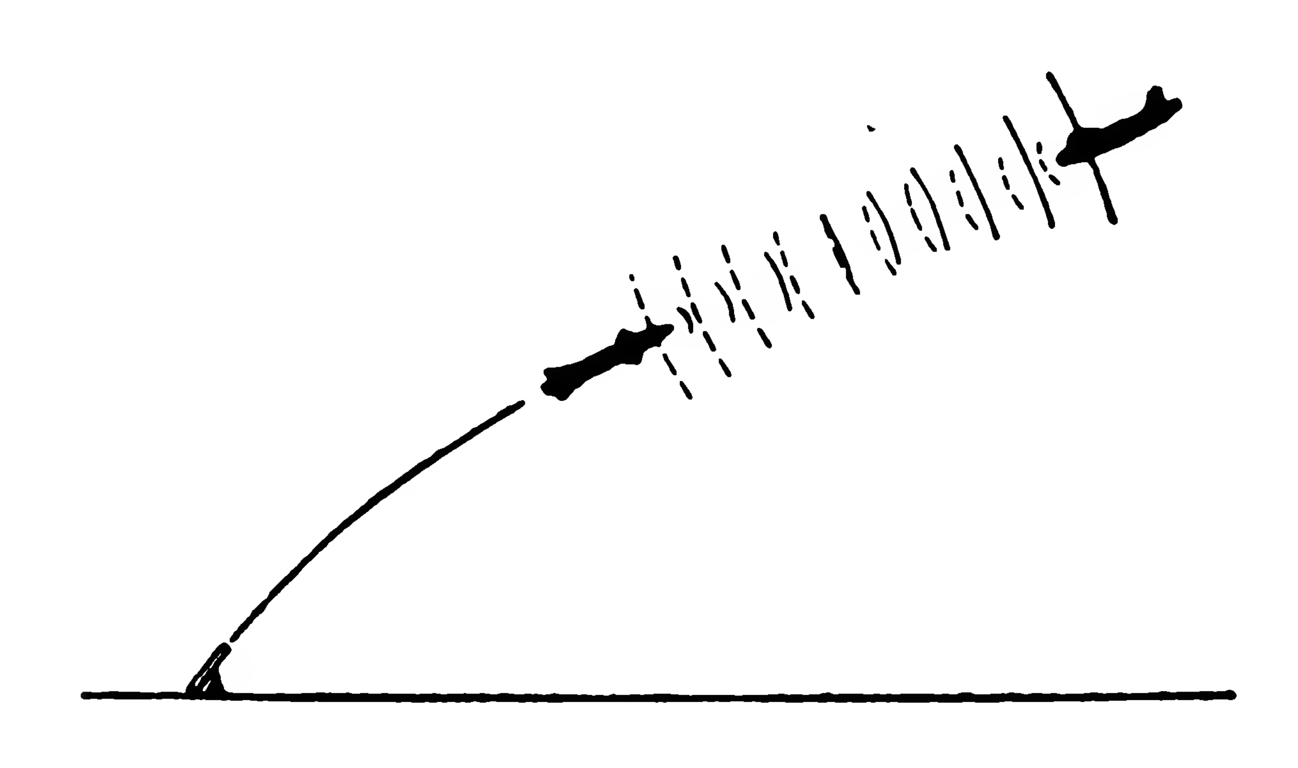
деляется временем срабатывания и отпускания реле, а также шириной петли $a$ его характерстки. При синусоидальном сигнале $\varepsilon$ время срабатывания и отпускания реле приводит к сдвигу фазы выходного сигнала $u^*$ по отношению к входному $\varepsilon$, пропорциональному частоте, а наличие петли в характеристике дает одинаковый сдвиг по фазе при любых частотах. Для того чтобы форсирующие свойства контура имели бы существенное значение, нужно выбирать большие значения постоянной $T$. Чтобы при этом не получить слишком низкую частоту автоколебаний, необходимо иметь релейный усилитель с высокими динамическими свойствами, малой шириной петли $a$ и малыми величинами времени срабатывания и отпускания реле.

*Глава III*

# УПРАВЛЯЮЩИЕ СИГНАЛЫ ПРИ САМОНАВЕДЕНИИ

## § 3.1. ВИДЫ ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЭНЕРГИИ. АКТИВНЫЕ, ПОЛУАКТИВНЫЕ, ПАССИВНЫЕ ГОЛОВКИ САМОНАВЕДЕНИЯ

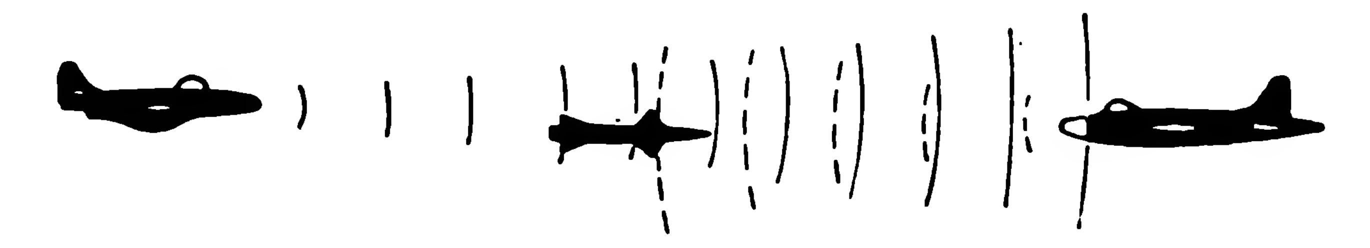
Устройства, при помощи которых на снаряде может быть определено его положение относительно цели, называются головками самонаведения.



Фиг. 3.1. Схема активного самонаведения.
——— фронт падающего излучения,
— — — фронт отраженного излучения.

Для работы чувствительных элементов головок необходима энергетическая связь между снарядом и целью. Эта связь может осуществляться за счет энергии электромагнитных волн (световой диапазон, инфракрасный или тепловой диапазон и радиотехнический диапазон волн) и энергии звука. Цель должна обладать большей энергией, чем окружающая среда, т. е. выделяться над окружающей средой — быть контрастной. Использование энергии звука для авиационных снарядов, движущихся в воздухе, не получило распространения, так как такие снаряды сами являются источниками шумов высокого уровня, что мешает выделению звуковых сигналов цели. Акустический контраст нашел лишь приме-

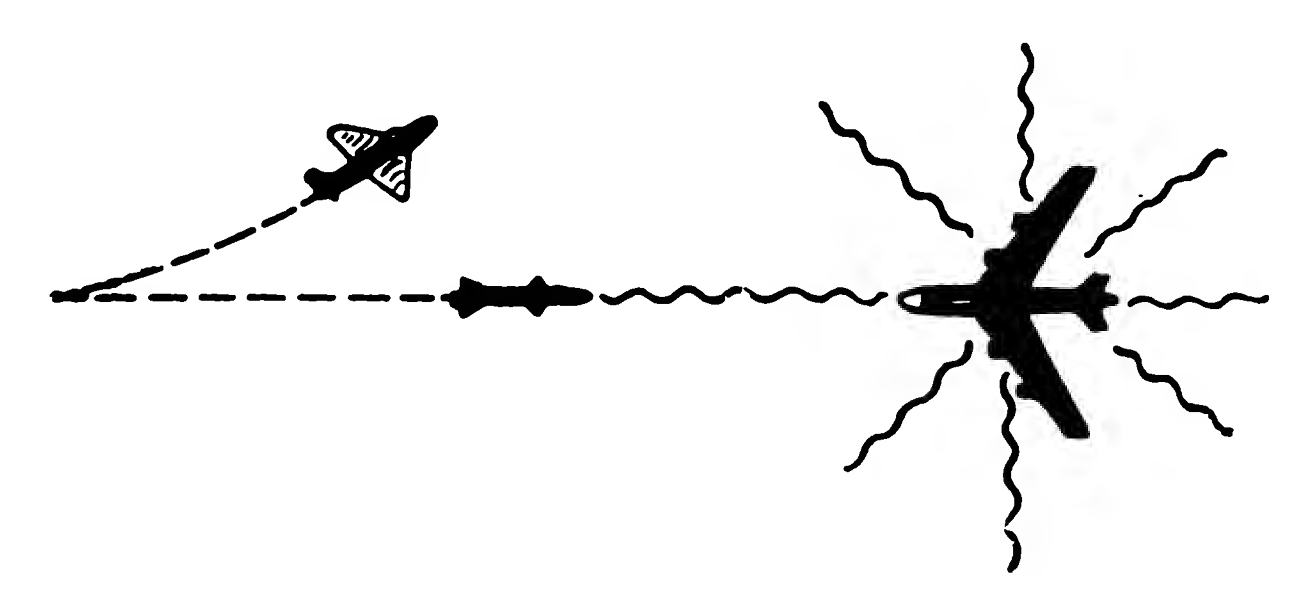
нение в головках самонаведения морских торпед. Световой контраст цели в системах самонаведения снарядов тоже редко используется, так как большое количество целей не обладает достаточной контрастностью и их трудно выделить на окружающем фоне. В принципе в головках самонаведения снарядов могут быть использованы и излучения в наиболее коротковолновой части спектра электромагнитных волн — гамма-лучи.



Фиг. 3.2. Схема полуактивного самонаведения.

Наиболее широко используется энергия инфракрасного излучения и радиоволн. В зависимости от места нахождения источника энергии различают три типа головок самонаведения:

1) активные — источник энергии для облучения цели находится на снаряде и часть отраженной от цели энергии поступает на чувствительные элементы головки (фиг. 3.1);



Фиг. 3.3. Схема пассивного самонаведения.

2) полуактивные — источник энергии для облучения цели расположен вне снаряда. Часть отраженной от цели энергии поступает на чувствительные элементы головки (фиг. 3.2);

3) пассивные — источником энергии является цель: излучаемая целью энергия поступает на чувствительные элементы головки (фиг. 3.3).

В табл. 3.1 приведены области спектра электромагнитных колебаний и соответствующие им длины волн, которые могут быть использованы в различных видах головок самонаведения снарядов.

*Таблица 3*

**Классификация спектра электромагнитных колебаний по диапазонам длин волн**

| Область спектра | | Длина волны |
|---|---|---|
| Радиоволны | Длинные | 20 000—2000 *м* |
| | Средние | 2 000—200 *м* |
| | Короткие | 200—10 *м* |
| | Ультракороткие | 10—0,5 *м* |
| | Микрорадиоволны | Короче 0,5 *м* |
| Инфракрасные лучи | Длинноволновые | 750—25 *мкм* |
| | Средневолновые | 25—2,5 *мкм* |
| | Коротковолновые | 2,5—0,76 *мкм* |
| Видимые лучи | | 0,76—0,4 *мкм* |
| Ультрафиолетовые лучи | | 4000—50 Å |
| Рентгеновские лучи | | 50—0,04 Å |
| Гамма-лучи | | 40X и короче |

Примечание. 1 *мкм* $= 10^{-6}$ *м*; 1 Å $= 10^{-10}$ *м*; 1X $= 10^{-13}$ *м*.

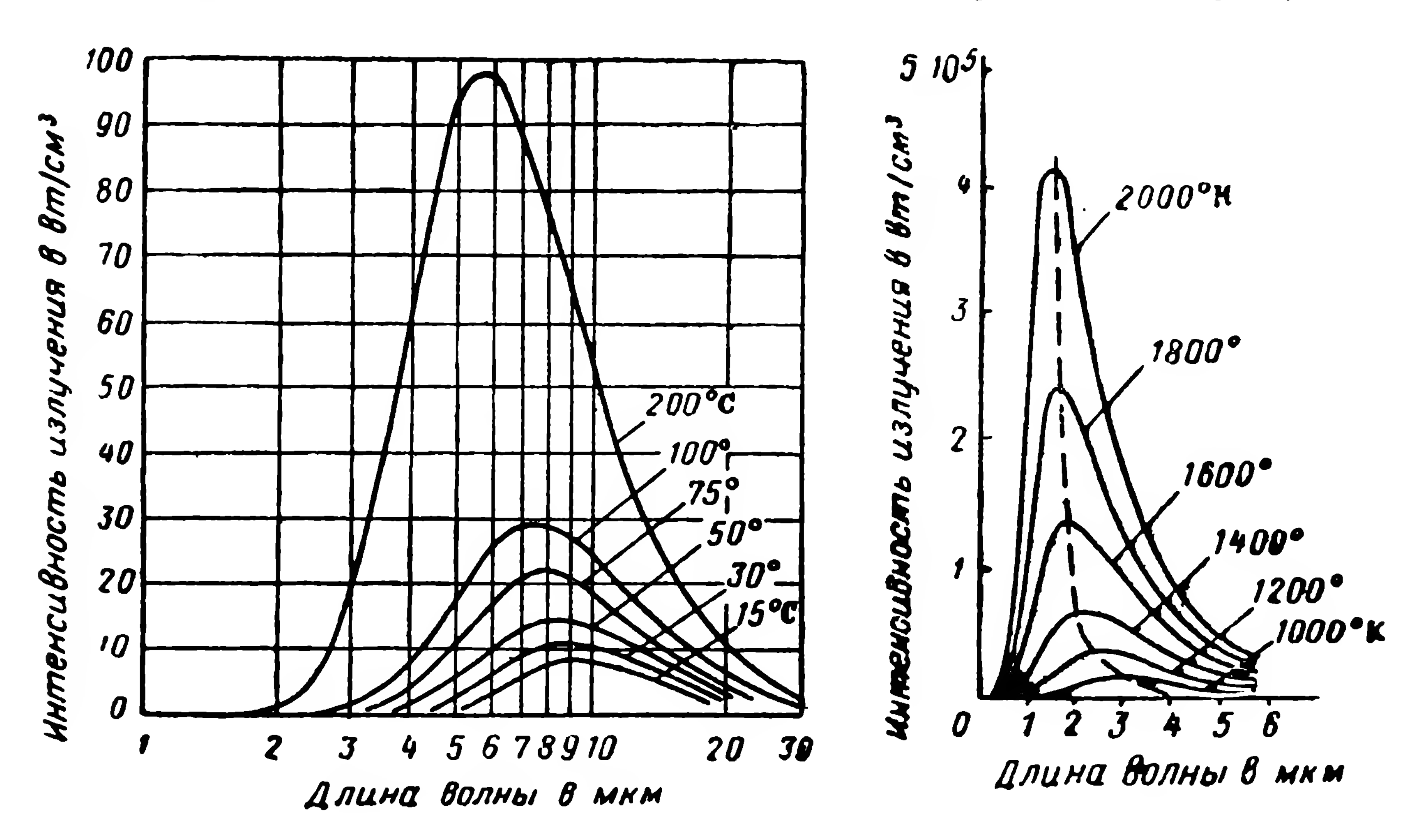
## § 3.2. ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ИНФРАКРАСНЫХ ГОЛОВОК САМОНАВЕДЕНИЯ

Прежде чем перейти к изучению принципов работы и устройства инфракрасных головок самонаведения, необходимо остановиться на свойствах источников инфракрасного излучения и особенностях распространения этих лучей в атмосфере. Источником инфракрасных лучей является любое тело, температура которого выше температуры абсолютного нуля ($T = -273{,}15\,°C$).

Длина волны инфракрасных лучей зависит от температуры излучающего тела и этим определяется участок спектра инфракрасного излучения и тип чувствительного элемента, которые могут быть использованы в головке самонаведения. Чем выше температура объекта, тем короче диапазон излучаемых им волн. Количество энергии излучения, соответствующее определенной длине волны для данной температуры объекта, называется интенсивностью излучения. На фиг. 3.4 приведена зависимость интенсивности и длины волны инфракрасного излучения от температуры тела. Инфракрасное излучение струи раскаленных газов реактивного или ракетного двигателя лежит в очень узкой полосе спектра, средняя длина волны которой определяется характеристикой молекулярного резонанса продуктов горения. Так, например, углекислый газ и водяные пары, содержащиеся в выхлопных газах,

вызывают излучение на волнах (2,5—3,2 *мкм*) и (4,2—4,5 *мкм*) соответственно.

Направление максимума энергии излучения инфракрасных лучей примерно совпадает с направлением движения выхлопных газов двигателей самолета-цели. Энергия излучения зависит не только от температуры тела, но и от состояния поверхности. Чем чище и светлее эта поверхность, тем меньше процент инфракрасной энергии может излучать объект при данной температуре. Так, например, самолет, имеющий хорошо отполированную поверхность обшивки, будет излучать только 10% того количества энергии, которую при той же температуре излучит самолет, обшивка которого окрашена в черный цвет. Для выражения эффективности излучения объекта используется понятие эмиссионной способности. Она характеризуется коэффициентом излучения ε, т. е. отношением мощности, действительно излучаемой объектом, к той мощности, которая излучалась, если бы объект был абсолютно черным телом. Это отношение всегда меньше единицы.




Фиг. 3.4. Кривые влияния температуры излучающего объекта на интенсивность и длину волны инфракрасного излучения.

На основании закона Стефана-Больцмана можно найти энергию излучения

$$E_{т} = \varepsilon\sigma T^4 \ вт/см^2, \quad (3.1)$$

где $E_{т}$ — энергия на единицу площади излучающего тела в телесном угле $2\pi$;

$\sigma$ — постоянная излучения, равная, $5{,}6686 \cdot 10^{-12}$ *вт/см²град⁴*;
$T$ — температура тела в °K;
$\varepsilon$ — коэффициент излучения.

По формуле (3.1) определится энергия, которая излучается объектом. К чувствительному элементу дойдет часть энергии. Энергия будет уменьшаться за счет рассеяния и потерь в оптике. Рассеяние обратно пропорционально квадрату расстояния между источником и чувствительным элементом. Так, величина мощности,




Фиг. 3.5. Кривые, иллюстрирующие области поглощения инфракрасной энергии в атмосфере.
——— водяные пары, — — — углекислота, · · · · озон.

приходящей от объекта излучения к головке самонаведения, при расстоянии между ними 1600 *м*, температуре объекта 900 °C и коэффициенте излучения $\varepsilon = 0{,}1$ составит $35 \cdot 10^{-12}$ *вт* на 1 *см*² поверхности индикатора от каждого квадратного сантиметра поверхности объекта.

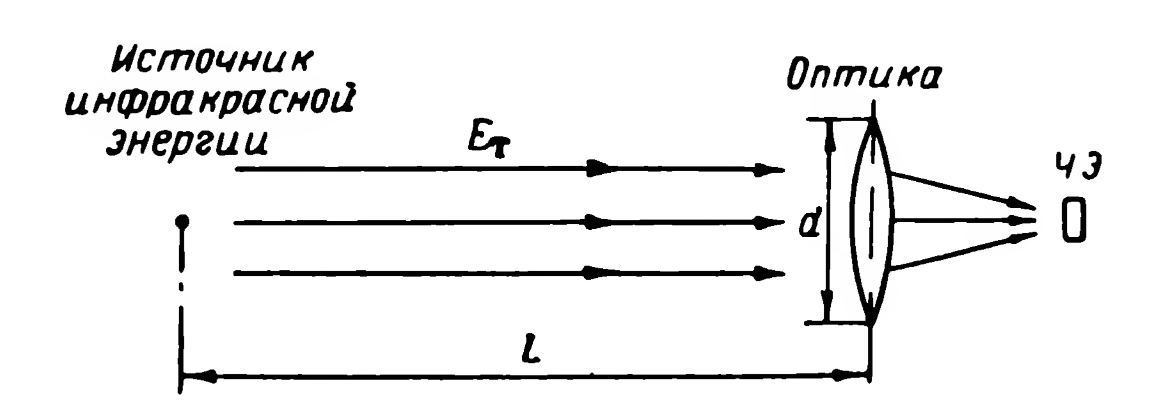
Кроме рассеяния инфракрасных лучей, при прохождении их через атмосферу происходит поглощение, особенно ярко выраженное на некоторых участках спектра. Инфракрасные лучи поглощаются находящимися в атмосфере водяными парами и углекислым газом. Так, углекислый газ обусловливает появление интенсивных полос поглощения при длинах волн 2,05, 2,6, 4,3 и особенно 12,8—17,3 *мкм*. *

Сильнее всего инфракрасные лучи поглощаются парами воды, обладающими интенсивными полосами поглощения при различных длинах волн. Наиболее сильное поглощение водяным паром происходит при следующих длинах волн (цифры указывают центры полос поглощения): 0,94; 1,13; 1,38; 1,46; 1,87; 2,66; 3,15; 6,26; 11,7; 12,6; 13,5; 14,3 *мкм*. На фиг. 3.5 приведены кривые, иллюстрирующие области поглощения водяного пара и углекислоты. Относительные амплитуды полос поглощения этими компонентами атмосферы взяты в произвольном масштабе, так как процент-

* И. А. Марголин, Н. П. Румянцев, Основы инфракрасной техники, Госэнергоиздат, 1955.

ное содержание их в атмосфере бывает различным. Участки спектра, на которых инфракрасная энергия пропускается без искажения, называются «окнами».

С увеличением высоты ширина «окон» увеличивается из-за меньшей плотности воздуха и водяных паров. На высоте порядка 10 *км* и более инфракрасное излучение практически не испытывает поглощения, за исключением узких полос спектра, одна из кото-




Фиг. 3.6. Принципиальная схема индикатора инфракрасной энергии.

рых находится в области длины волны 2,8 *мкм*, а другая — в области длины волны 4,4 *мкм*, соответствующих областям поглощения углекислого газа и водяных паров.

В результате количество энергии, пришедшее к чувствительному элементу (фиг. 3.6), может быть рассчитано по формуле

$$E_u = E_т \frac{1}{L^2} S k_1 k_2, \qquad (3.2)$$

где $E_u$ — вся энергия, пришедшая к чувствительному элементу (ЧЭ), в *вт*;

$L$ — расстояние от источника энергии до чувствительного элемента в *см*;

$S$ — площадь входного зрачка оптики, проектирующей инфракрасные лучи на чувствительный элемент, в $см^2$;

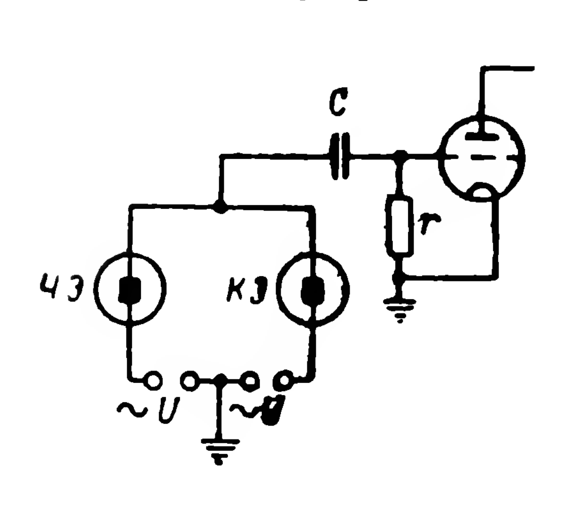
$k_1$ — коэффициент, характеризующий потери в атмосфере. Величина коэффициента зависит от состояния атмосферы;

$k_2$ — коэффициент, характеризующий потери в оптической системе.

Чувствительные элементы приемников инфракрасного излучения можно разделить на две группы — неселективные и селективные. Неселективные обладают равной чувствительностью в достаточно широком участке спектра. Они основаны на принципе преобразования энергии инфракрасных лучей в тепловую. Поверхность неселективного чувствительного элемента должна иметь ко-

эффициент поглощения, постоянный для данного участка спектра. Обычно в качестве покрытий используются платиновая чернь, сажа и другие вещества с высоким коэффициентом поглощения инфракрасных лучей. В качестве неселективных чувствительных элементов в головках самонаведения используются болометры. Вследствие поглощения лучистого потока чувствительный слой нагревается и изменяется сопротивление болометра, с помощью которого можно обнаружить лучистый поток мощностью до $10^{-10}$ *вт*.

Чувствительный к лучистому потоку элемент болометра (приемная площадка) изготовляют из тонкого слоя различных металлов, полупроводников и диэлектриков, обладающих высоким температурным коэффициентом сопротивления. Слой металла имеет толщину 0,1—10 *мк*. Практически используют два таких чувствительных элемента, включенных в плечи мостовой схемы с одинаковым напряжением смещения (фиг. 3.7). Один из элементов (ЧЭ) подвергают воздействию инфракрасных лучей, тогда как другой (КЭ) экранируют от них, обеспечивая компенсацию изменений сопротивления под влиянием окружающей температуры.




Фиг. 3.7. Принципиальная схема включения чувствительных элементов инфракрасного индикатора.

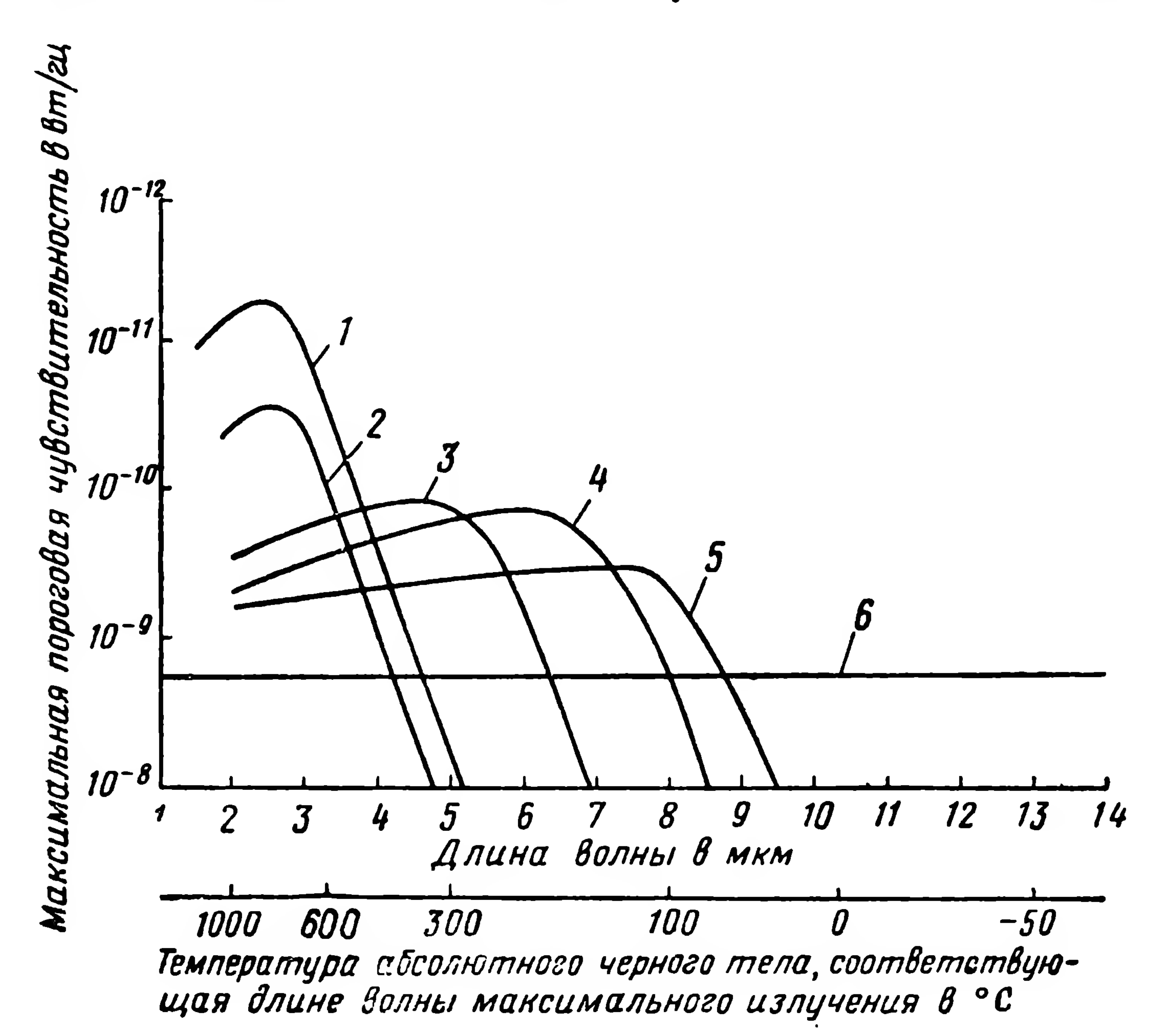
В качестве селективных чувствительных элементов в инфракрасных индикаторах используют фотосопротивления — фотоэлементы, сопротивление которых изменяется под действием инфракрасного излучения. Для изготовления фотосопротивлений применяют полупроводниковые материалы, в том числе сернистый свинец, теллуристый свинец, сурьмянистый индий и др.

Проведем сравнение этих двух основных типов чувствительных элементов головок самонаведения, использующих инфракрасное излучение цели, по их основным характеристикам.

Ч у в с т в и т е л ь н о с т ь. Увеличение чувствительности приводит к увеличению дальности обнаружения цели. Широко применяется понятие спектральной чувствительности, т. е. распределения чувствительности по участкам спектра инфракрасных лучей.

Болометры одинаково чувствительны на всех длинах волн инфракрасного спектра, однако для получения эквивалентного уровня сигнала на выходе они требуют подачи по меньшей мере в 100 раз больше энергии инфракрасного излучения по сравнению с фотосопротивлением из сернистого свинца. Ввиду столь небольшой чувствительности применение болометра, вероятно, давно бы прекратилось, если бы более высокая чувствительность фотосопротивления не ограничивалась сравнительно узкой полосой инфракрасного спектра.

На фиг. 3.8 * сравниваются максимальные пороговые чувствительности элементов различных типов. Из рассмотрения кривых, приведенных на этом графике, видно, что чувствительность сернистого свинца на волне порядка 3 *мкм* при комнатной температуре резко падает, на волне 4,0—4,5 *мкм* чувствительность сернистого свинца оказывается ниже чувствительности болометра.




Фиг. 3.8. Кривые спектральной чувствительности инфракрасных индикаторов.

*1* — охлажденный сернистый свинец (—80 °С), *2* — неохлажденный сернистый свинец, *3* — охлажденный теллуристый свинец (—183 °С), *4* — охлажденный селенистый свинец (—183 °С), *5* — охлажденный сурьмянистый индий (—183 °С), *6*—тепловые (болометрические) индикаторы.

Спектральную чувствительность фотосопротивлений можно несколько увеличить понижением их температуры. Так, например, охлаждение элемента из сернистого свинца с помощью сухого льда до температуры около —80 °С расширяет его спектральную отдачу на 0,5 *мкм* и увеличивает чувствительность более чем в 15 раз. Но при охлаждении чувствительных элементов увеличивается запаздывание, вносимое ими при измерении меняющихся во времени сигналов. Другие материалы, как, например, теллуристый свинец и сурьмянистый свинец, обладают большей чувствительностью к излучению на длинноволновом конце инфракрас-

* М. А. Брамсон, А. Е. Каликеев, Инфракрасная техника капиталистических стран, изд. «Советское радио», 1960.

ного спектра по сравнению с сернистым свинцом, но зато менее чувствительны к излучению на других частотах спектра.

Охлажденный до температуры 90 °К (—183 °С) теллуристый свинец обладает чувствительностью к излучению на волнах свыше 7 *мкм*, а охлажденный сурьмянистый свинец— на волнах около 8 *мкм*. Максимальная чувствительность охлажденного теллуристого свинца достигает лишь 10—20% чувствительности сернистого свинца, а чувствительность сурьмянистого свинца равна только половине чувствительности теллуристого свинца.

Фототок. Фототок зависит не только от освещенности, но и от приложенного напряжения. На фиг. 3.9 приведены вольт-амперные характеристики по темновому току ($i_т$) и току при освещении ($i_с$). Как видно из этого графика, при изменении приложенного напряжения изменяется и фототок при постоянной освещенности фотосопротивления. Изменение фототока при постоянной освещенности называют шумом. Кроме полезного сигнала, каждый чувствительный элемент является источником различных помех-шумов. В болометрах основную роль играют тепловые шумы, возникающие в результате молекулярных флюктуаций в чувствительном слое. Другим видом помех в болометрах является шум, возникающий за счет изменений тока, протекающего через чувствительный слой индикатора. По сравнению с тепловым шумом уровень этого шума при нормальной величине напряжения смещения относительно невелик.




Фиг. 3.9. Вольт-амперная характеристика сернисто-висмутового фотосопротивления.

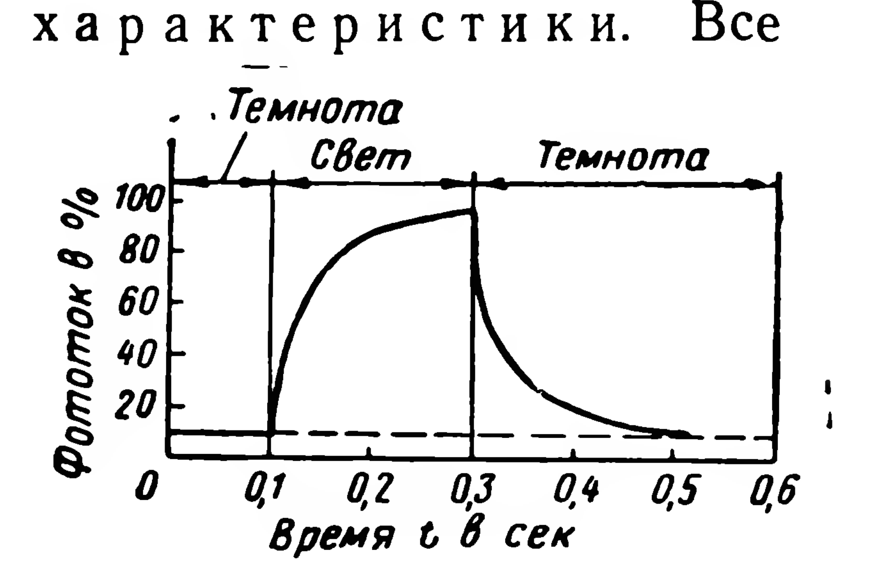
Для уменьшения шумов, появляющихся при проникновении воздуха в чувствительный слой при вибрациях, тепловые индикаторы помещаются в вакууме. Величина шума чувствительного элемента оценивается эквивалентной мощностью шума, которая соответствует инфракрасной мощности (в *вт*) на входе, создающей на выходе элемента сигнал, равный среднеквадратичному значению сигнала шумов в соответствующей полосе частот. Так, например, эквивалентная мощность шумов теплового болометра при полосе частот 1 *гц* приближенно составляет $10^{-10}$ *вт*, а для охлажденного фотосопротивления из сернистого свинца при полосе частот 1 *гц* она равна примерно $10^{-11}$ *вт*. С чувствительного элемента может быть получен четкий сигнал лишь в том случае, если мощность (энергия), поступившая на чувствительный элемент от цели, больше эквивалентной мощности шума. Из этих сообра-

жений можно оценить дальность обнаружения тепловой головкой самонаведения по формуле (3.2):

$$L_{max} = \sqrt{\frac{E_{т} k_1 k_2 S}{E_{ш.\,эк}\, k_3}},$$

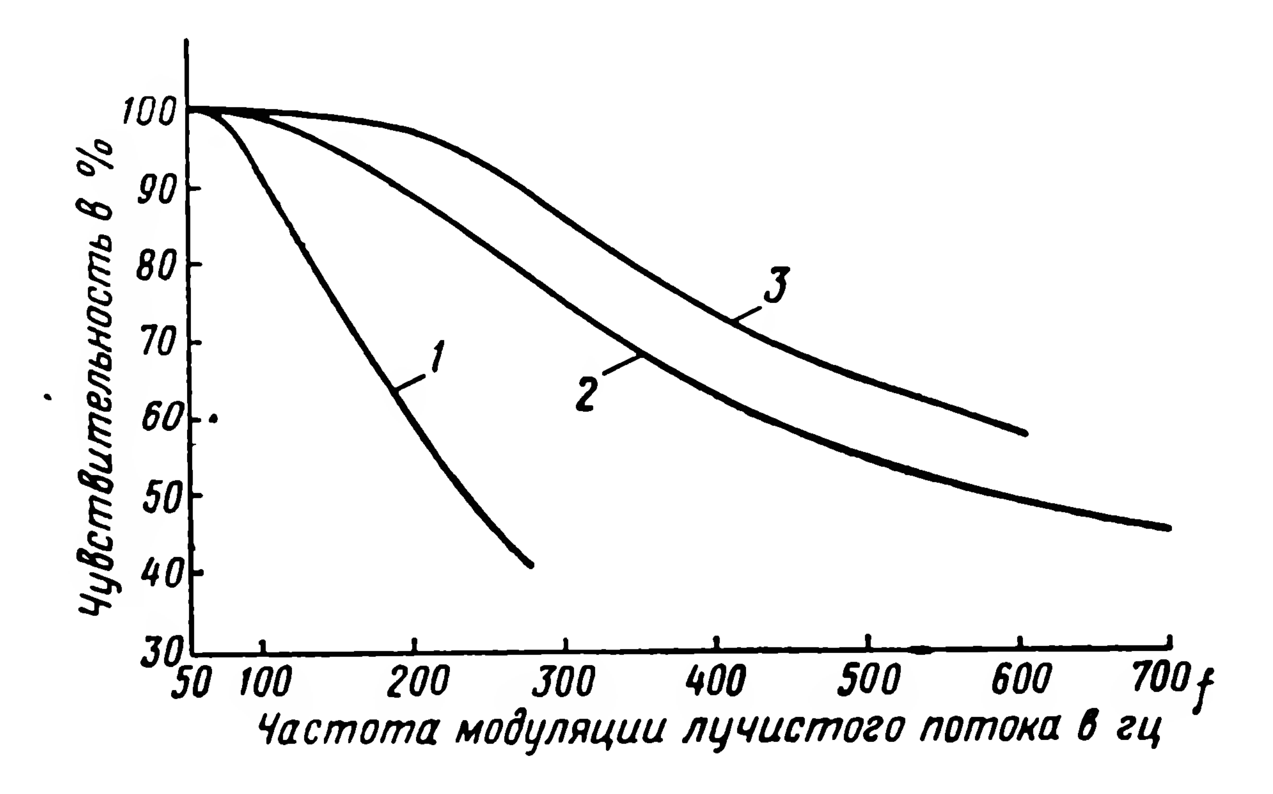
где $E_{ш.\,эк}$ — эквивалентная энергия шума;
$k_3$ — коэффициенты запаса $k_3 > 1$.

Частотные и временные характеристики. Все чувствительные элементы, реагирующие на инфракрасные лучи, обладают запаздыванием: фототок при облучении или затемнении их изменяется не мгновенно, а с некоторым отставанием по времени. Время запаздывания — это время, необходимое для достижения фототоком величины, равной 95% от максимального значения. Запаздывание при спадании фототока отличается от запаздывания при нарастании его: обычно время нарастания меньше времени спадания.




Фиг. 3.10. К переходным процессам в селеновом фотосопротивлении

На фиг. 3.10 приведена кривая переходного процесса в цепи с селеновым фотосопротивлением. Как видно из графика, время




Фиг. 3.11. Амплитудно-частотные характеристики.
1 — болометр из золота с покрытием тонкой пленкой, 2 — сернисто-таллиевое фотосопротивление, 3 — фотосопротивление из сернистого свинца.

нарастания и спадания фототока с момента изменения освещения составляет около 0,2 *сек*. Для сернистого свинца время запаздывания составляет около $3 \cdot 10^{-4}$ *сек*. У фотосопротивлений одного

и того же химического состава разброс времени запаздывания может достигать ±50% от среднего для данного типа значения. Болометры с металлической пленкой из золота имеют время запаздывания порядка $4 \cdot 10^{-3}$ *сек* *.

При облучении чувствительных элементов промодулированным лучистым потоком уменьшается амплитуда выходного сигнала при увеличении частоты модуляции $f$. На фиг. 3.11 приведены амплитудные характеристики некоторых чувствительных элементов.

## § 3.3. КООРДИНАТЫ ИНФРАКРАСНЫХ ГОЛОВОК САМОНАВЕДЕНИЯ

В инфракрасных системах обнаружения, наведения или управления для собирания и фокусирования излучения инфракрасной энергии могут применяться параболические зеркала. Подобно видимому свету сфокусированный поток инфракрасного излучения прямо пропорционален квадрату диаметра и обратно пропорционален квадрату фокусного расстояния зеркала. Чем больше мощность инфракрасного излучения, сфокусированного зеркалом, тем меньше может быть площадь чувствительного слоя чувствительного элемента, что, в свою очередь, снижает его запаздывание.

Для лучшей фокусировки потока инфракрасного излучения (сверх даваемой зеркалом) перед чувствительным элементом в некоторых случаях располагают линзы, выполненные из материала, прозрачного для инфракрасных лучей. В целях повышения собирательной способности зеркала в пределах инфракрасного спектра поверхность его покрывают тонкой пленкой золота или алюминия.

Чувствительные элементы, система фокусировки, усилители и другие элементы, входящие в состав головки самонаведения, помещают в головной части снаряда. Для защиты чувствительного элемента и оптики от внешних механических воздействий носовую часть снаряда закрывают обтекателем, материал которого должен обладать:

1) достаточной жесткостью и прочностью;

2) высокой степенью прозрачности для той части спектра инфракрасной энергии, в которой работает данная головка самонаведения;

3) высокой теплопроводностью для отвода тепла в обойму обтекателя.

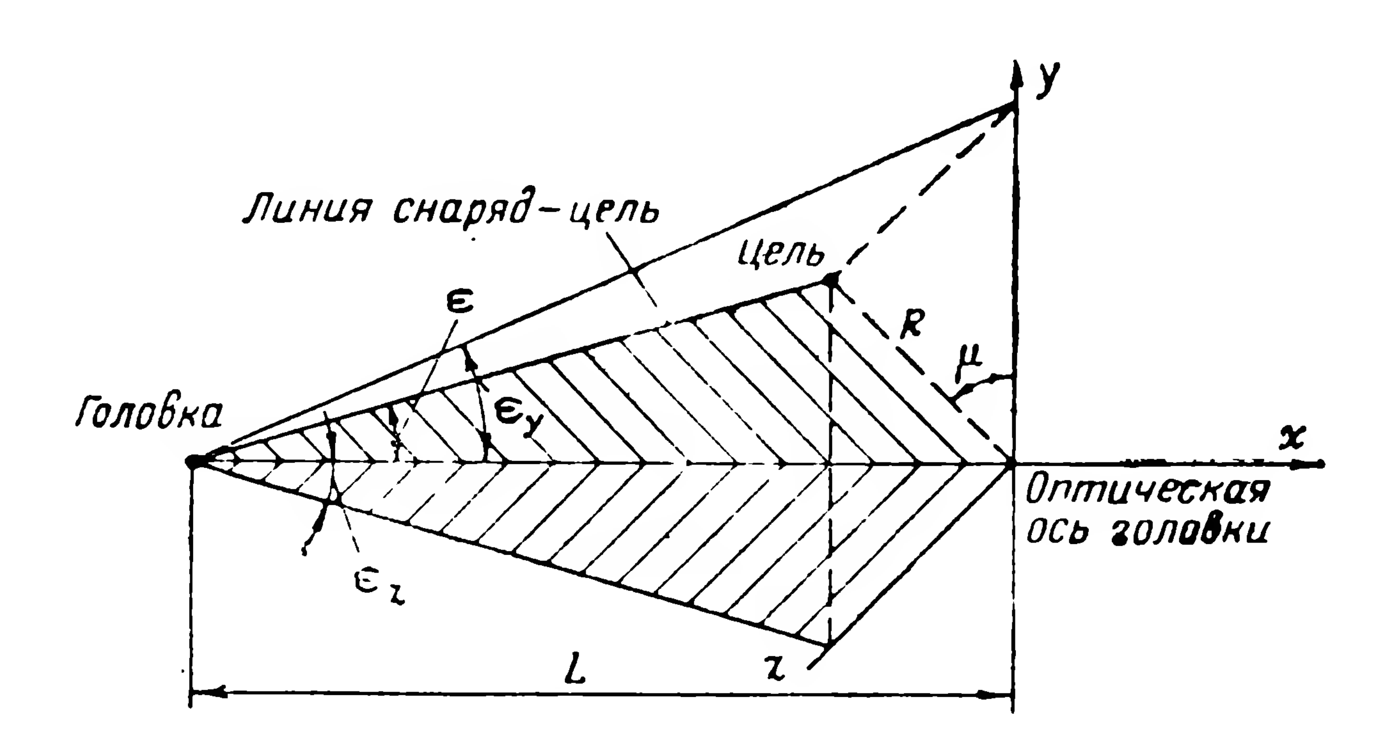
Для увеличения прозрачности на материал обтекателя наносят покрытия, аналогичные покрытиям «просветленных» оптиче-

---

* Р. Смит, Ф. Джонс, Р. Чесмер, Обнаружение и измерение инфракрасного излучения, ИЛ, 1959.

ских линз, что позволяет увеличить пропускание излучения инфракрасной энергии на 20—15%.

Чувствительный элемент и оптика дают возможность лишь обнаружить наличие источника инфракрасного излучения (цель), но необходимо, кроме того, определить положение этого источника (цели) относительно снаряда. На фиг. 3.12 показано относительное расположение цели и снаряда.




Фиг. 3.12. К геометрическому соотношению определения положения снаряда относительно цели.

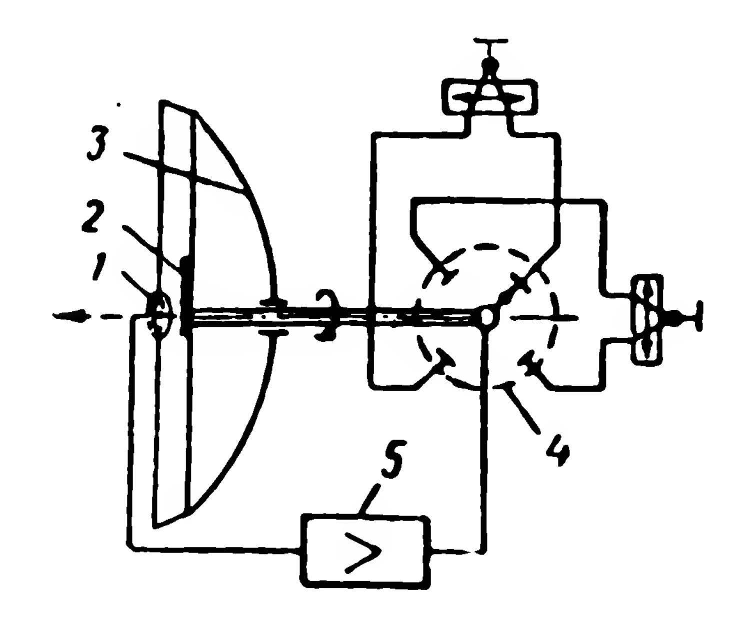
Положение цели относительно снаряда можно определить в системе полярных координат, вычислив $\varepsilon = \arcsin R/L$ и $\mu$, или в системе декартовых координат

$$\varepsilon_y = \arcsin \frac{R \cos \mu}{L}; \qquad \varepsilon_z = \arcsin \frac{R \sin \mu}{L}. \tag{3.3}$$

Выбор системы координат определяется способом управления самонаводящимся снарядом. Для определения относительного положения в головках самонаведения используется модуляция потока излучения от цели. На фиг. 3.13 приведена одна из принципиальных схем головки самонаведения *. Чувствительный элемент *1* располагается в фокусе параболического отражателя *3*. На пути между зеркалом и чувствительным элементом вращается модулирующий диск *2*. Ток чувствительного элемента усиливается в усилителе фототока *5* и поступает в систему управления снаряда. Для некоторых типов модулирующих дисков (см. фиг. 3.14, *а*) необходим коммутатор выходных сигналов *4* (см. фиг. 3.13), который расположен на приводном валу диска и обеспечивает четыре переключения за один оборот.

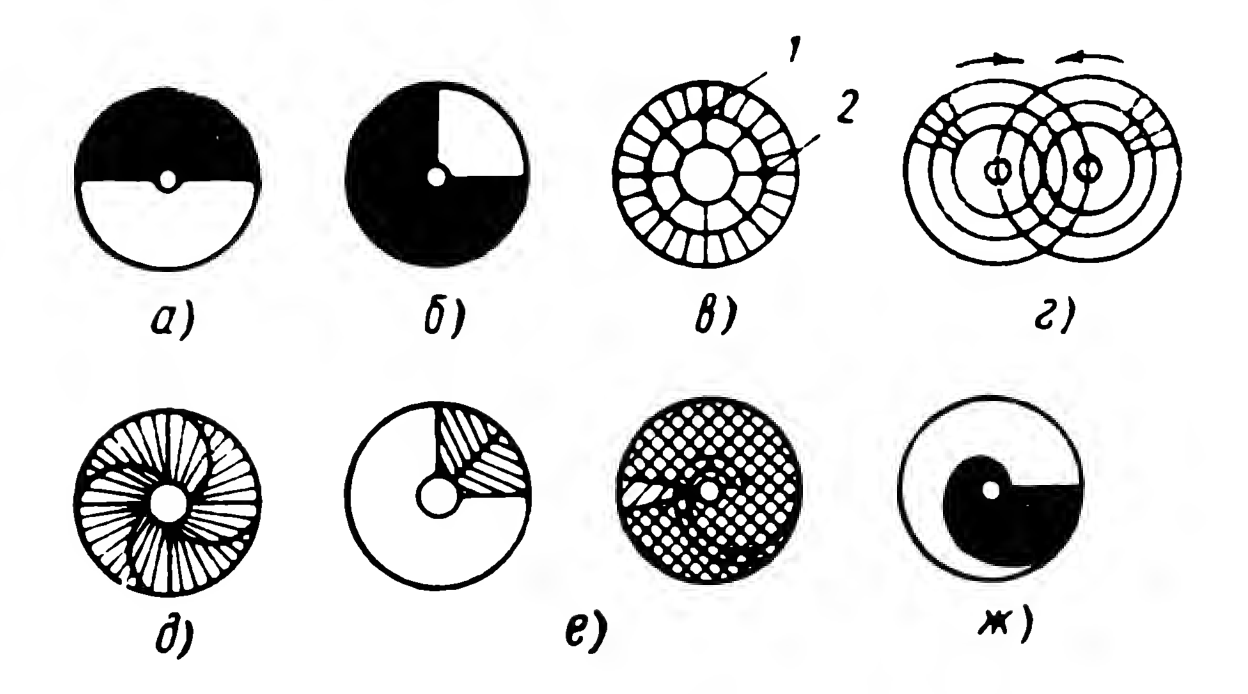
На фиг. 3.14 изображены модулирующие диски с различным по форме нанесением вещества, не пропускающего инфракрасные

* Ф. Мюллер, Телеуправление, ИЛ, 1957.

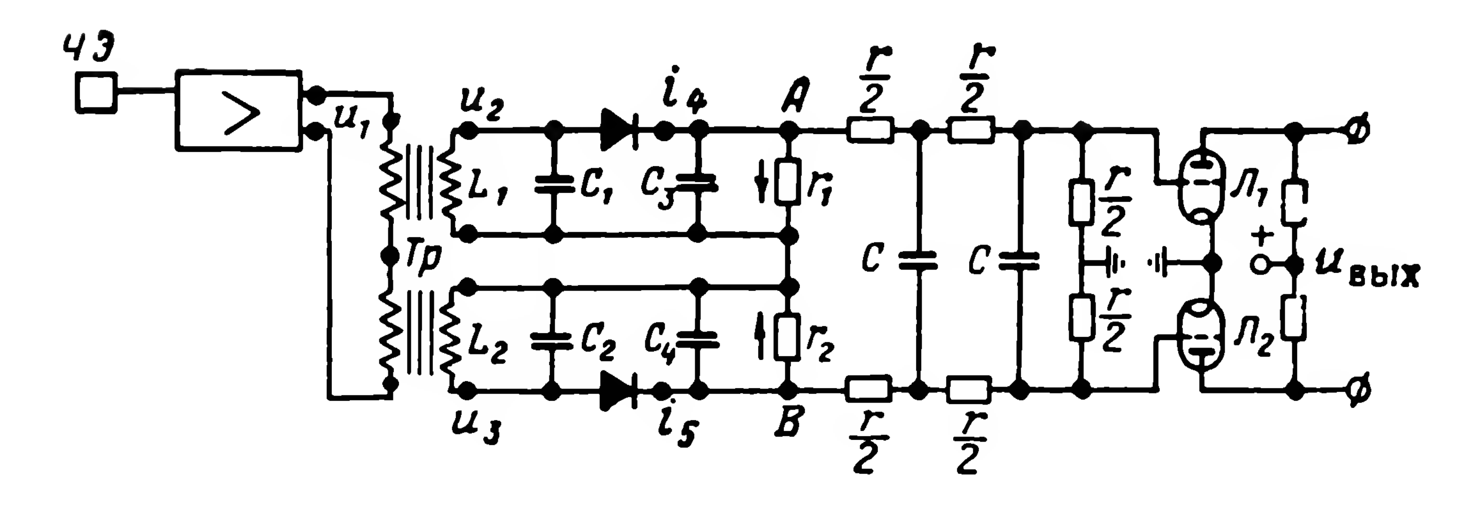



Фиг. 3.13. Принципиальная схема головки самонаведения.

*1* — чувствительный элемент, *2* — модулирующий диск, *3* — отражатель, *4* — коммутатор выходных сигналов, *5* — усилитель.




Фиг. 3.14. Модулирующие диски инфракрасной головки самонаведения.




Фиг. 3.15. Принципиальная схема головки самонаведения.

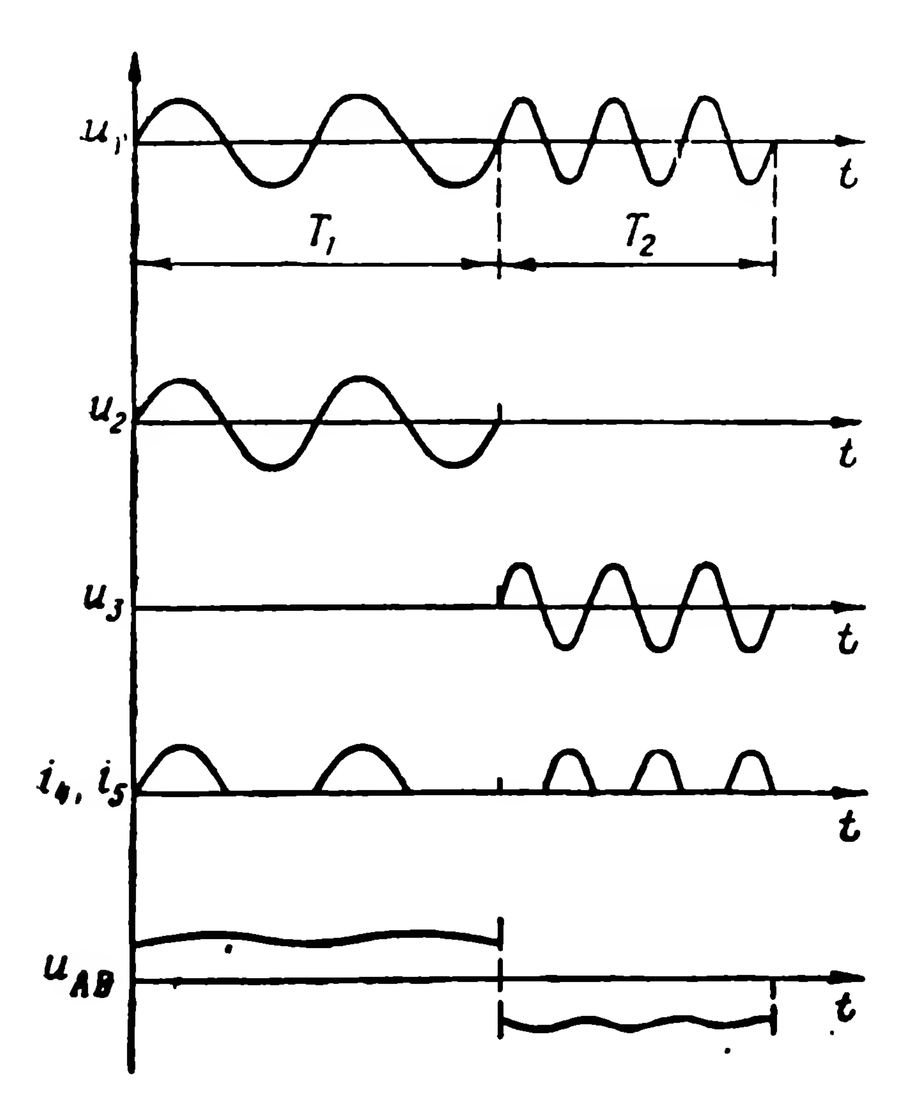
лучи. При использовании дисков, приведенных на фиг. 3.14, *а* и 3.14, *б*, оптическая ось проходит через центр диска. При отклонении оптической оси от направления на цель, изображение цели смещается по радиусу диска и в течение разных промежутков времени с чувствительного элемента снимается импульс тока. Практически применение таких дисков позволяет получить сигналы управления типа «да — нет». Величина тока зависит от излучения тепловой энергии цели и увеличивается с уменьшением дальности до цели. Основным недостатком такой системы является слабая помехозащищенность. Все неравномерности излучения фона, окружающего цель, вызывают ложные сигналы, трудно отличимые от полезного.

При применении дисков (см. фиг. 3.14, *в*), на которых по концентрическим окружностям нанесены с различной частотой риски с веществом, не пропускающим инфракрасные лучи, частота модуляции повышается. Фотоэлемент поставлен за модуляционным диском. Если оптическая ось направлена не на цель, то в этом случае в зависимости от того, на какой ряд прорезей попадает сфокусированный оптикой поток энергии от цели, на выходе усилителя фототока получается сигнал большей или меньшей частоты, который через соответствующие фильтры подается в систему управления снаряда. Таким образом может быть определено смещение цели в одной плоскости. При постановке второй оптической системы и чувствительного элемента, повернутых относительно первого на 90° (точки *1* и *2* на фиг. 3.14, *в* показывают положение проекций оптических осей), удается определить смещение цели в другой плоскости. Точно так же можно получить сигналы, пропорциональные отклонениям в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, установкой двух дисков с различным числом прорезей (см. фиг. 3.14, *г*). При этом образуются четыре перекрывающихся поля, каждое из которых определяет две частоты из четырех возможных частот модуляции. С выхода усилителя фотоэлемента такая смесь частот подается в фильтрующие каскады. По выделенным частотам можно судить о направлении оптической оси прибора и линии снаряд — цель. При применении дисков, приведенных на фиг. 3.14, *в* и *г*, также получаются сигналы «да — нет». Пропорциональные сигналы управления можно получить при использовании дисков, выполненных по фиг. 3.14, *д*.

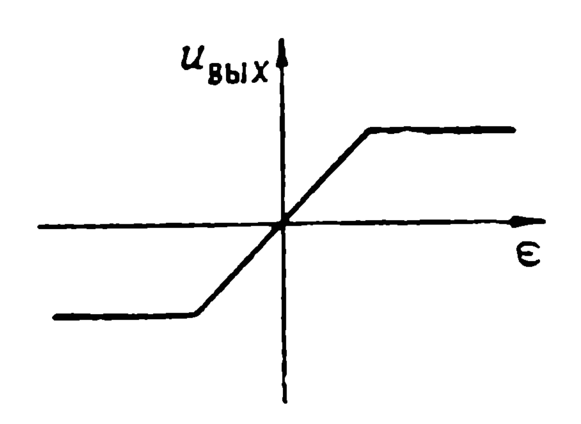
При перемещении изображения цели вдоль радиуса изменяется время модуляции светового потока частотами $f_1$ и $f_2$. Соотношение времен пропорционально $\varepsilon_y$ или $\varepsilon_z$. Принципиальная схема, посредством которой можно определить сигнал, пропорциональный соотношению времен, представлена на фиг. 3.15. Фототок чувствительного элемента усиливается и поступает на первичные обмотки трансформатора Тр. В течение времени $T_1$ напряжение изменяется с частотой $f_1$ и в течение времени $T_2$ — с частотой $f_2$. Вто-

ричные обмотки трансформатора Тр с индуктивностью $L_1$ и $L_2$ с конденсаторами $c_1$ и $c_2$ образуют резонансные фильтры, настроенные соответственно на частоты $f_1$ и $f_2$. При поступлении сигнала с частотой $f_1$ ток проходит в верхней половине схемы, с частотой $f_2$ — в нижней. Выпрямитель в каждой половине схемы пропускает ток лишь в течение половины периода. С помощью конденсаторов $c_3$ и $c_4$ выделяется постоянная составляющая тока и он поступает на сопротивления $r_1$ и $r_2$. Токи в сопротивлениях $r_1$ и $r_2$ направлены навстречу друг другу и напряжение между точками $AB$ равно разности напряжений на сопротивлениях $r_1$ и $r_2$.

На фиг. 3.16 приведены графики изменения напряжения в отдельных частях схемы. В результате фильтрации напряжения в двухзвенном фильтре на лампы $Л_1$ и $Л_2$ (см. фиг. 3.15) поступают постоянные напряжения. Приращения напряжения на сетках ламп $Л_1$ и $Л_2$ имеют одинаковые знаки. Модуль разности приращений напряжения зависит от величины разности $T_1 - T_2$. Величина напряжения $u_{вых}$ пропорциональна отношению $\left| \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2} \right|$, а знак $u_{вых}$ определяется знаком разности $T_1 - T_2$. На фиг. 3.17 приведена зависимость выходного напряжения рассмотренной головки самонаведения от сигнала рассогласования — угла $\varepsilon$ между оптической осью головки и направлением снаряд — цель.




Фиг. 3.16. Графики изменения напряжения, поясняющие работу схемы фиг. 3.15.




Фиг. 3.17. Характеристика головки самонаведения.

Некоторые формы модуляционных дисков (см. фиг. 3.14, *в*, *г*, *д*) позволяют получить сигналы управления в декартовой системе координат, а диски, представленные на фиг. 3.14, *е*, *ж*, — в полярной системе координат. Два диска с вырезами

(см. фиг. 3.14, *е*) вращаются в одном и том же направлении, но с различными скоростями; на одном из них вырез в виде сектора, на другом — в виде спиральной щели. Вырез в виде сектора позволяет определить угол $\mu$, а спиральная щель — угол $\varepsilon$. Усиленный фототок распределяется вращающимся с дисками коммутатором по соответствующим каналам управления.

На диске, приведенном на фиг. 3.14, *ж*, нанесен слой по спирали Архимеда, не пропускающий инфракрасные лучи, и поэтому в фотоэлементе возникают импульсы тока, продолжительность которых пропорциональна удалению изображения цели от центра щели. Изображение цели получается в виде светящейся точки, сфокусированной в плоскости диска. Синхронно с диском вращается генератор переменного тока. Фаза импульсов фототока относительно фазы синусоидального напряжения, выдаваемого генератором, позволяет определить углы $\varepsilon$ и $\mu$ при помощи счетно-решающего устройства.

Все сказанное выше справедливо в том случае, если изображение цели представляет собой точку. При приближении снаряда к цели ее изображение увеличивается и на чувствительный элемент могут попадать инфракрасные лучи, промодулированные одновременно двумя частотами, т. е. четкое определение угла между оптической осью и направлением на цель нарушается — головка «слепнет».

Одной из основных частей инфракрасных головок самонаведения являются электронные усилители. При уменьшении дальности количество энергии инфракрасного излучения, пришедшей к чувствительному элементу, увеличивается, а следовательно, увеличивается и фототок. Поэтому коэффициент усиления усилителей необходимо изменять — уменьшать пропорционально квадрату дальности. Для этого ставят автоматический регулятор усиления (АРУ), и все же на определенном расстоянии до цели фототок будет настолько велик, что рабочая точка усилителей перейдет на участок насыщения и с головки при любом перемещении снаряда пойдет максимальный по величине сигнал. Это является второй причиной «ослепления» головки.

Собственные шумы усилителей головок желательно свести до минимума.

Источниками шумов, способных подавить слабый сигнал, поступающий от индикатора, являются лампы, сопротивления и проводники. При сравнительно низких частотах сигнала, приходящего от чувствительного элемента, вызванных малыми скоростями вращения координационных дисков, необходима очень точная регулировка и тщательная фильтрация напряжений питания цепей накала и остальных электродов ламп. Для уменьшения влияния наводок обычно первый каскад усиления размещают возможно ближе к индикатору инфракрасного излучения.

## § 3.4. СРАВНЕНИЕ ПАССИВНЫХ, АКТИВНЫХ И ПОЛУАКТИВНЫХ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ГОЛОВОК САМОНАВЕДЕНИЯ

Пассивная радиолокационная головка самонаведения не имеет устройства для облучения цели, поэтому она проста, а ее действие — скрыто от противника. Пассивная радиолокационная головка самонаведения применяется, если целью является радиолокатор или какой-либо другой объект, имеющий непрерывно или длительно действующий радиопередатчик в диапазоне волн, пригодном для самонаведения.

Полуактивные головки обладают тем преимуществом, что мощный источник энергии располагается на пункте наведения и не гибнет вместе со снарядом. Поэтому бортовая аппаратура при полуактивной головке более проста, а следовательно, дешевле и легче, чем при активной головке. Так как мощность и направленность радиолокационного облучающего передатчика на снаряде не может быть в принципе сделана такой большой, как на пункте наведения, то и дальность действия снаряда при активной системе наведения получается меньше, чем при полуактивной.

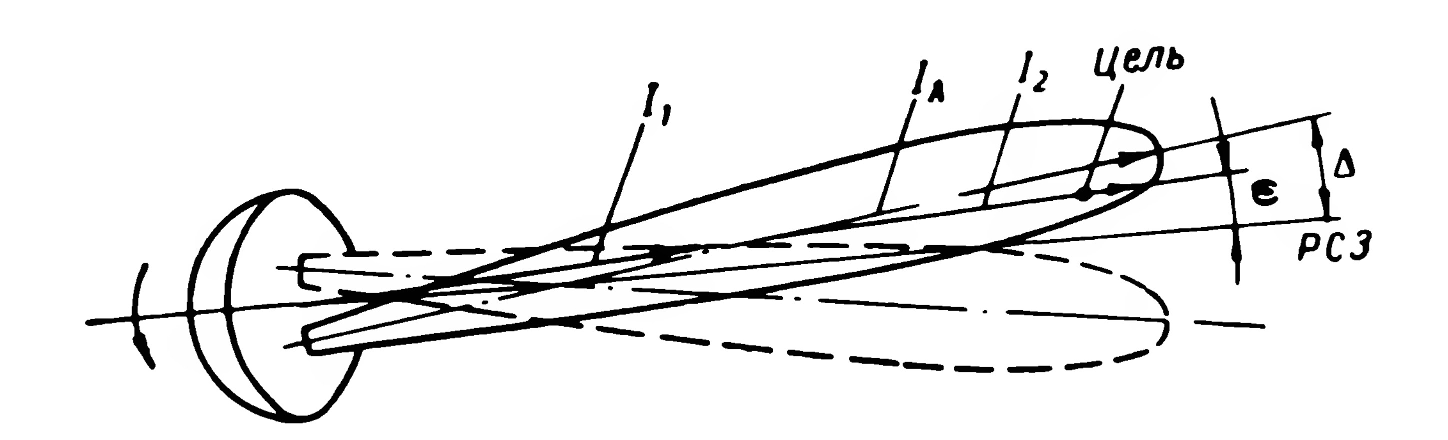
Активные головки самонаведения обеспечивают независимость процесса самонаведения от работы пункта наведения, что целесообразно в случае любого другого подвижного пункта наведения. Кроме того, при работе активной радиолокационной головки демаскируется лишь снаряд, а не пункт наведения. Активная радиолокационная головка может оказаться более целесообразной в тех случаях, когда процесс самонаведения должен начинаться не с момента старта, а лишь вблизи цели, т. е. на большом расстоянии от пункта наведения.

Из приведенных соображений следует, что тип радиолокационной головки самонаведения выбирают из тактических соображений и обычно оговаривают техническим заданием на снаряд.

## § 3.5. ПОЛУЧЕНИЕ СИГНАЛА ОШИБКИ В РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ГОЛОВКАХ

Для измерения угла между осью головки самонаведения и линией снаряд — цель можно применять любой из известных методов пеленгации, используемых в радионавигации и радиолокации: метод равносигнальной зоны, пеленгации по максимуму, пеленгации по минимуму и др. Однако метод равносигнальной зоны находит более широкое применение в головках самонаведения, так как он в большей степени удовлетворяет основным требованиям, предъявляемым к ним.

Метод равносигнальной зоны основан на сравнении сигналов, принятых несколькими или одной антенной, но при различных положениях ее диаграммы направленности. Равносигнальная зона может быть пространственной или плоской. Комбинация двух плоских равносигнальных зон, позволяющих измерить соответственно отклонения $\varepsilon_y$ и $\varepsilon_z$ (см. фиг. 3.12), образует пространственную равносигнальную зону. Пространственная равносигнальная зона может быть образована вращением диаграммы направленности.




Фиг. 3.18. Принцип образования равносигнальной зоны.

Этот принцип чаще всего применяют в головках самонаведения *. Антенна и отражатель активной головки изображены на фиг. 3.18, на которой показаны два положения диаграммы направленности. Антенна вращается с постоянной угловой скоростью $\Omega$, причем ось $I_A$ диаграммы направленности наклонена на угол $\Delta$ относительно оси вращения антенны, являющейся осью равносигнальной зоны. Таким образом, при любом положении антенны в направлении равносигнальной зоны излучается одинаковое количество энергии активной головкой и также принимается активной, полуактивной и пассивной головками. Если равносигнальная зона (РСЗ) направлена не на цель и угол $\varepsilon$ между равносигнальной зоной и направлением на цель мал, то при вращении антенны амплитуда принятого сигнала изменяется по закону

$$u_m(t) = u_{0m}[1 + m\cos(\Omega t + \mu)], \tag{3.4}$$

где $m = k\varepsilon$;

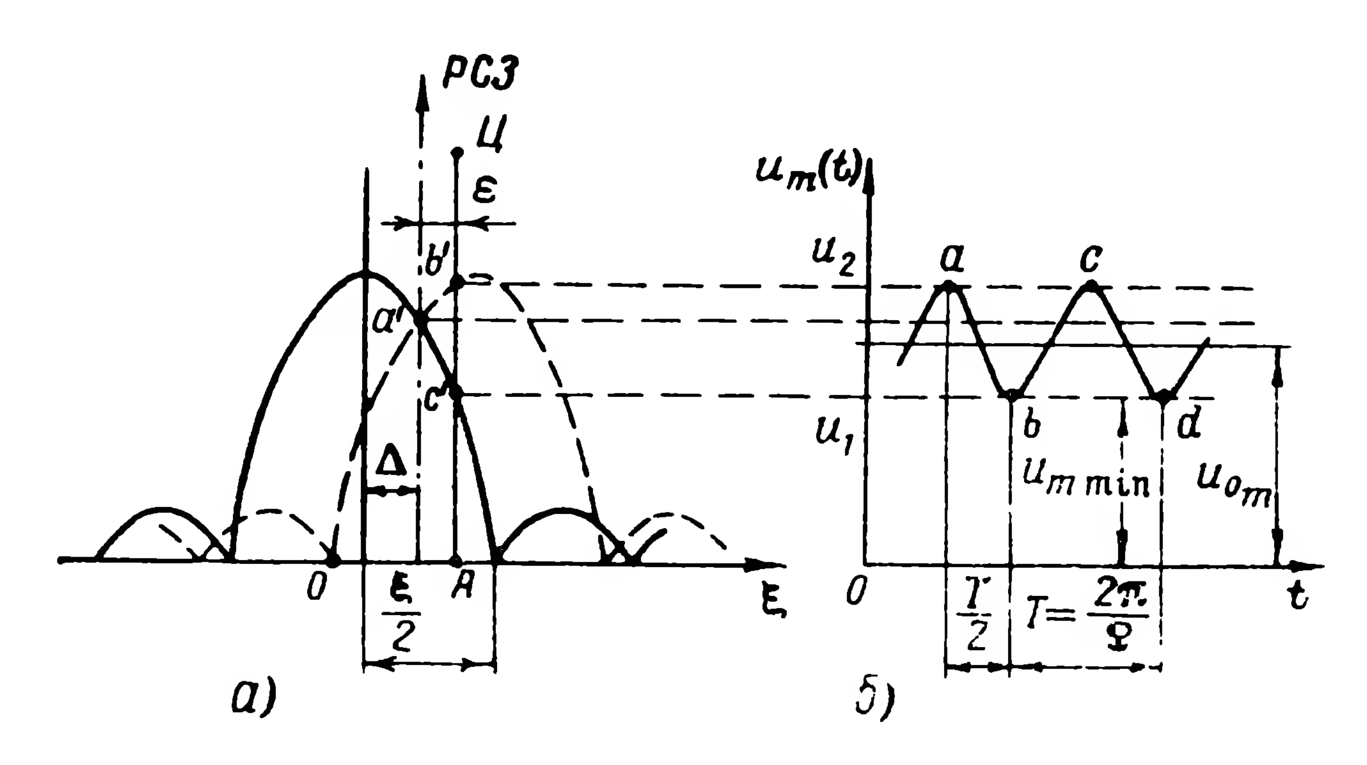
$k$ — постоянный коэффициент, зависящий от параметров антенны;

$\mu$ — угол, образуемый плоскостью, в которой расположена цель, с плоскостью $yx$ (см. фиг. 3.12).

---

* Л. С. Гуткин, Принципы радиоуправления беспилотными объектами, изд. «Советское радио», 1959.

Покажем справедливость соотношения (3.4). На фиг. 3.19, *а* приведено сечение диаграммы направленности плоскостью чертежа. Сплошной линией изображено сечение диаграммы направленности в момент времени $t$, пунктиром — через время $T/2=\pi/\omega$, т. е. при повороте диаграммы направленности на 180°. Здесь же




Фиг. 3.19. Сечение диаграммы направленности и образование сигнала управления.

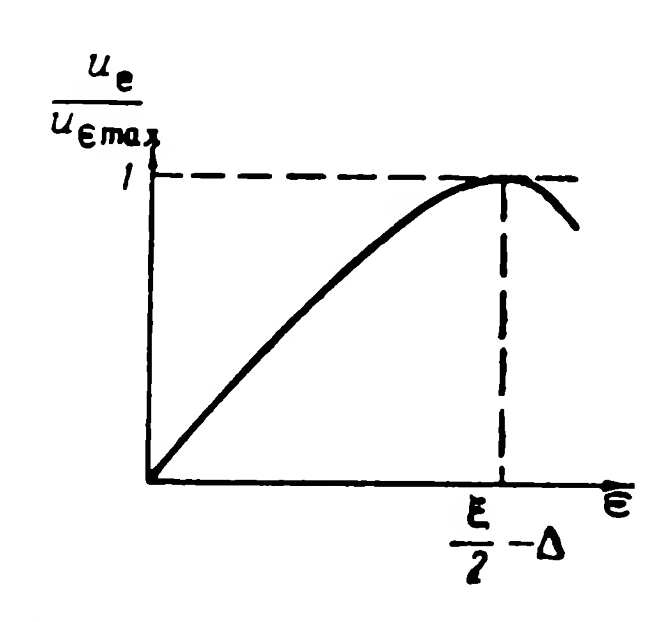
показаны боковые лепестки диаграммы направленности. На фиг. 3.19, *б* приведена зависимость от времени интенсивности сигнала, принятого антенной. Очевидно, чем больше угол ε, тем больше разность $u_2 - u_1$, половинное значение которой является амплитудой периодической составляющей сигнала. При $\varepsilon<\Delta$ с достаточной для практики степенью точности можно считать, что амплитуда этой периодической составляющей пропорциональна рассогласованию ε. Приемник головки имеет автоматическую регулировку усиления, обеспечивающую независимость выходного напряжения от величины $u_{0m}$. Амплитуда входного сигнала для пассивной и полуактивной головок зависит от квадрата дальности, а для активной головки амплитуда входного сигнала изменяется пропорционально четвертой степени дальности. После усиления и детектирования принятого антенной сигнала на выходе приемника получим напряжение

$$u_\varepsilon = k_1 \varepsilon \cos(\Omega t + \mu), \tag{3.5}$$

где $k_1$ — постоянный коэффициент.

Напряжение $u_\varepsilon$ называется сигналом ошибки. На фиг. 3.20 приведена зависимость амплитуды сигнала ошибки от рассогласования. При $\varepsilon<\frac{\xi}{2}-\Delta$ (где ξ — угол диаграммы направленно-

сти) практически можно считать характеристику линейной. При $\varepsilon \geqslant \frac{\xi}{2} - \Delta$ после достижения максимального значения $u_\varepsilon$ начинает уменьшаться. Таким образом, величина линейной зоны изменения амплитуды сигнала ошибки зависит от ширины $\xi$ диаграммы направленности антенны и от $\Delta$-угла наклона диаграммы относительно оси вращения антенны. Как известно, при уменьшении ширины диаграммы направленности увеличивается дальность, помехоустойчивость и коэффициент усиления радиолокационной системы.

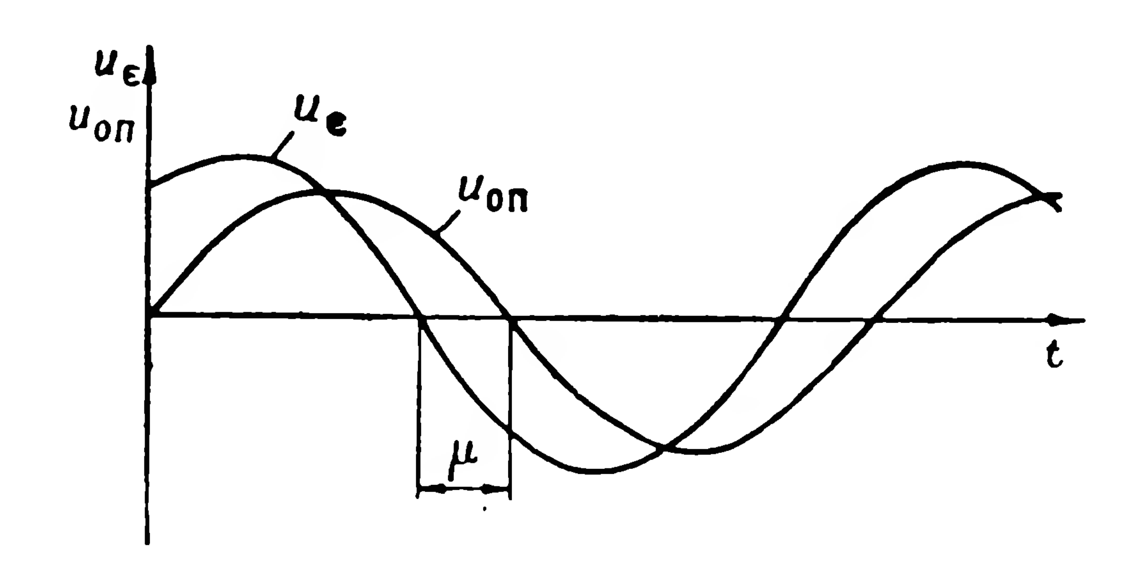



Фиг. 3.20. Зависимость амплитуды сигнала ошибки от рассогласования.

Однако при сужении диаграммы направленности, а следовательно, и угла $\Delta$ затрудняется захват цели. Поэтому величина угла зрения и эквивалентная ей ширина линейного участка зависимости амплитуды выходного напряжения от угла рассогласования $\varepsilon$ в большинстве случаев составляет $\pm 5-10°$.

## § 3.6. ОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛА УПРАВЛЕНИЯ

Как показывает формула (3.5), сигнал ошибки содержит два параметра $\varepsilon$ и $\mu$, характеризующие относительное положение снаряда и цели. Для управления плоскокрылыми снарядами необходимо иметь сигналы, пропорциональные $\varepsilon$ и $\mu$, а для крестокрылых снарядов — $\varepsilon_y$ и $\varepsilon_z$. Рассмотрим получение сигналов управления для каждой из указанных аэродинамических форм снаряда.

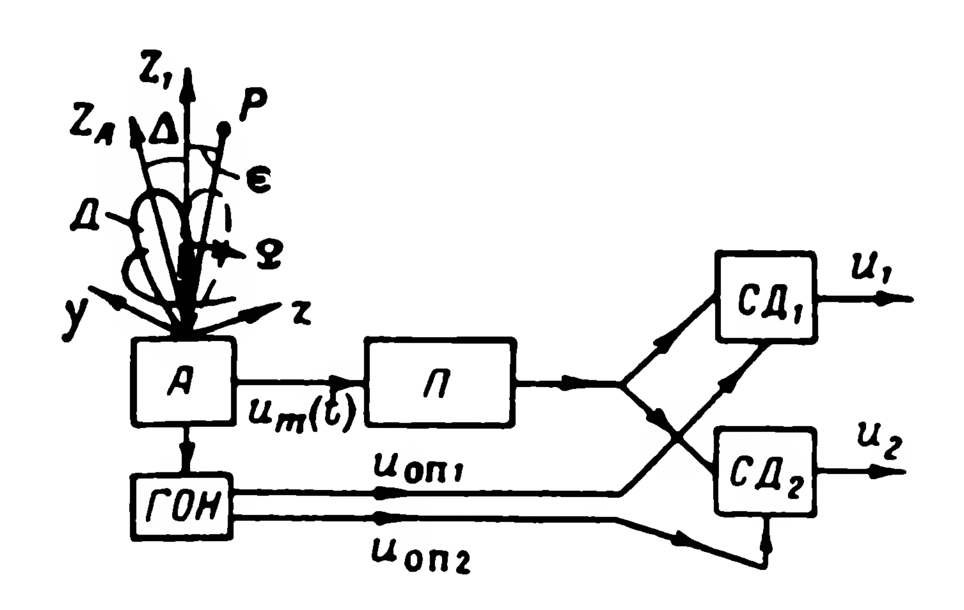



Фиг. 3.21. К определению фазы сигнала ошибки.

Плоскокрылые снаряды. Для управления плоскокрылым снарядом необходимо определить амплитуду и фазу сигнала ошибки. Для получения сигнала управления, пропорционального

фазе, сигнал ошибки $u_\varepsilon$ сравнивают с опорным напряжением (фиг. 3.21). Опорное напряжение $u_{оп}$ вырабатывается генератором синусоидального опорного напряжения, который вращается синхронно с вращением диаграммы направленности. Подавая оба эти напряжения на фазочувствительные мосты, можно определить фазу $\mu$.

Крестокрылые снаряды. На фиг. 3.22 приведена функциональная схема для получения сигналов управления осесимметричными снарядами.




Фиг. 3.22. Функциональная схема получения сигналов управления снарядом.

ричными снарядами. Сигнал с антенны *А* проходит через приемник *П* и поступает на синхронные детекторы *СД*. Для получения сигналов управления и в этом случае используются сигналы генераторов опорных напряжений. На вход синхронных детекторов подаются, кроме сигнала ошибки, еще и опорные напряжения

$$\left.\begin{aligned} u_{оп1} &= U_{оп}\cos\Omega t, \\ u_{оп2} &= U_{оп}\sin\Omega t. \end{aligned}\right\} \qquad (3.6)$$

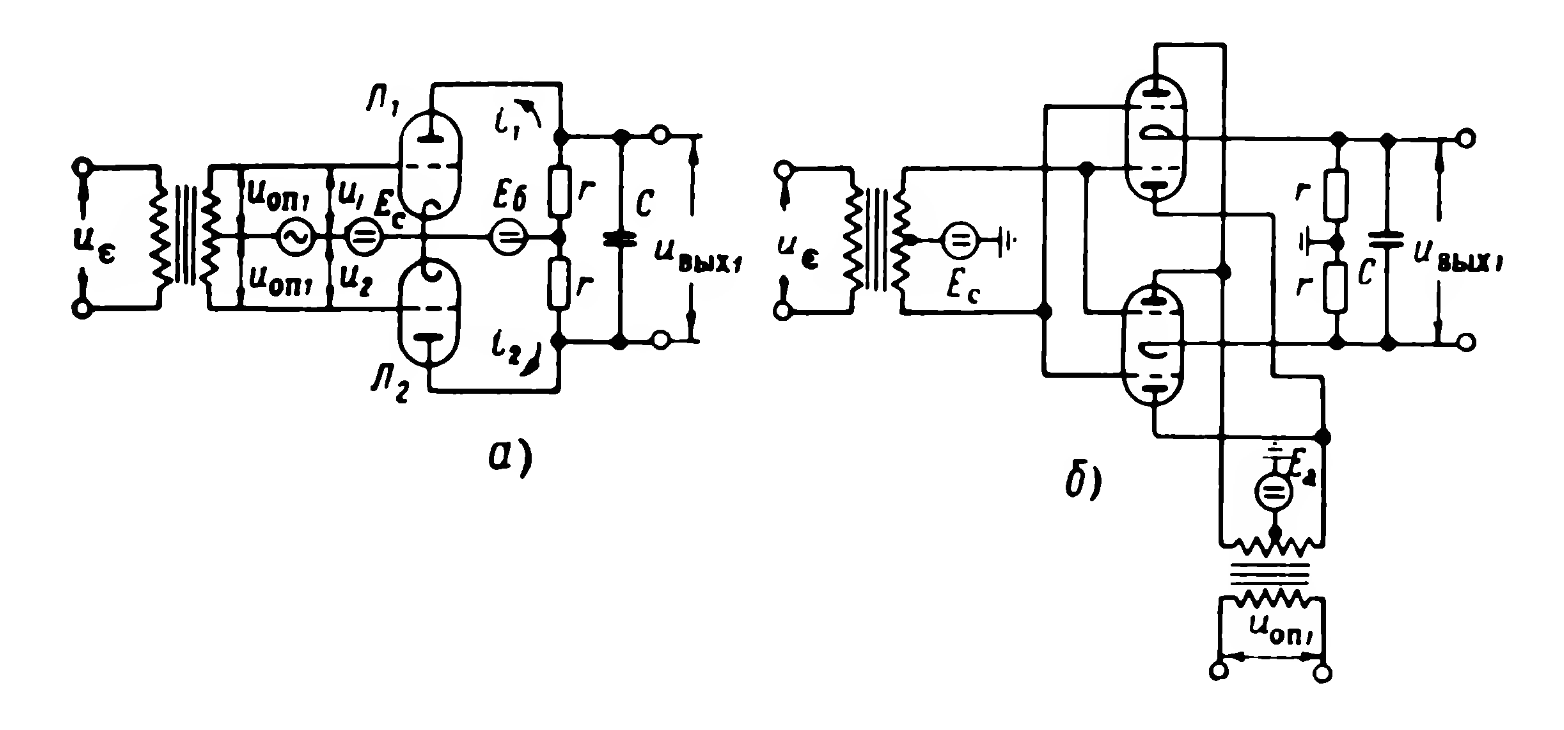
В некоторых случаях вместо генератора синусоидальных опорных напряжений и электронных синхронных детекторов применяются механические коммутаторы, переключаемые синхронно с вращением диаграммы.

В результате сопоставления сигнала ошибки с опорными напряжениями в синхронных детекторах вырабатываются напряжения $u_y$ и $u_z$, пропорциональные $\varepsilon_y$ и $\varepsilon_z$. Синхронные детекторы могут иметь различную схему. На фиг. 3.23 приведены принципиальные схемы синхронных детекторов (одного канала управления) при использовании генераторов синусоидальных опорных напряжений. Схема, приведенная на фиг. 3.23, *а*, является простейшей. К сеткам ламп $Л_1$ и $Л_2$ подводятся опорное напряжение и сигнал ошибки. Сигнал ошибки поступает в противофазе, а опорное напряжение — синфазно.

В результате переменные напряжения на сетках ламп будут

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_{\text{оп}1} + u_\varepsilon, \\ u_2 &= u_{\text{оп}1} - u_\varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

При рассмотрении будем считать лампы $Л_1$ и $Л_2$ одинаковыми.




Фиг. 3.23. Принципиальные схемы синхронного детектора.

При малом сопротивлении нагрузки ($r \ll r_i$) анодные токи ламп можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= I_а + au_1 + bu_1^2, \\ i_2 &= I_а + au_2 + bu_2^2, \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

где $a$ и $b$ — коэффициенты разложения характеристики анодного тока лампы в функции сеточного напряжения.

Члены разложения со степенями выше второй не учитываются. Пренебрегая влиянием емкости $c$ на прохождение постоянной и низкочастотной составляющей выходного сигнала, можно записать

$$u_{\text{вых}1} = i_1 r - i_2 r = r(i_1 - i_2) = r\Delta i. \tag{3.9}$$

Разность токов $\Delta i$ можно выразить на основании формул (3.7) и (3.8) через напряжение сигнала ошибки и опорные напряжения:

$$\Delta i = 2au_\varepsilon + 4bu_\varepsilon u_{\text{оп}1}. \tag{3.10}$$

Учитывая соотношения (3.5) и (3.6) и проводя некоторые преобразования, получим

$$\Delta i = 2ak_1\varepsilon\cos(\Omega t+\mu) + 4bu_0k_1\varepsilon\frac{1}{2}\cos\mu + + 4bu_0k_1\varepsilon\frac{1}{2}\cos(2\Omega t+\mu). \quad (3.11)$$

Но

$$\varepsilon_y = \varepsilon\cos\mu, \quad (3.12)$$

поэтому

$$\Delta i = 2ak_1\varepsilon\cos(\Omega t+\mu) + 2bu_0k_1\varepsilon_y + 2bu_0k_1\varepsilon\cos(2\Omega t+\mu). \quad (3.13)$$

Величина $\Omega$ зависит от частоты вращения диаграммы направленности, т. е.

$$\Omega = 2\pi f_a, \quad (3.14)$$

где $f_a$ — частота вращения антенны в *гц*.

Обычно $f_a \approx 20 \div 100$ *гц*. Функции $\varepsilon$ и $\varepsilon_y$ являются медленно меняющимися во времени. Спектр частот для этих сигналов лежит в диапазоне $0\div5$ *гц*. Поэтому для выделения сигнала, пропорционального $\varepsilon_y$, достаточно на выходе фазового детектора поставить фильтр с полосой пропускания $0\div5$ *гц*. Очевидно, что при увеличении частоты вращения антенны $f_a$ можно уменьшить постоянную времени фильтра, т. е. уменьшить запаздывание в канале образования сигнала управления. Увеличение частоты вращения антенны ограничено механической прочностью всей системы. При действии помех в сигнале ошибки могут появиться низкочастотные составляющие и тогда возникает задача их фильтрации. В этом случае используют двухтактный синхронный детектор. Возможная схема такого детектора приведена на фиг. 3.23, *б*.

Для уменьшения взаимного влияния источников опорного напряжения и напряжения сигнала ошибки они подводятся в каждой лампе к различным электродам — к сетке и аноду. При полной симметрии схемы результирующий ток первого и второго детекторов можно выразить так:

$$\left.\begin{aligned} \Delta i &= ku_\varepsilon u_{\text{оп}1}, \\ \Delta i &= ku_\varepsilon u_{\text{оп}1}, \end{aligned}\right\} \quad (3.15)$$

где $k$ — коэффициент, зависящий от параметров схемы и ламп.

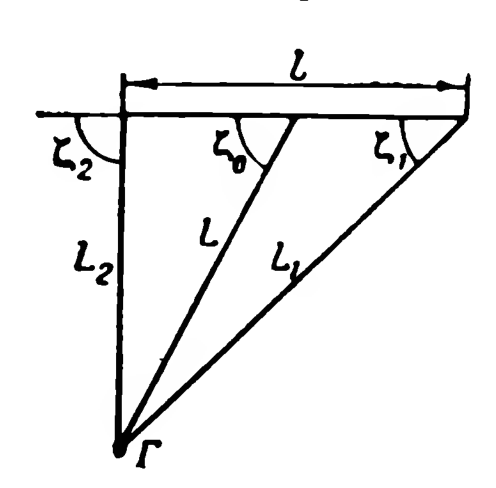
Можно показать, что напряжение на выходе фильтра, поставленного после синхронного детектора, оказывается равным

$$\left.\begin{aligned} u_{\text{вых}1} &= r\Delta i = r2bu_0k_1\varepsilon_y, \\ u_{\text{вых}2} &= r\Delta i = r2bu_0k_1\varepsilon_z. \end{aligned}\right\} \quad (3.16)$$

Таким образом могут быть получены сигналы управления. При рассмотрении действия схем не были учтены помехи, а следовательно, и те дополнения к схемам, которые предназначены для уменьшения их действия.

## § 3.7. ПОМЕХИ В РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ГОЛОВКАХ

Помехи в работе радиолокационных головок могут быть созданы в канале контроля цели, т. е. канале приема отраженных от цели сигналов. Отраженные от цели сигналы весьма слабы, в то время как облучение цели производится мощным потоком радиоволн, который облегчает противнику распознавание технических особенностей системы контроля цели и создание помех. Кроме помех, создаваемых противником, различают еще несколько видов помех, из которых наиболее важными являются:




Фиг. 3.24. График, поясняющий образование помех.

1) помехи, создаваемые внутренним шумом радиолокационного приемника, т. е. флюктуациями электронов в лампах и контурах приемника;

2) помехи, создаваемые пульсациями отраженного от цели сигнала.

Внутренние шумы приемника сказываются при любых дальностях до цели, и при больших дальностях принимаемый сигнал становится соизмерим с шумом. Таким образом, зная величину шума, можно определить предельную дальность действия головки.

Помехи, вызванные пульсацией отраженного от цели сигнала, с одной стороны, складываются с помехами от внутренних шумов и уменьшают дальность действия головки. С другой стороны, эти помехи снижают точность попадания снаряда, так как вызывают его колебания, не обусловленные выполнением наведения. Рассмотрим коротко причины пульсации отраженного от цели сигнала. На сантиметровых и дециметровых волнах длина волны мала по сравнению с линейным размером цели $l$ и диаграмма отражения от цели в любой плоскости имеет сложный многолепестковый характер.

Теоретически отражение от цели принимается как отражение от точки, а на самом деле электромагнитные колебания отражаются от цели под различными углами $\zeta$ (фиг. 3.24). Частота пульсации отраженного сигнала зависит от длины волны $\lambda$, размеров цели $l$, а также от скорости изменения угла $\zeta_0$:

$$f = \frac{2l}{\lambda} \left| \frac{d\zeta_0}{dt} \sin \zeta_0 \right|. \tag{3.17}$$

Поэтому даже при равномерном изменении угла падения луча $\zeta_0$ могут возникнуть пульсации сигнала ошибки. Если учесть, что в большинстве случаев угол $\zeta_0$ изменяется неравномерно и имеет случайные составляющие, то реальный спектр пульсаций может содержать существенные компоненты в большом диапазоне частот — от единиц до сотен герц.

Изменения угла $\zeta_0$ могут вызываться следующими основными причинами:

1) вращательными движениями цели относительно равносигнальной зоны, в частности, у самолета-цели эти движения могут быть двух видов: разворот при маневре и колебания относительно центра тяжести;

2) поступательным движением цели.

Легко оценить частоту пульсации сигнала ошибки при маневре самолета. При развороте с угловой скоростью 10—20 *град/сек* получим для $l = 15—30$ *м*, $\lambda \leqslant 10$ *см* и $\zeta_0 = 90°$

$$f_{max} = \frac{3000}{10}\left|\frac{10}{57,3}\right| \approx 50 \text{ гц},$$

$$f_{max} = \frac{6000}{10}\left|\frac{20}{57,3}\right| \approx 200 \text{ гц}.$$

При поступательном движении цели скорость изменения угла $\zeta_0$, очевидно, будет

$$\frac{d\zeta_0}{dt} \approx \frac{V}{L}\sin\zeta_0. \qquad (3.18)$$

Подставив это значение в формулу (3.17), имеем

$$f = \frac{2V}{\lambda}\frac{l}{L}\sin^2\zeta_0. \qquad (3.19)$$

Для тех же данных $l$ и $\lambda$ при $V \leqslant 300$ *м/сек* получим

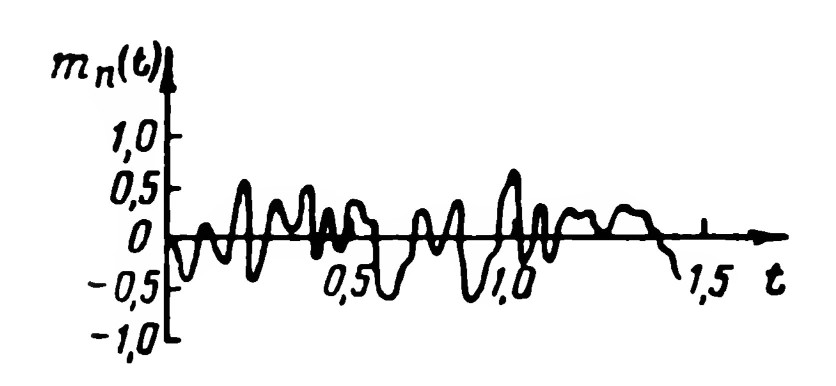
$$f_{max} \leqslant \frac{60 \div 200}{L \text{ км}} \text{ гц}.$$

Следовательно, при поступательном движении цели частота пульсации зависит от дальности и при больших дальностях ($L \approx \approx 10—15$ *км*) лежит в пределах $f_{max} \leqslant 4—20$ *гц*.

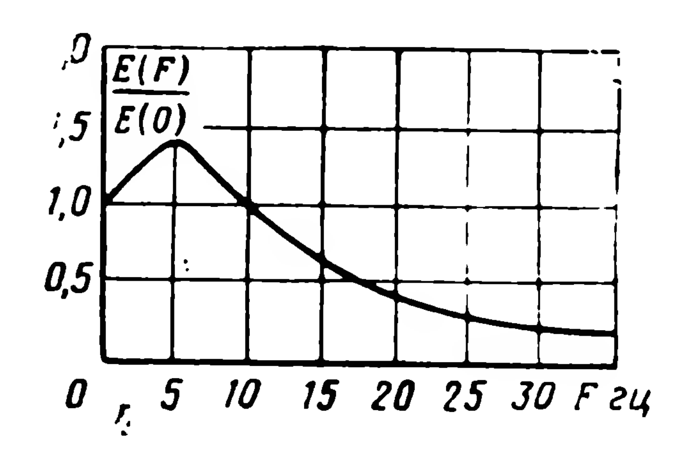
Очевидно, что частоты пульсаций, близкие к частоте вращения диаграммы направленности, будут оказывать особенно большое влияние на головку, вызывая большие погрешности. Учитывая это замечание, можно сделать вывод, что при больших дальностях основную помеху создают пульсации, вызванные вращательным движением цели, при малых дальностях — пульсации, вызванные поступательным движением цели.

На фиг. 3.25 дана типичная кривая пульсации сигнала радиолокационного приемника, полученная при отражении от цели, летящей на большой дальности и не совершающей резких маневров. На фиг. 3.26 приведен частотный спектр этой кривой.

Для ослабления пульсации сигнала можно увеличивать длину волны. Однако необходимость уменьшения размеров антенн не позволяет пойти по этому пути.




Фиг. 3.25. Изменение сигнала ошибки во времени.




Фиг. 3.26. Частотный спектр сигнала ошибки.

Увеличение частоты вращения диаграммы направленности также приводит к уменьшению влияния пульсации сигнала, но при механическом вращении антенны эта частота ограничена механической прочностью системы. Таким образом, в ряде случаев существенное снижение пульсации может оказаться затруднительным из-за значительного ухудшения технических показателей радиолокационной головки.

Для уменьшения пульсации сигнала также используют фильтры, которые ставят до детектора и после него. Параметры фильтров подбирают таким образом, чтобы частоты, соответствующие шуму, не пропускались ими. При постановке фильтров появляется инерционность в радиолокационной головке *.

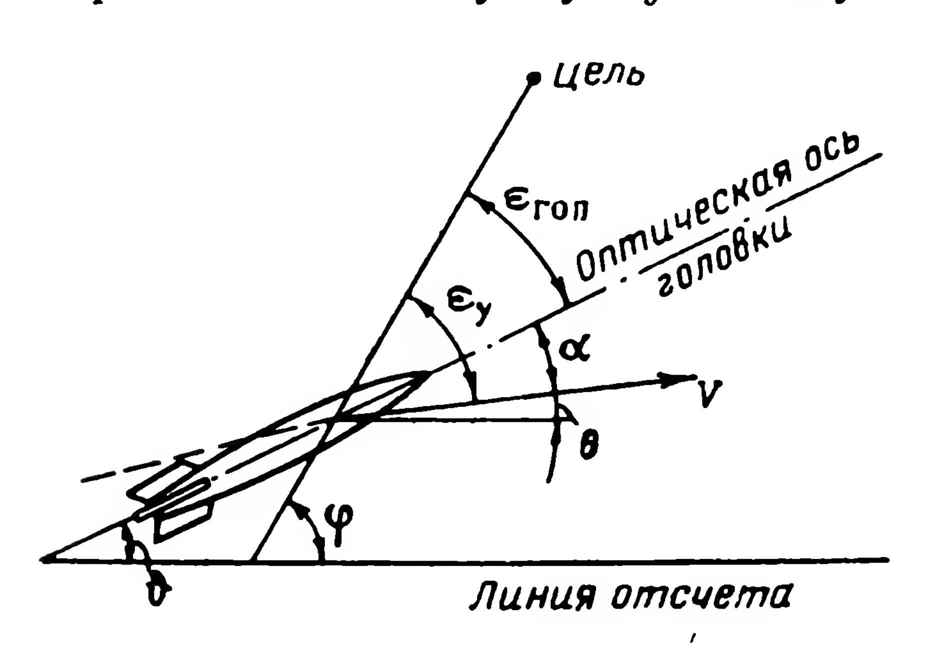
## § 3.8. ОБРАЗОВАНИЕ СИГНАЛОВ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДАХ САМОНАВЕДЕНИЯ

В предыдущих параграфах было указано, как получить сигнал, пропорциональный углу между линией снаряд-цель и оптической осью головки (см. § 3.3 и 3.6). Для реализации различных методов самонаведения, анализируемых в гл. 13, необходимо иметь сигнал управления, пропорциональный углу между линией снаряд — цель и продольной осью снаряда или вектором воздушной скорости, или же сигнал, пропорциональный угловой скорости поворота линии снаряд — цель.

* Л. С. Гуткин, Теория оптимальных методов радиоприема при флюктуационных помехах, Госэнергоиздат, 1961.

Очевидно, что наиболее просто получить сигнал, пропорциональный углу между линией снаряд — цель и продольной осью снаряда. В этом случае оптическая ось головки (любой) должна быть совмещена с продольной осью снаряда, т. е. головка самонаведения жестко скрепляется с корпусом снаряда.

Изучим более подробно получение сигнала управления, пропорционального углу $\varepsilon_y$ между линией снаряд — цель и вектором скорости в вертикальной плоскости. Геометрические соотношения для рассматриваемой задачи приведены на фиг. 3.27. Сигнал, пропорциональный углу $\varepsilon_y$, можно получить несколькими способами:




Фиг. 3.27. Схема относительного положения снаряда и цели при методе погони.

1) на снаряде оптическая ось головки совпадает все время с направлением продольной оси снаряда. Угол $\varepsilon_y$ является суммой двух углов (фиг. 3.27):

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{гол} + \alpha.$$

Сумма сигналов, пропорциональных углам $\varepsilon_{гол}$ и $\alpha$, поступает в систему управления;

2) при использовании следящей системы, поворачивающей головку относительно корпуса снаряда, и датчика угла атаки $\alpha$.

Если следящая система повернет оптическую ось головки на угол атаки относительно продольной оси снаряда, то сигнал управления, снятый с головки, будет пропорционален углу между линией снаряд — цель и вектором скорости. Прежде чем рассматривать принцип действия следящей системы, остановимся коротко на датчиках угла атаки (скольжения).

Сигнал, пропорциональный углу атаки, может быть получен с датчика углов атаки и скольжения (ДУАС). Для более точного замера углов атаки и скольжения штангу необходимо закреплять в носовой части снаряда, что при наличии головки самонаведения во многих случаях невозможно. Поэтому датчик углов атаки и скольжения обычно используется при предварительных испытаниях снарядов без системы управления. Значение угла атаки (скольжения) может быть получено косвенным путем — использованием акселерометра или демпфирующего гироскопа *.

В вертикальной плоскости на снаряд постоянно действует ускорение от силы тяжести, а также ускорение от аэродинамических сил. Найдем связь между ускорением, нормальным к траектории

* Более подробно эти приборы рассмотрены в § 5.5.

полета, и углом атаки снаряда. Нормальное ускорение определяется выражением

$$j_y = V\frac{d\theta}{dt} = \frac{Y - G\sin\theta}{m}, \tag{3.20}$$

где $Y$ — подъемная сила снаряда;
$m$, $G$ — масса и вес снаряда;
$\theta$ — угол наклона траектории, обозначенный на фиг. 3.27.

Подъемная сила $Y$ в определенном диапазоне изменения угла атаки зависит от него линейно. Следовательно, выражение (3.20) можно представить в виде

$$j_y = k\alpha - g\sin\theta, \tag{3.21}$$

где $g$ — ускорение силы тяжести;
$k = k(V, \rho, m)$ — коэффициент пропорциональности для данного снаряда, зависящий от скорости полета.

Из формулы (3.21) получим формулу связи между углом атаки снаряда и нормальным ускорением

$$\alpha = \frac{j_y + g\sin\theta}{k}. \tag{3.22}$$

В горизонтальной плоскости связь между углом скольжения и ускорением будет еще проще, так как на движение снаряда в этой плоскости не влияет сила веса

$$\beta = \frac{j_z}{k_1}, \tag{3.23}$$

где $j_z = V\frac{d\theta_б}{dt}$ — ускорение, нормальное к траектории в горизонтальной плоскости;
$\theta_б$ — угол наклона траектории в горизонтальной плоскости;
$k_1 = k_1(V, \rho, m)$ — коэффициент пропорциональности.

Из выражений (3.22) и (3.23) следует, что при постоянных или мало меняющихся скорости полета, плотности воздуха, массе снаряда и угле наклона траектории можно проградуировать акселерометр в углах атаки и скольжения. Если перечисленные параметры изменяются в широких пределах, то всегда принципиально можно их измерить и специальным счетно-решающим устройством учесть влияние этих изменений на соотношение между нормальными ускорениями в вертикальной и горизонтальной плоскостях и углами атаки и скольжения.

Рассмотрим вопрос об использовании гироскопа с двумя степенями свободы для измерения угла между вектором скорости и продольной осью снаряда. Ограничимся установлением связи

между отклонением такого гироскопа и углом скольжения. Гироскоп с двумя степенями свободы дает сигнал, пропорциональный угловой скорости продольной оси снаряда в горизонтальной плоскости. При этом ось фигуры гироскопа направлена по оси $z$, ось рамки — по продольной оси снаряда. Эта угловая скорость может быть определена выражением

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\theta_б}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \frac{j_z}{V} + \frac{d\beta}{dt} = \frac{k_1}{V}\beta + \frac{d\beta}{dt}, \tag{3.24}$$

где $\theta_б$ — угол наклона траектории в горизонтальной плоскости; $\psi$ — угол наклона продольной оси снаряда в той же плоскости.

Обозначив $\frac{k_1}{V} = \frac{1}{T}$, получим

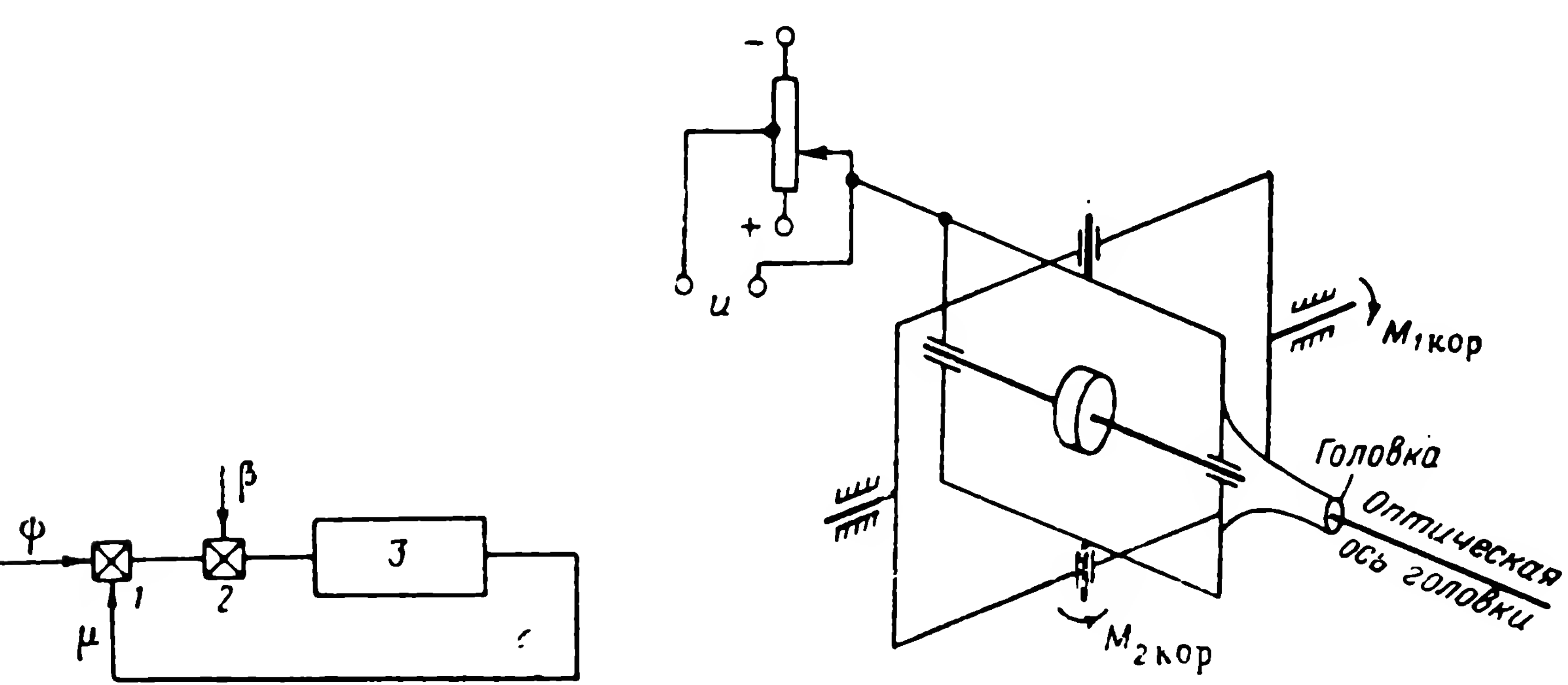
$$T\frac{d\beta}{dt} + \beta = T\frac{d\psi}{dt}. \tag{3.25}$$

Как видно из выражения (3.25), угол скольжения $\beta$ запаздывает относительно угловой скорости $d\psi/dt$ поворота продольной оси снаряда. Поэтому сигнал, снятый с демпфирующего гироскопа и прошедший через инерционное звено (фильтр) с постоянной времени $T$, будет соответствовать значению угла скольжения $\beta$. Постоянная времени $T$ на основании формулы (3.24) должна изменяться при изменении скорости полета, плотности воздуха и массы снаряда, но во многих случаях изменение постоянной времени незначительно и в практике ее можно считать постоянной.

Следящая система поворота оптической оси головки вне зависимости от вида датчика, угла скольжения или атаки должна быть создана по блок-схеме, приведенной на фиг. 3.28. Элемент сравнения *1* служит для получения сигнала, пропорционального углу между направлением продольной оси снаряда и оптической осью головки $\psi - \mu$ (см. фиг. 3.30). На второй элемент сравнения *2* (см. фиг. 3.28) поступает сигнал, пропорциональный углу скольжения $\beta$. На привод поворота головки поступает разность этих сигналов, и при его работе головка поворачивается по направлению вектора скорости. Сигнал с головки, пропорциональный углу $\varepsilon_y$, поступает в систему управления снарядом. К приводу поворота головки для более точного слежения оптической оси за вектором скорости предъявляется требование достаточного скородействия. Этому требованию полностью удовлетворяют гироскопические системы стабилизации головки с коррекцией. Такую систему практически можно считать безынерционной.

На фиг. 3.29 приведена упрощенная принципиальная схема системы стабилизации головки. Ее принцип действия заключается в следующем. Головка самонаведения закрепляется на внутрен-

ней рамке трехстепенного гироскопа. Моментные корректирующие устройства создают моменты относительно осей внутренней и внешней рамок. При этом возникает прецессия гироскопа и оптическая ось поворачивается в нужном направлении. Скорость прецессии пропорциональна приложенному моменту, который, в




Фиг. 3.28. Блок-схема следящей системы для поворота головки.

*1* и *2* — элементы сравнения, *3* — привод головки.

Фиг. 3.29. Принципиальная схема системы головки.

свою очередь, пропорционален сигналу управления. На основании сказанного запишем (движение в плоскости)

$$M_{кор} = k\eta, \tag{3.26}$$

где $\eta$ — сигнал управления;

$k$ — коэффициент пропорциональности;

$M_{кор}$ — момент коррекции.

В то же время

$$\eta = \psi - \mu - \beta = \theta_\delta - \mu, \tag{3.27}$$

где $\mu$ — положение оптической оси.

Запишем зависимость скорости прецессии от момента коррекции:

$$\frac{d\mu}{dt} = k_1 M_{кор}. \tag{3.28}$$

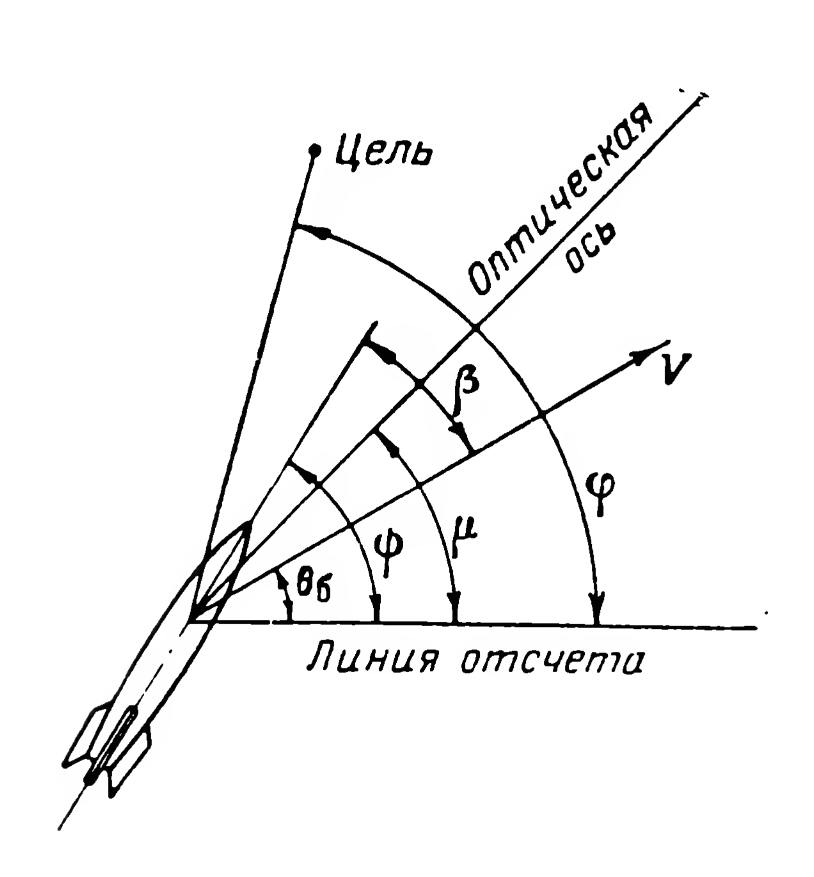
Преобразовав уравнения (3.26), (3.27), (3.28), найдем

$$T\frac{d\mu}{dt} + \mu = \theta_\delta, \tag{3.29}$$

где

$$T = \frac{1}{kk_1}.$$

Из анализа уравнения (3.29) следует, что по окончании переходного процесса оптическая ось будет направлена по вектору скорости, если $\theta_б = \mathrm{const}$, или с достаточной степенью точности следит за этим направлением при медленном изменении угла $\theta_б$. Точность слежения увеличивается с уменьшением постоянной времени $T$, что соответствует увеличению коэффициента усиления. При выводе уравнений не учитывалось запаздывание в образовании корректирующего момента и сигнала управления, а также нелинейная зависимость скорости прецессии от корректирующего момента. Как видно из формулы (3.27), необходимо для работы системы замерить угол между продольной осью снаряда и оптической осью головки. Для этого можно использовать потенциометр, жестко закрепленный на корпусе снаряда. Щетка потенциометра закрепляется на соответствующей рамке (фиг. 3.29). Напряжение $u$, снятое с потенциометра, будет пропорционально углу между продольной осью снаряда и оптической осью головки.




Фиг 3.30. Относительное положение снаряда и цели при методе параллельного сближения.

Посредством аналогичной системы стабилизации головки можно получить и сигнал, пропорциональный угловой скорости поворота линии снаряд — цель. При этом головка самонаведения работает в режиме слежения за целью, т. е. оптическая ось головки все время направлена на цель. Для осуществления режима слежения необходимо, чтобы при отклонении оптической оси от направления на цель моменты коррекции были бы пропорциональны этому отклонению. При действии момента коррекции головка самонаведения разворачивается на цель.

Согласно сказанному выше составим уравнения движения системы стабилизации. Сигнал с головки пропорционален углу между линией снаряд — цель и оптической осью головки (фиг. 3.30), т. е.

$$\varepsilon_{гол} = \varphi - \mu. \qquad (3.30)$$

Момент коррекции пропорционален сигналу с головки самонаведения, т. е.

$$M_{кор} = k\varepsilon_{гол}. \qquad (3.31)$$

Угловая скорость поворота оптической оси пропорциональна моменту коррекции

$$\frac{d\mu}{dt} = k_1 M_{кор}. \qquad (3.32)$$

Исключая переменные из уравнений (3.30)—(3.32), найдем

$$T_1 \frac{d\mu}{dt} + \mu = \varphi, \qquad (3.33)$$

где

$$T_1 = \frac{1}{kk_1} \ [сек].$$

Если угол $\varphi$ постоянен, то после окончания переходного процесса $\mu = \varphi$, т. е. оптическая ось головки направлена по линии снаряд — цель и выполняется режим слежения. При изменении угла $\varphi$ с малой скоростью, очевидно, и угол $\mu$ изменяется примерно с той же скоростью, т. е. $d\mu/dt \approx d\varphi/dt$. Это равенство справедливо при положении снаряда вдали от цели, когда $d^2\varphi/dt^2$ мало. При подлете снаряда к цели угловое ускорение $d^2\varphi/dt^2$ может резко возрасти и тогда равенство $d\mu/dt \approx d\varphi/dt$ не выполняется. Если угловые скорости $d\mu/dt$ и $d\varphi/dt$ мало отличаются друг от друга, то из формулы (3.32) вытекает приближенное соотношение

$$\frac{d\varphi}{dt} \approx k_1 M_{кор}. \qquad (3.34)$$

Наконец, используя формулу (3.31), получим

$$k_1 k \varepsilon_{гол} = \frac{d\varphi}{dt}. \qquad (3.35)$$

Выражение (3.35) показывает, что сигнал с головки самонаведения пропорционален угловой скорости поворота линии снаряд — цель. Поэтому сигнал с головки самонаведения после усиления в $k_1\, k$ раз посылается в канал управления снарядом. Так как коэффициенты $k$ и $k_1$ определяют и постоянную времени $T_1$ системы слежения, то их выбирают из условия устойчивости и качества работы этой системы. Необходимо отметить, что для головки самонаведения, работающей в режиме слежения, резко сокращается потребный угол зрения и тем самым повышается дальность действия.

Выше была рассмотрена простейшая принципиальная схема системы поворота и стабилизации головки самонаведения. Очевидно, что может быть использована любая система гиростабилизации. При выборе системы основными требованиями являются на-

дежность работы, точность и стоимость ее. Стоимость гиростабилизированной головки в несколько раз выше стоимости головки, жестко закрепленной на корпусе снаряда. К этому еще можно добавить, что введение системы стабилизации, как и всякое введение дополнительных элементов, снижает надежность, т. е. увеличивает вероятность отказа всей системы. По этой причине следящие гироголовки, как правило, используются только для измерения угловой скорости поворота линии снаряд — цель.

*Глава IV*

# УПРАВЛЯЮЩИЕ СИГНАЛЫ ПРИ ТЕЛЕУПРАВЛЕНИИ

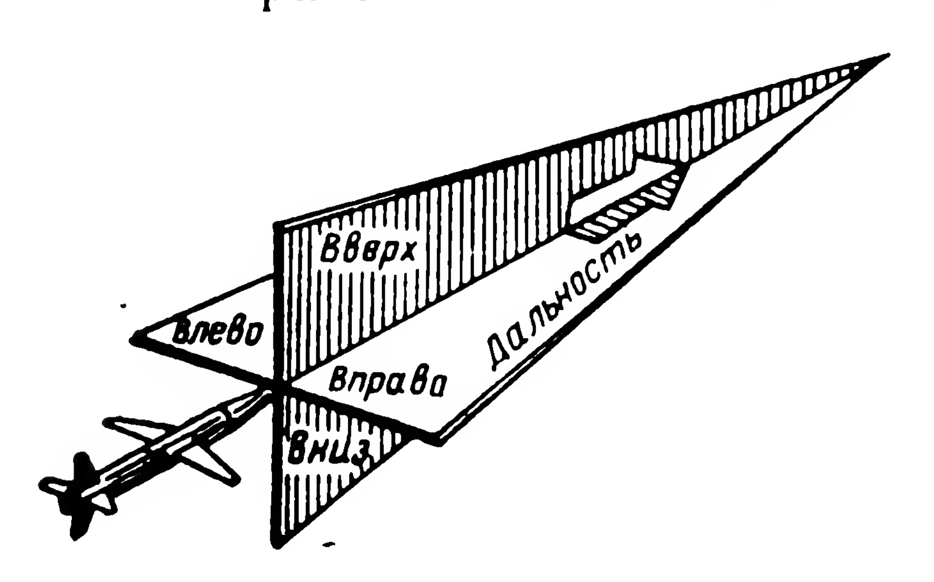
## § 4.1. НАВЕДЕНИЕ СНАРЯДОВ ПО РАДИОЛУЧУ

Радиолучом называется область пространства, имеющая форму тела вращения, в пределах которой распространяется электромагнитная энергия передатчика радиолокационной станции. Так как радиолуч образуется благодаря вращению диаграммы направленности передатчика локатора, то его осью является равносигнальная зона этого локатора.

Наведение снаряда по радиолучу обеспечивает образование сигналов управления непосредственно на снаряде без дополнительных каналов связи. Радиолокационная станция, создающая радиолуч, направленный на цель, располагается на пункте управления снарядом. На снаряде находится радиоприемник, воспринимающий сигналы радиолокационного передатчика пункта управления. Этот приемник является измерительным устройством, определяющим величину и направление отклонения снаряда от равносигнальной зоны в системе координат, связанной с этой зоной. С выхода приемника сигнал управления поступает в бортовую систему управления снарядом. При повороте рулей снаряда создается управляющая сила, возвращающая снаряд на ось радиолуча. В результате снаряд будет двигаться по радиолучу.

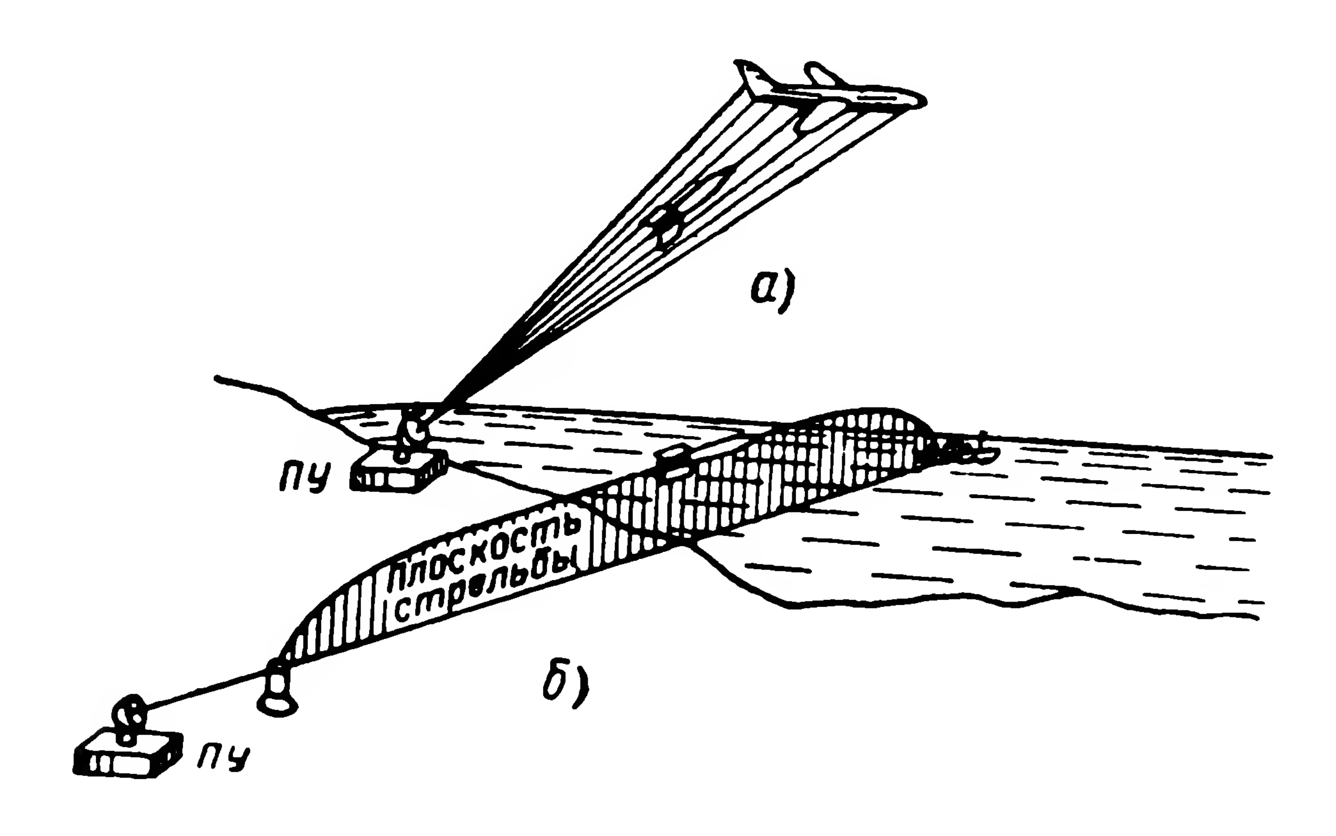
Равносигнальная зона, создаваемая вращением диаграммы направленности, позволяет получать на снаряде управляющие сигналы в любых двух взаимно перпендикулярных плоскостях, линия пересечения которых совпадает с направлением равносигнальной зоны. Если направление равносигнальной зоны не слишком близко к вертикали, то на снаряде получают сигналы управления «вверх — вниз» и «вправо — влево» (фиг. 4.1). При приближении направления луча к вертикали сигналы «вверх — вниз» обозначаются «вперед — назад». По этому принципу выполняются системы наведения зенитных снарядов, системы наведения снарядов воздушного боя и самолетов-снарядов ближнего действия, сбрасываемых с самолета-носителя. Если необходимо управлять снарядом относительно плоскости (обычно относительно плоскости

стрельбы), то равносигнальная зона создается не вращением, а перемещением диаграммы направленности в одной плоскости. В этом случае на снаряде могут быть получены сигналы только типа «вправо — влево». Таким способом наводятся тактические и стратегические самолеты-снаряды и дальние ракеты. Варианты наведения снарядов приведены на фиг. 4.2.




Фиг. 4.1. Обозначение управляющих сигналов, воздействующих на систему управления снаряда.

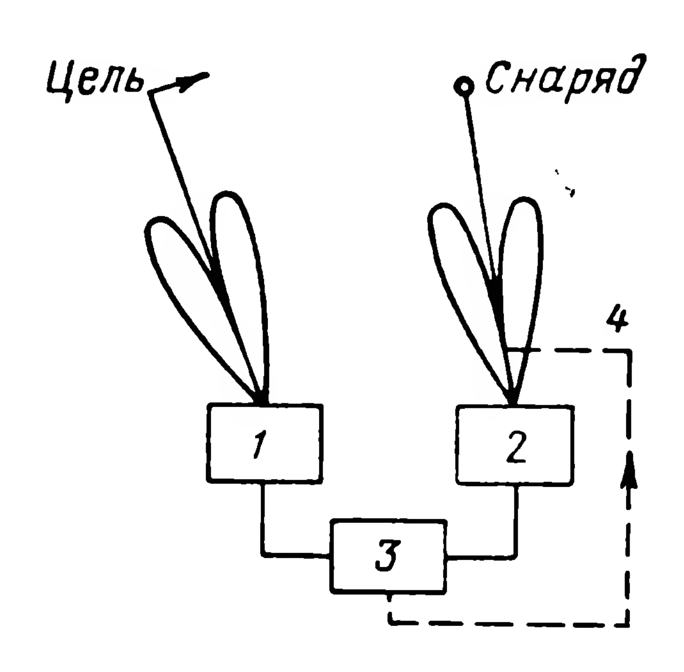
В общем случае, когда пункт управления и цель движутся по произвольным траекториям, радиолуч, в котором должен находиться снаряд, может перемещаться с большой скоростью. Поэтому траектория, по которой необходимо двигаться снаряду, чтобы все время находиться в радиолуче, приобретает значительную кривизну. Чтобы обеспечить полет снаряда по такой траектории, нужно создавать значительную управляющую силу, что возможно лишь за счет увеличения площади крыльев и габаритов снаряда. Увеличение габаритов в свою очередь связано с увеличением лобового сопротивления и, следовательно, мощности двигателя и массы снаряда. Путем усложнения аппаратуры наведения можно обеспечить наведение снаряда по траекториям с малой кривизной.




Фиг. 4.2. Схема наведения снаряда по радиолучу (*а*) и по радиотропе (*б*).

Так, например, установим на пункте управления два радиолокатора, создающих два независимых радиолуча. Один локатор

пусть следит за целью, в результате чего определяется как направление и дальность до цели, так и скорость поворота оси радиолуча. Второй луч должен быть направлен в точку встречи, где встретятся снаряд и цель, если они будут двигаться прямолинейно и равномерно. Снаряд должен лететь по оси второго луча до попадания в цель. Между обоими лучами образуется угол упреждения, мгновенное значение которого зависит от скоростей цели и снаряда. Сведения о скоростях снаряда и цели получаются в результате обработки данных локаторов, следящих за целью и снарядом. На основании этих данных угол упреждения непрерывно вычисляется счетно-решающими устройствами на пункте управления и отрабатывается следящей системой, управляющей вторым лучом. Если цель движется прямолинейно и равномерно, то траектория снаряда при двухлучевом управлении будет прямой линией. При маневре цели траектория несколько искривляется, но кривизна ее будет меньше, чем при управлении по одному лучу. Блок-схема системы управления, обеспечивающей наведение снаряда в упрежденную точку, приведена на фиг. 4.3.



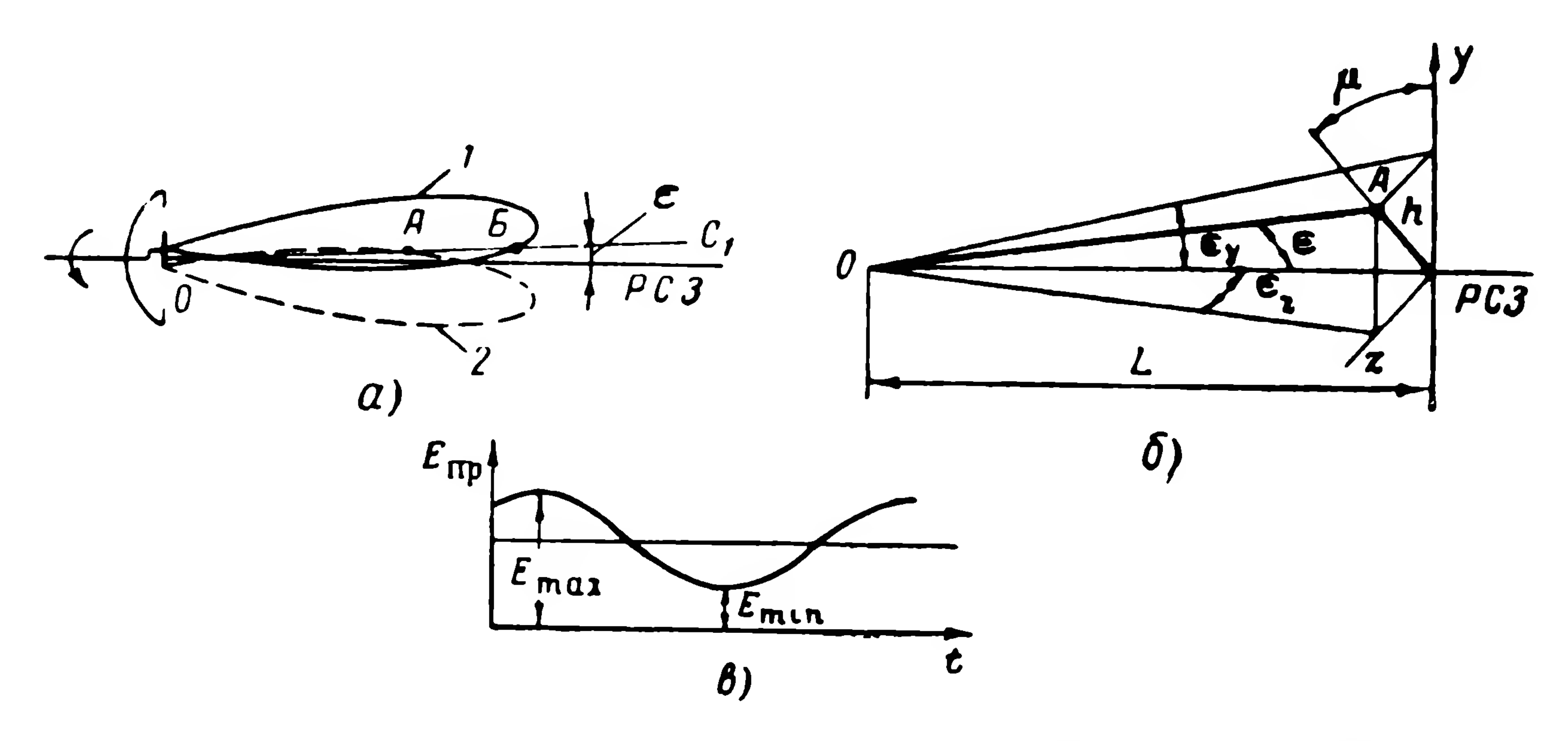

Фиг. 4.3. Блок-схема двухлучевой системы, обеспечивающей наведение снаряда в упрежденную точку.

*1* — станция слежения за целью, *2* — станция слежения за снарядом, *3* — счетно-решающее устройство, *4* — линия передачи команд.

Недостатком двухлучевых систем управления по сравнению с однолучевой является значительно большая сложность аппаратуры управления. В двухлучевой системе необходимы два радиолокатора и сложное счетно-решающее устройство. Следует отметить также, что при наведении снарядов с подвижного пункта управления (например, с самолета) выбором соответствующего закона движения этого пункта можно обеспечить малую скорость поворота радиолуча, а следовательно, и малую кривизну траектории снаряда. Дальность действия системы наведения по радиолучу определяется дальностью работы радиолокатора пункта управления.

Так как место старта снаряда и радиолокатор пункта управления размещены в различных точках, то необходимо снаряд ввести в радиолуч. Для обеспечения достаточно простого и надежного ввода снаряда в радиолуч в ряде случаев необходимо, чтобы на сравнительно малых расстояниях от антенны локатора поперечное сечение луча было значительным. Это условие можно выполнить только за счет расширения диаграммы направленности антенны локатора. Очевидно, что такое расширение возможно только за счет снижения дальности действия или увеличения мощности локатора. С другой стороны, площадь сечения ра-

диолуча увеличивается пропорционально квадрату расстояния от локатора. Вблизи цели снаряд надежно удерживается внутри луча при гораздо меньшей ширине диаграммы направленности, чем требуется для обеспечения надежного ввода снаряда в луч. Уменьшение угла зрения позволяет повысить дальность работы радиолокатора, точность и помехоустойчивость системы. Поэтому в ряде случаев отмечается применение скачкообразного или плавного изменения угла зрения радиолокатора пункта управления в процессе




Фиг. 4.4. К получению управляющего сигнала с помощью равносигнальной зоны.

полета снаряда к цели. Вначале угол зрения устанавливается наибольшим, а в процессе дальнейшего полета снаряда этот угол уменьшается.

Радиолокатор пункта управления работает на принципе автосопровождения цели. Этот принцип уже был описан в предыдущей главе при описании следящих головок самонаведения. Поэтому рассмотрим лишь образование сигнала управления на борту снаряда, летящего в радиолуче. В хвостовой части снаряда располагается антенна и приемник. Если снаряд находится на оси радиолуча (фиг. 4.4, *а*), то величина сигнала, принимаемого приемником снаряда, будет постоянна, так как в направлении равносигнальной зоны мощность излучения радиолокатора постоянна. Если снаряд отклоняется от оси радиолуча (например, в точку *А* на фиг. 4.4, *б*), то сигнал, принимаемый антенной снаряда, будет колебаться с частотой вращения диаграммы направленности локатора. Максимальное значение сигнала соответствует положению *1* диаграммы направленности, а минимальное — положению *2*, так как в первом случае сигнал пропорционален отрезку *ОБ*, а во втором — *ОА*. Амплитуда изменения напряженности поля будет пропорциональна углу ε между направлением оси радиолуча и линией $OC_1$.

На основании фиг. 4.4, *б* можно получить

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{h}{L}, \tag{4.1}$$

где $h$ — отклонение снаряда от оси радиолуча в плоскости $yz$, перпендикулярной этой оси;

$L$ — расстояние снаряда от пункта управления.

Форма сигнала на выходе приемника снаряда показана на фиг. 4.4, *в*. Фаза переменной составляющей этого сигнала определяется углом $\mu$ между радиусом-вектором $h$ отклонения снаряда от оси радиолуча и осью $y$ (или $z$) на плоскости, перпендикулярной этой оси (фиг. 4.4, *б*). Таким образом, после отделения постоянной составляющей этого сигнала получим

$$u_{\text{пр}} = k\varepsilon \cos(\Omega t + \mu), \tag{4.2}$$

где $k$ — постоянный коэффициент, учитывающий параметры тракта передачи сигналов;

$\Omega$ — угловая частота вращения диаграммы направленности.

Так как по мере удаления снаряда от пункта управления напряженность поля падает пропорционально квадрату расстояния, то приемник имеет автоматическую регулировку усиления, обеспечивающую независимость выходного напряжения от расстояния.

Формулы (4.2) и (3.5) идентичны. Следовательно, форма напряжения на выходе приемника снаряда, наводимого по радиолучу, аналогична форме напряжения на выходе приемника радиолокационной головки самонаведения.

Для управления крестокрылыми снарядами необходимо иметь сигналы, пропорциональные составляющим отклонения $h$ на вертикальную $y$ и боковую $z$ плоскости (фиг. 4.4, *б*). Чтобы получить такие сигналы, нужно сравнить в синхронном детекторе принятый радиоприемником снаряда сигнал с опорным напряжением (схемы синхронных детекторов рассмотрены в § 3.6). Опорное напряжение, вырабатываемое на борту снаряда, должно по частоте и фазе соответствовать вращению диаграммы направленности радиолокатора пункта управления, создающего равносигнальную зону. Поэтому на снаряд посылаются опорные сигналы, посредством которых синхронизируется работа генератора опорных напряжений снаряда с вращением диаграммы направленности локатора. В результате на выходе синхронных детекторов получаются сигналы ошибки, пропорциональные соответственно $\varepsilon_y$ и $\varepsilon_z$ (см. § 3.6). Но для управления снарядом необходимо иметь сигналы, пропорцио-

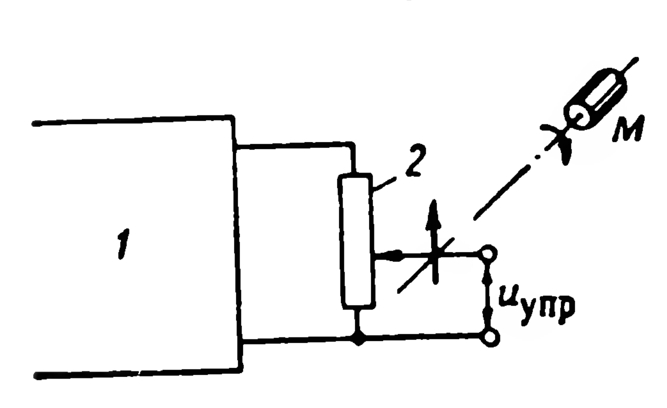
нальные $y$ и $z$. На основании геометрического построения на фиг. 4.4, *б* получим

$$y = L \operatorname{tg} \varepsilon_y, \qquad z = L \operatorname{tg} \varepsilon_z. \tag{4.3}$$

Так как при управлении снарядом отклонения от оси радиолуча малы, то

$$y \approx L\varepsilon_y, \qquad z \approx L\varepsilon_z. \tag{4.4}$$

Как показывает формула (4.4), при постоянном отклонении от оси радиолуча $h$ угол $\varepsilon$ с увеличением дальности уменьшается. Поэтому сигнал с выхода синхронного детектора должен быть изменен пропорционально дальности, чтобы обеспечить управление по линейному, а не угловому отклонению. При постоянной скорости полета снаряда изменение дальности почти линейно зависит от времени и для регулировки сигнала используют потенциометр и часовой механизм (фиг. 4.5). При изменении дальности между снарядом и пунктом управления с потенциометра снимается все большая часть напряжения, поданного на него. Подвижная щетка потенциометра перемещается часовым механизмом. Если скорость снаряда непостоянна, то потенциометр выполняется профилированным.




Фиг. 4.5. Принципиальная схема для учета дальности снаряда до цели:

*1* — фазовый детектор, *2* — потенциометр.

Заметим, что при наведении по радиолучу нельзя допустить вращения снаряда относительно продольной оси (если на снаряде не установлен специальный преобразователь сигналов управления). При вращении снаряда будет нарушаться нормальная работа каналов управления. Например, при повороте снаряда относительно продольной оси на 90° каналы управления «вверх — вниз» и «вправо — влево» поменяются ролями и работа системы управления станет невозможной.

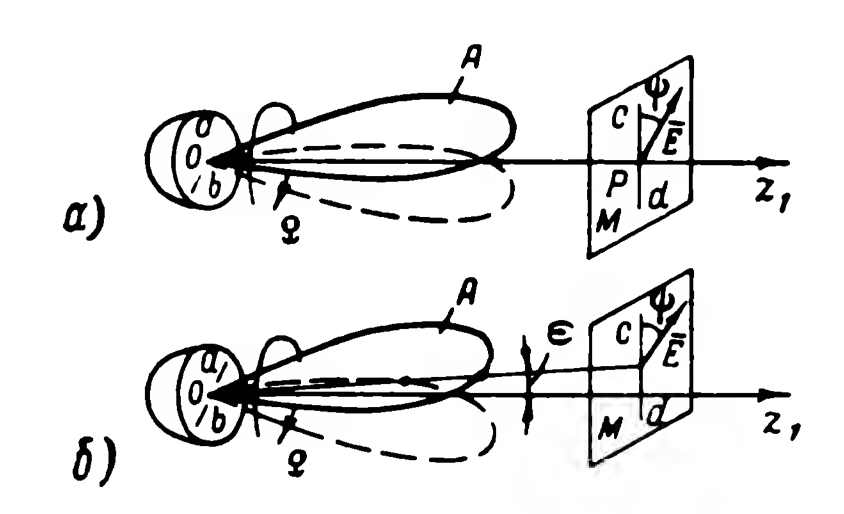
Принимаемый на снаряде сигнал может также искажаться вследствие вращения плоскости поляризации излучения локатора пункта управления. В простейшем случае передающая и приемная антенны представляют собой диполи. Взаимное расположение передающего диполя *ab* и приемного *cd* показано на фиг. 4.6. Полагаем, что приемный диполь расположен в плоскости, пер-

пендикулярной оси равносигнальной зоны (оси радиолуча). В каждый момент времени вектор напряженности электрического поля $E$ параллелен передающему диполю $ab$ и вращается вместе с ним с угловой скоростью $\Omega$. Вращается также и плоскость поляризации излучаемой энергии. Когда плоскость поляризации совпадает с приемным диполем $cd$, амплитуда принимаемого антенной сигнала будет максимальной. Если же диполь $cd$ перпендикулярен плоскости поляризации, то амплитуда равна нулю. Таким образом, амплитуда напряжения сигнала на антенне приемника определяется формулой

$$u_m(t) = h_д E\,|\cos \Omega t|, \tag{4.5}$$

где $E$ — напряженность поля, создаваемого передающей антенной на оси луча;

$h_д$ — действующая высота приемной антенны.




Фиг. 4.6. Схема взаимного расположения передающего и приемного диполей при управлении снарядом с помощью радиолуча.

Если снаряд находится на оси радиолуча (фиг. 4.6, *а*), то вращение диаграммы направленности не влияет на величину напряженности поля $E$, которая в этом случае может быть обозначена через $E_0$. Разложение функции (4.5) в ряд Фурье приводит к следующему выражению:

$$u_m(t) = h_д E_0 \left[\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2\Omega t}{1\cdot 3} - \frac{\cos 4\Omega t}{1\cdot 3\cdot 5} + \ldots\right)\right]. \tag{4.6}$$

Как видно из формулы (4.6), амплитуда напряжения на антенне приемника, содержит постоянную составляющую и четные гармоники частоты вращения диаграммы направленности локатора. Поэтому при наличии достаточно узкополосных фильтров в усилителе приемника паразитная модуляция не дает сигнала на выходе приемника, если снаряд находится на оси радиолуча.

Если снаряд отклоняется от оси радиолуча (см. фиг. 4.6, *б*), то вращение диаграммы направленности локатора изменяет величину (модуль) напряженности поля $E$ в точке приема:

$$E = E_0\,[1 + k\varepsilon \cos(\Omega t + \mu)]. \tag{4.7}$$

За счет модуляции напряженности поля, определяемой формулой (4.7), происходит полезная модуляция сигнала, позволяющая определить величину и направление углового отклонения $\varepsilon$ (или соответственно $h$). Однако при наличии паразитной модуляции амплитуды результирующая модуляция амплитуды этого

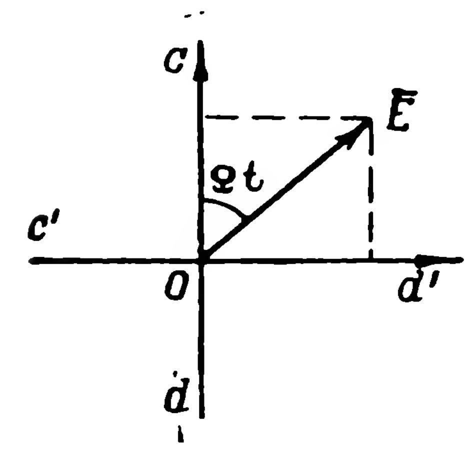
напряжения определяется из соотношений (4.6) и (4.7) и имеет вид

$$u_m(t) = h_д \frac{2}{\pi}\left[1 + \frac{2}{3}\cos 2\Omega t - \frac{2}{15}\cos 4\Omega t + \ldots\right] \times$$
$$\times [1 + k\varepsilon \cos(\Omega t + \mu)]. \qquad (4.8)$$

После раскрытия скобок получим

$$u_m(t) = \frac{2}{\pi} h_д \Big[ 1 + k\varepsilon \cos(\Omega t + \mu) + \frac{1}{3} k\varepsilon \cos(\Omega t - \mu) +$$
$$+ \frac{2}{3}\cos 2\Omega t + \frac{1}{3} k\varepsilon \cos(3\Omega t + \mu) - \frac{2}{15}\cos 4\Omega t + \ldots\Big]. \qquad (4.9)$$

Постоянная составляющая и высшие гармоники могут быть отфильтрованы, и на выходе приемника появятся две составляющие: полезная $k\varepsilon\cos(\Omega t+\mu)$ и паразитная $\frac{1}{3}\,k\varepsilon\cos(\Omega t-\mu)$. Паразитная составляющая искажает как амплитуду, так и фазу управляющего сигнала.



Фиг. 4.7. Схема расположения диполей приемной антенны.

В приемнике снаряда может быть использована антенна с круговой поляризацией. Рассмотрим, как круговая поляризация обеспечивается применением двух взаимно перпендикулярных диполей $cd$ и $c'd'$, направление осей которых приведено на фиг. 4.7. При таком расположении приемных диполей напряжения, снимаемые с них, сдвинуты по фазе на 90°. Амплитуда суммарного напряжения не будет зависеть от вращения плоскости поляризации приемной антенны и паразитная модуляция, обусловленная этим вращением, не будет иметь места. Принимаемый сигнал будет модулироваться лишь за счет ухода снаряда с оси луча и его амплитуда определится формулой (4.2).

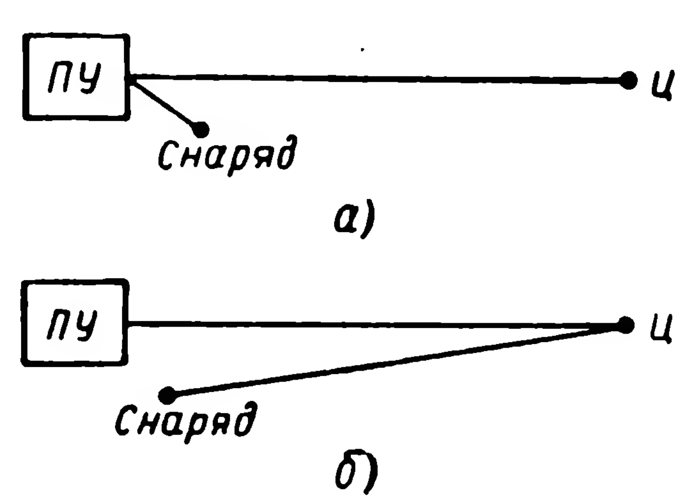
Так как антенна закрепляется на снаряде жестко, то при движении снаряда относительно оси радиолуча плоскость диполей становится неперпендикулярной к оси радиолуча. При повороте плоскости диполей снова появится эффект паразитной модуляции. Угол поворота плоскости диполей обычно не превышает 30—40° и искажения сигнала ошибки, возникающие за счет паразитной модуляции, оказываются значительно меньшими, чем при использовании антенны из одного диполя. Поэтому антенны приемника снаряда, наводимого по радиолучу, должны обладать круговой поляризацией.

В результате рассмотрения принципа образования сигналов управления для снарядов, наводимых по радиолучу и самонаводящихся с радиолокационной головкой самонаведения, можно сравнить эти две системы управления. Основными преимуществами систем управления по радиолучу являются:

— большая дальность действия;

— сравнительная простота (меньшая сложность бортовой аппаратуры для создания управляющих сигналов).

Для пояснения первого положения сравним наведение по радиолучу с наведением снаряда по полуактивному способу (фиг. 4.8). Так как передатчики, облучающие цель, в обоих случаях находятся на пункте управления, то в принципе они могут быть одинаковыми. Следовательно, разница в дальности действия возникает из-за того, что при наведении по радиолучу отраженный от цели сигнал принимается радиоприемником пункта управления, а при самонаведении — приемником снаряда. Приемник пункта управления может быть выполнен со значительно большим усилением (за счет увеличения габаритов антенны) и более совершенным, чем приемник снаряда. Указанное обстоятельство остается справедливым и для пассивной головки самонаведения, реагирующей на цель, являющуюся источником ультракоротких радиоволн. Очевидно, что и в этом случае дальность действия системы наведения по лучу может быть больше, чем системы самонаведения. Наконец, при активном самонаведении дальность действия головки в принципе невелика, так как на снаряде невозможно разместить достаточно мощный радиолокатор.




Фиг. 4.8. Схема управления снарядом по радиолучу (*а*) и с помощью полуактивной головкой самонаведения (*б*).

Второе преимущество снаряда, наводимого по радиолучу, очевидно, так как в этом случае на снаряде приемник может быть менее совершенным и с меньшим усилением, чем приемник головки самонаведения, за счет того, что последний принимает слабый отраженный от цели сигнал, а приемник снаряда, наводимого по радиолучу,— мощный сигнал, посланный с пункта управления.

Основными недостатками системы наведения по радиолучу по сравнению с радиолокационными системами самонаведения являются:

— меньшая точность при больших дальностях между пунктом управления и снарядом;

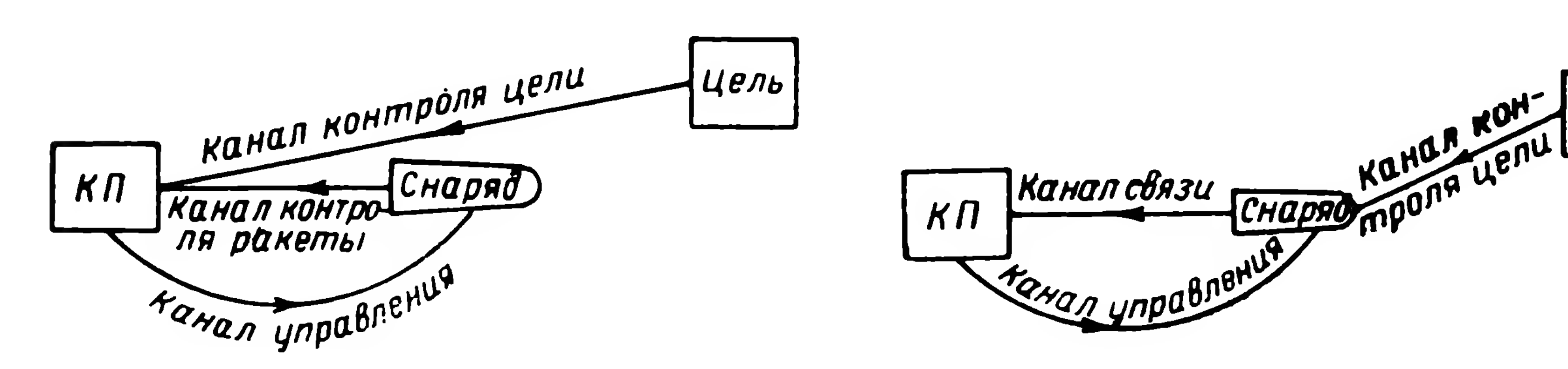
— необходимость непрерывного участия пункта управления в процессе наведения снаряда.

При увеличении дальности наличие угловой ошибки в направлении оси радиолуча приводит к увеличению линейного отклонения этой оси от центра цели. Второй недостаток становится существенным, например, в случае наведения снарядов класса «воздух — воздух». Необходимость непрерывного автосопровождения цели локатором, установленным на самолете, ограничивает его маневр. При активном самонаведении пункт управления не участвует в наведении. При полуактивном — пункт управления должен лишь облучать цель, что не связывает маневр самолета, на котором установлен передатчик.

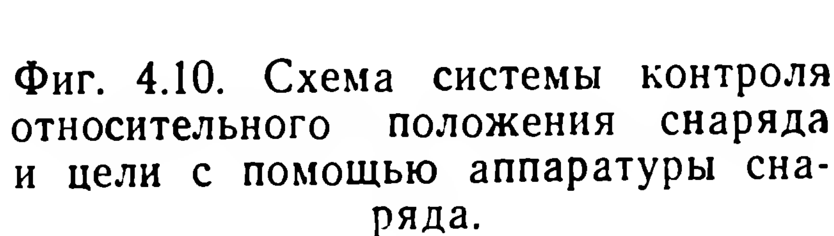
Чтобы использовать положительные свойства обоих методов, иногда применяются комбинированные системы — управление по лучу на начальном участке с переходом на самонаведение при приближении снаряда к цели.

## § 4.2. КОМАНДНОЕ ТЕЛЕУПРАВЛЕНИЕ

В предыдущем параграфе рассматривалось наведение снарядов по лучу, при котором, несмотря на наличие пункта управления, сигналы управления вырабатывались непосредственно аппаратурой снаряда. Рассмотрим теперь способы образования управ-




Фиг. 4.9. Схема системы контроля относительного положения снаряда и цели с помощью аппаратуры пункта управления.



Фиг. 4.10. Схема системы контроля относительного положения снаряда и цели с помощью аппаратуры снаряда.

ляющих сигналов при телеуправлении, когда управляющие сигналы или «команды» вырабатываются на пункте управления и посылаются на снаряд по специальному каналу связи.

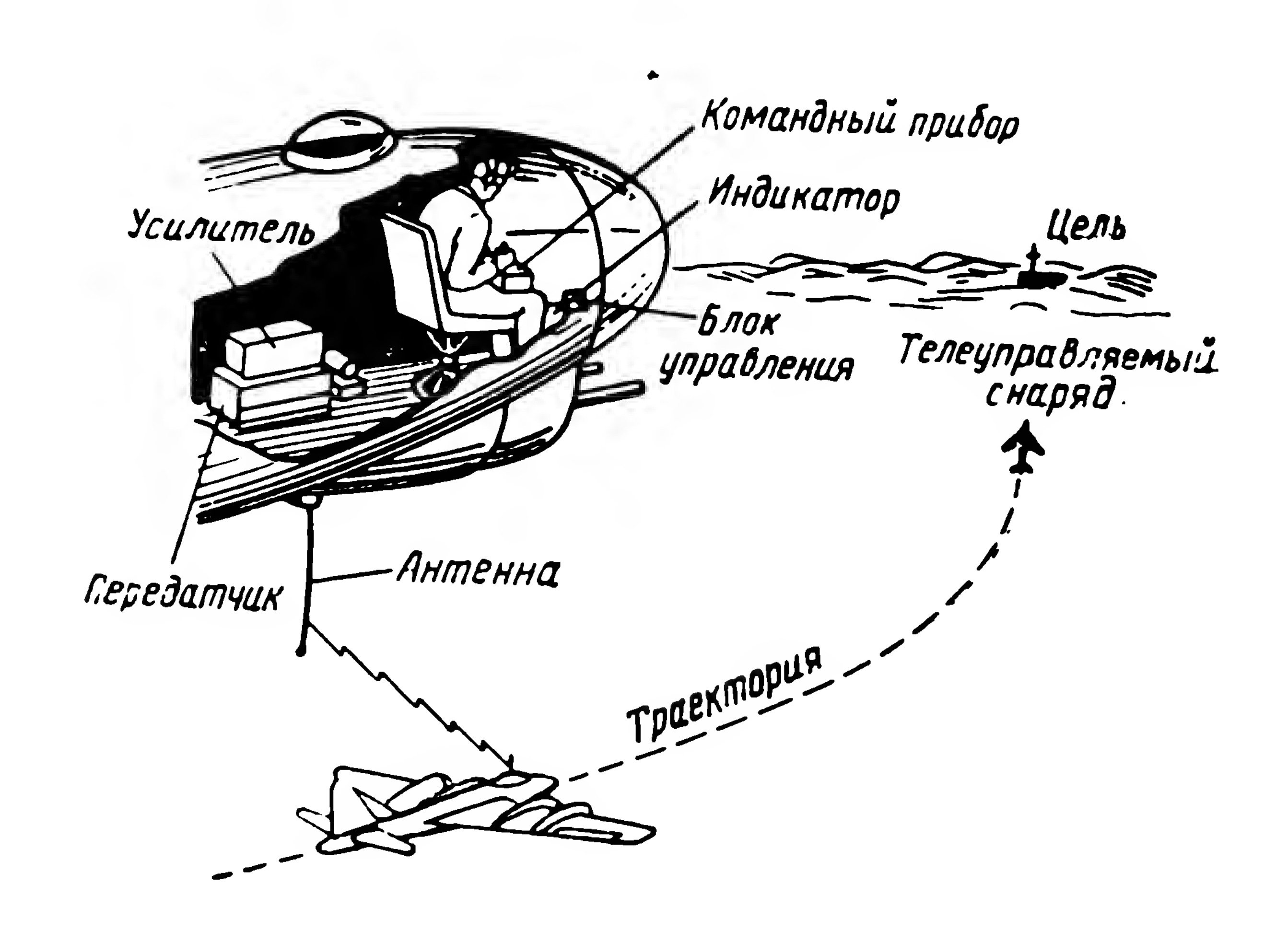
Для выработки команд управления могут быть использованы два принципиально различных способа контроля относительного положения цели и снаряда:

— контроль с помощью аппаратуры, расположенной на пункте управления (фиг. 4.9);

— контроль с помощью аппаратуры, расположенной на снаряде (фиг. 4.10).

В системах первого типа широко используется оператор для контроля за положением снаряда и цели и выработки команд уп-

равления. В качестве примера системы первого типа приведем систему наведения управляемой бомбы с применением оптического прицела (фиг. 4.11). С помощью прицела оператор непрерывно наблюдает цель и снаряд. Величина и направление отклонения снаряда от цели определяется в виде отрезка, соединяющего их изображения. Команды управления вырабатываются оператором поворотом рукоятки управления и передаются на борт снаряда. Оператор, управляя снарядом, стремится совместить изображения




Фиг. 4.11. Система наведения уравляемого снаряда $H_s$-293 с применением оптического прицела.

цели и снаряда. Такой метод носит название метода «трех точек», так как три точки — пункт управления (оператор), снаряд и цель — в идеальном случае находятся все время на одной прямой. Очевидно, что описанную систему наведения снаряда нельзя считать автоматической, так как в контуре управления присутствует оператор.

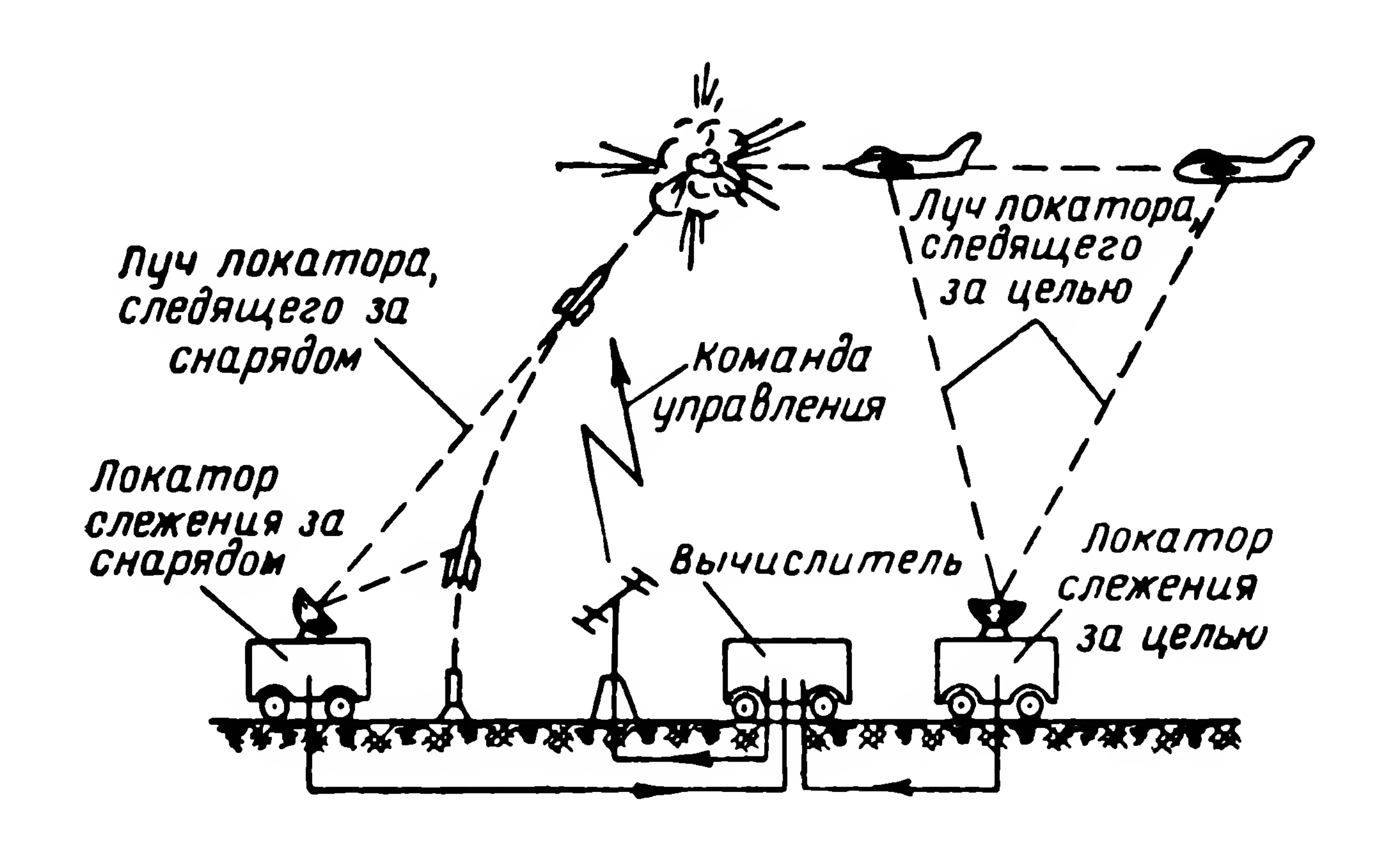
В качестве примера системы с автоматическим образованием команды управления можно привести систему наведения зенитного снаряда (фиг. 4.12). На командном пункте определяются координаты цели и снаряда. Счетно-решающее устройство по этим данным вырабатывает команду, которая по радиоканалу передается на борт снаряда.

Способы контроля за положением снаряда несколько отличаются от способа контроля за целью, так как на снаряде можно устанавливать специальные устройства, облегчающие этот контроль. В зависимости от места размещения источника энергии сис-

темы контроля положения снаряда могут быть пассивными, полуактивными и активными.

Пассивные системы используют естественное излучение снаряда (например, излучение двигателя снаряда) или отраженную снарядом энергию естественного источника (солнца).

Полуактивные системы используют отраженный снарядом сигнал.



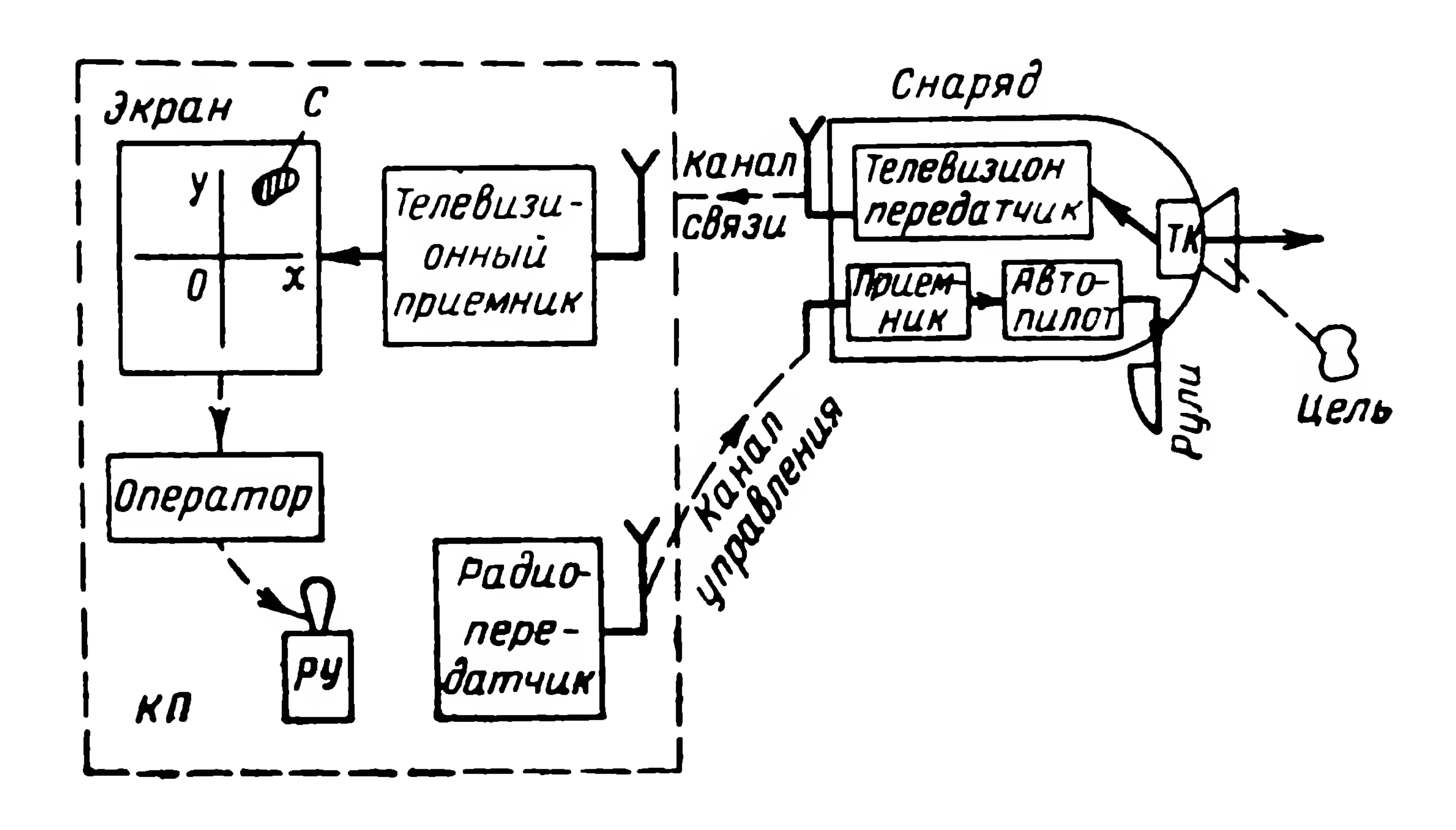

Фиг. 4.12. Функциональная схема системы наведения зенитного снаряда.

Активные системы используют энергию излучателя, устанавливаемого на снаряде для облегчения контроля за ним. При визуальном контроле излучателями являются трассеры, устанавливаемые в хвосте снаряда, а при радиотехническом контроле — радиопередатчик, устанавливаемый на снаряде и пеленгуемый с пункта управления. Недостатком активной системы является демаскирование снаряда.

Примером системы управления с контролем относительного положения снаряда и цели аппаратурой, расположенной на снаряде, может служить управление при помощи телевизионной головки или радиолокатора. Блок-схема системы приведена на фиг. 4.13. На снаряде устанавливают телевизионный передатчик и объектив телекамеры воспринимает изображение цели. Это изображение передается по линии канала связи на пункт управления, где и воспроизводится на экране телевизионного приемника. Оператор, наблюдая за экраном, вырабатывает управляющие сигналы при помощи рукоятки управления. Эти сигналы передаются на снаряд по радиоканалу.

Наличие дополнительных каналов для передачи информации о цели и сигналов управления существенно усложняют аппара-

туру управления в целом и ухудшают помехозащищенность системы. Таким образом, рассмотренная система управления с контролем относительного положения снаряда и цели аппаратурой снаряда кажется неудачной. Однако участие в этой системе человека придает ей некоторые новые качества, которых нет у полностью автоматизированных систем. Человек, используя высокое качество своего зрительного аппарата, а также способность приспособиться к условиям применения снаряда, отличающимся от рас-




Фиг. 4.13. Блок-схема системы управления снарядом с помощью телевизионной головки.

четных, может обеспечить эффективное действие системы управления в обстановке, когда автоматизированные системы неприменимы. Такие условия возникают, например, когда цель имеет очень слабый контраст с окружающим фоном, когда изображение цели на время исчезает, когда целей много и следует выбрать наиболее важную из них и т. п. Следовательно, чтобы полностью использовать ценные свойства оператора в системе управления снарядом, необходимо иметь естественное изображение цели. Такое изображение получается лишь с помощью телевизионной аппаратуры, тогда как индикаторы локационных и пеленгационных станций дают изображение цели в виде точки или пятна различной яркости.

К недостаткам использования оператора в системе управления снарядом следует отнести необходимость затраты значительного времени и средств на подготовку операторов, а также зависимость качества работы оператора от его субъективных данных.

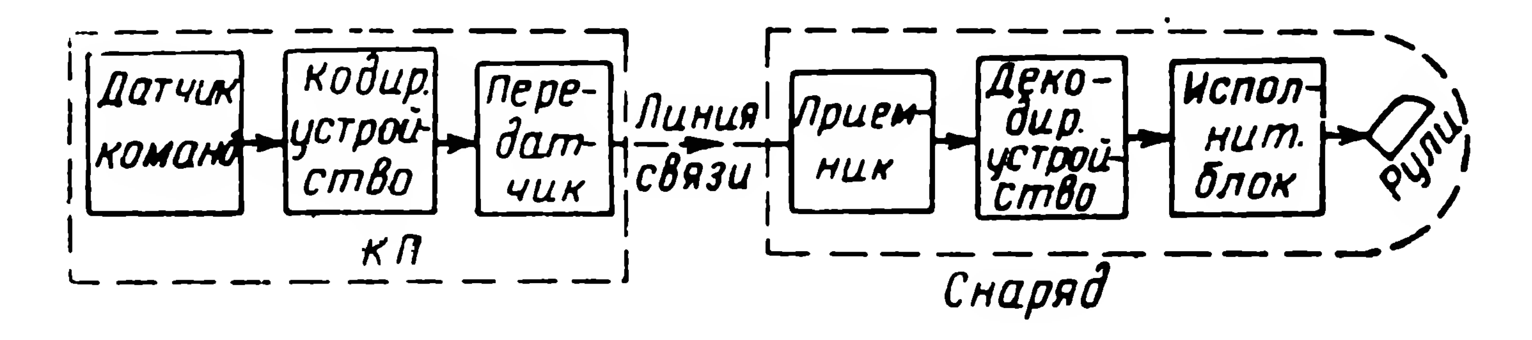
Системы командного телеуправления независимо от того, являются ли они автоматическими или в них используется оператор, всегда содержат канал связи, по которому на снаряд передаются

управляющие сигналы. Для краткости этот канал связи назовем каналом управления. Блок-схема канала управления изображена на фиг. 4.14. Команды управления, выработанные датчиком команд, зашифровываются и передаются по линии связи на снаряд. На снаряде принятые сигналы расшифровываются и передаются в бортовую систему управления снарядом.

Шифрование сигналов управления повышает:

— помехозащищенность канала управления;

— пропускную способность линий связи.




Фиг. 4.14. Блок-схема канала управления снарядом.

Для передачи команд управления в принципе можно использовать проводную и радиотехнические линии связи, а также инфракрасное и световое излучение. Основным преимуществом проводной связи является высокая помехозащищенность. Однако обеспечение надежной (без обрывов) связи по проводам при большой скорости снаряда представляет большие трудности. Помехозащищенность радиотехнической линии связи гораздо ниже, чем у проводной, но зато радиус действия значительно больше. Инфракрасное и световое излучения не обеспечивают достаточной дальности, а главное — надежности работы в любое время суток и в любых метеоусловиях. Поэтому они не нашли пока применения для управления снарядами.

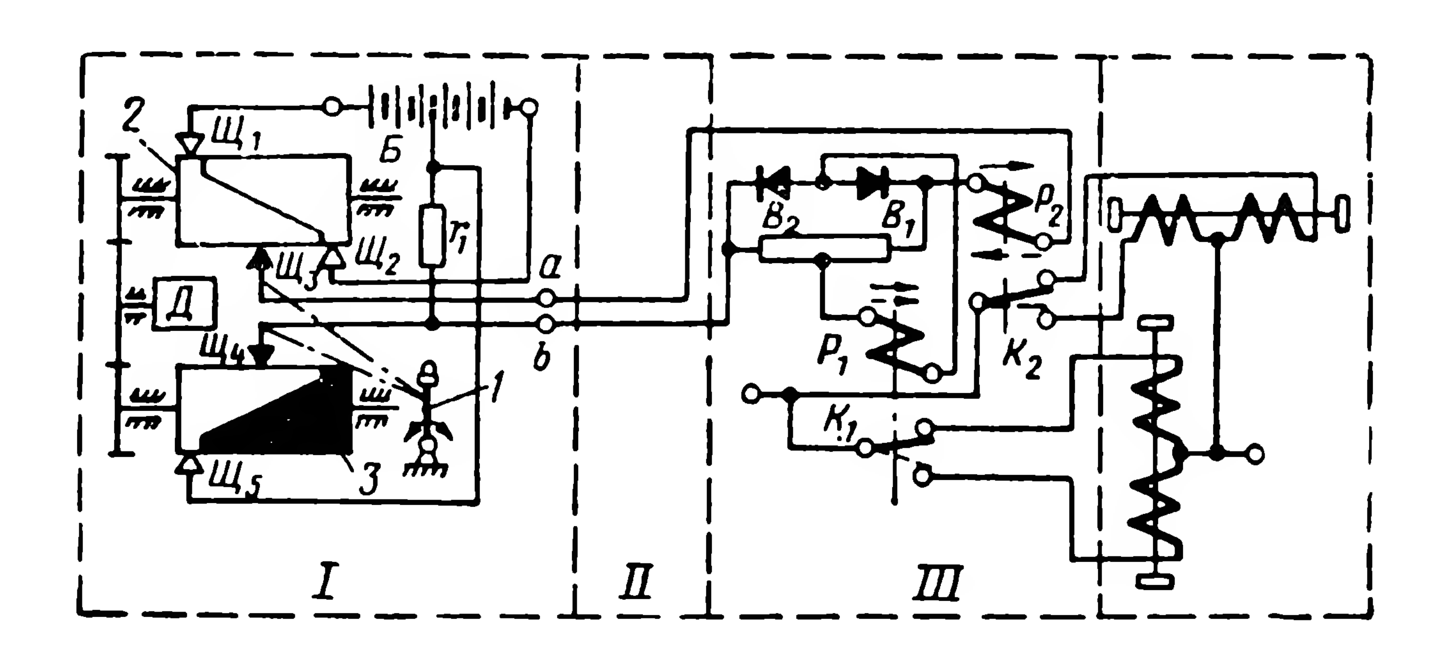
Остановимся более подробно на примерах технической реализации проводных и радиотехнических линий связи.

## 1. Проводная линия связи

Линию связи выполняют из стального провода малого диаметра, сматываемого в процессе наведения с катушек, установленных на снаряде или на пункте управления или на снаряде и пункте управления одновременно. В последнем варианте скорость сматывания провода с каждой катушки уменьшается, что приводит к уменьшению вероятности обрыва провода.

Проводную линию связи целесообразно применять для снарядов, наводимых с неподвижного пункта управления по подвижным наземным целям, так как при наведении снаряда с подвижного пункта (например, с самолета) вероятность обрыва прово-

дов повышается. Дальность проводной линии связи не превышает нескольких километров. На фиг. 4.15 приведена принципиальная схема системы телеуправления с проводной линией связи. Командно-шифраторный блок *I* состоит из рукоятки управления *1* и двух валиков *2* и *3*, приводимых в движение электродвигателем *Д*, имеющим постоянную скорость вращения. Валик *2* изготовлен из токопроводящего материала и разделен диэлектриком на две части, к которым через щетки $Щ_1$ и $Щ_2$ подводится напряжение с разноименных полюсов батарей *Б*. Щетка $Щ_3$ связана с ручкой управ-



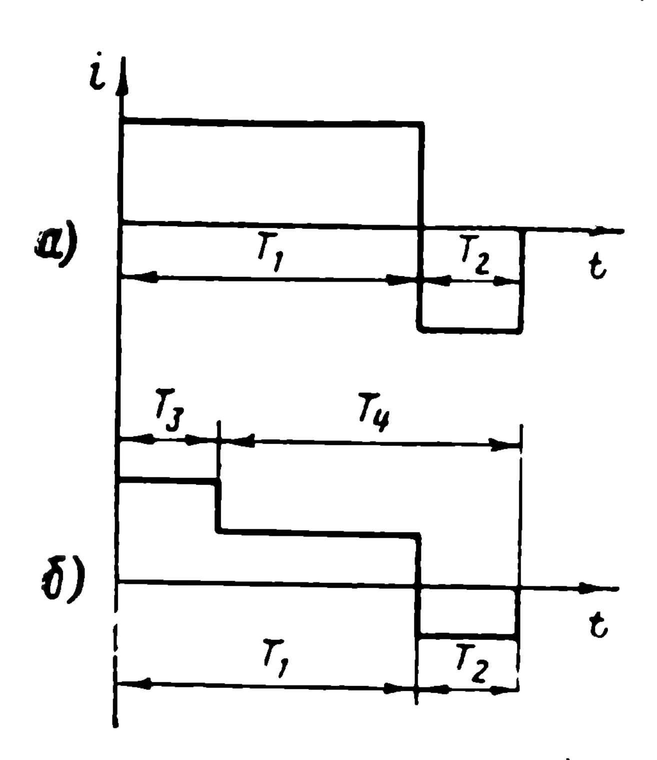

Фиг. 4.15. Принципиальная схема системы управления снарядом $H_S$-293 по проводам.

ления и из среднего положения перемещается по образующей валика, если рукоятка управления отклоняется от среднего положения (например, вправо или влево). Когда щетка $Щ_3$ находится в среднем положении, то при каждом обороте валика *2* время контакта ее с обеими половинами этого валика одинаково и равно половине времени совершения одного оборота. Так как диэлектрик, разделяющий валик *2* на две части, расположен под углом к его оси, то при отклонении щетки $Щ_3$ от среднего положения время контакта ее с одной и другой половинками валика становится разным.

Для формирования команды в другой плоскости служит валик *3*. Валик *3* тоже разделен на две части, одна из которых выполнена из токопроводящего материала, а вторая — из диэлектрика. К токоподводящей части через щетку $Щ_5$ подводится напряжение со средней точки батареи питания *Б*. Щетка $Щ_4$ связана с рукояткой управления и из среднего положения перемещается по образующей валика, если рукоятка управления отводится от вертикали вперед или назад. Плоскость раздела проводящей и изолирующей частей валика *3* проходит под углом к его оси. При перемещении щетки $Щ_4$ время нахождения ее на проводящей и изолирующей частях валика изменяется. Щетка $Щ_4$ соединена со средней точкой батареи *Б* через сопротивление $r_1$. Сигналы управ-

ления, снятые щетками $Щ_3$ и $Щ_4$, поступают в проводную линию связи *II*.

Блок дешифрирования команды *III*, расположенный на снаряде, состоит из поляризованных реле $P_1$ и $P_2$ и мостика с выпрямителями $B_1$ и $B_2$. Реле $P_2$ — трехпозиционное, его контакт $k_2$ при обесточенной обмотке находится в среднем положении. Отклонение контакта в одно из крайних положений зависит от направления тока в обмотке. Таким образом реле $P_2$ реагирует на полярность сигнала. Реле $P_1$ — двухпозиционное, его контакт $k_1$ находится в нижнем положении, если обмотка реле обесточена или величина тока меньше тока срабатывания. Наличие мостиковой выпрямительной схемы позволяет получить в обмотке реле $P_1$ постоянное направление тока, не зависящее от полярности тока в линии связи. Следовательно, реле $P_1$ реагирует на амплитуду сигнала.




Фиг. 4.16. Диаграммы токов в проводной линии связи.

Определим форму сигналов, поступающих в линию связи. Обозначим время нахождения щетки $Щ_3$ на половинках валика *2* через $T_1$ и $T_2$, а время нахождения щетки $Щ_4$ на половинках валика *3* — через $T_3$ и $T_4$. При этом справедливо соотношение

$$T_1 + T_2 = T_3 + T_4 = T, \qquad (4.10)$$

где $T$ — время одного оборота валиков *2* и *3*.

Каждый из интервалов времени $T_1$, $T_2$, $T_3$ и $T_4$ может изменяться от нуля до $T$. В течение интервала времени $T_1$ щетка $Щ_3$ подключена к минусу и в течение интервала времени $T_2$ — к плюсу батареи *Б*. Щетка $Щ_4$ в течение интервала времени $T_3$ соединена со средней точкой батареи *Б* непосредственно и в течение интервала времени $T_4$ — через сопротивление $r_1$.

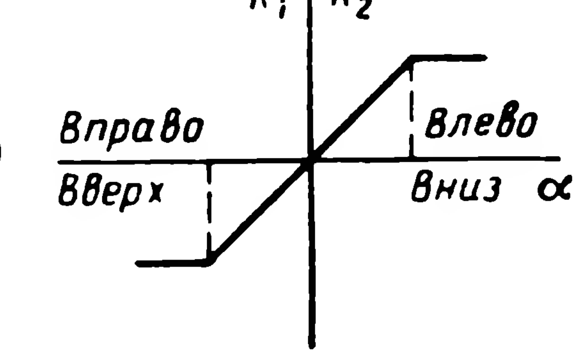
На фиг. 4.16 приведены диаграммы токов в линии связи (положение щеток $Щ_3$ и $Щ_4$ взято произвольным). Поясним эти диаграммы. Вначале будем считать валик *3* неподвижным (см. фиг. 4.15). Тогда диаграмма токов в линии будет иметь вид, изображенный на фиг. 4.16, *а*. Полярность тока меняется по закону, определяемому положением щетки $Щ_3$ на образующей валика. Если пренебречь запаздыванием в работе реле $P_2$, то оно также будет замыкать и размыкать свои контакты по закону, представленному схематично на фиг. 4.16, *а*. При вращении валика *3* (см. фиг. 4.15 и 4.16) в течение каждого периода в цепь тока сигнала на время $T_4$ будет включаться добавочное сопротивление $r_1$, вызывая его

уменьшение. В интервале времени $T_3$ никаких изменений в токе сигнала происходить не будет. Таким образом, форма тока сигнала приобретет вид фиг. 4.16, *б*. Так как реле $P_1$ реагирует только на амплитуду тока (вне зависимости от полярности), то оно будет срабатывать в интервалах $T_3$ и отпускать в интервалах $T_4$ (за счет подбора реле с определенным током срабатывания).

Введем понятие коэффициента команды, понимая под ним среднее значение того воздействия, которое оказывают реле $P_1$ и $P_2$ на последующие устройства бортовой аппаратуры снаряда. Очевидно, что коэффициенты команды в указанном смысле характеризуются формулами

$$K_1 = \frac{T_3 - T_4}{T_3 + T_4}, \tag{4.11}$$

$$K_2 = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}. \tag{4.12}$$




Фиг. 4.17. График коэффициентов команды $K_1$ и $K_2$ в функции угла отклонения рукоятки управления от вертикального положения.

График для коэффициентов команды $K_1$ и $K_2$ в функции угла поворота рукоятки управления от вертикального положения дан на фиг. 4.17.

В приведенной на фиг. 4.15 схеме системы телеуправления реле дешифратора $P_1$ и $P_2$ воздействуют на электромагниты интерцепторов, управляющих поворотом снаряда в двух плоскостях. Если пренебречь временем срабатывания этих электромагнитов, то их отклонения в одной плоскости будут определяться $T_1$ и $T_2$, а в другой — $T_3$ и $T_4$. Следовательно, коэффициенты команды $K_1$ и $K_2$ будут характеризовать средние значения управляющих сил, приложенных к снаряду в плоскости стрельбы (вверх, вниз) и в плоскости, к ней перпендикулярной (влево, вправо).

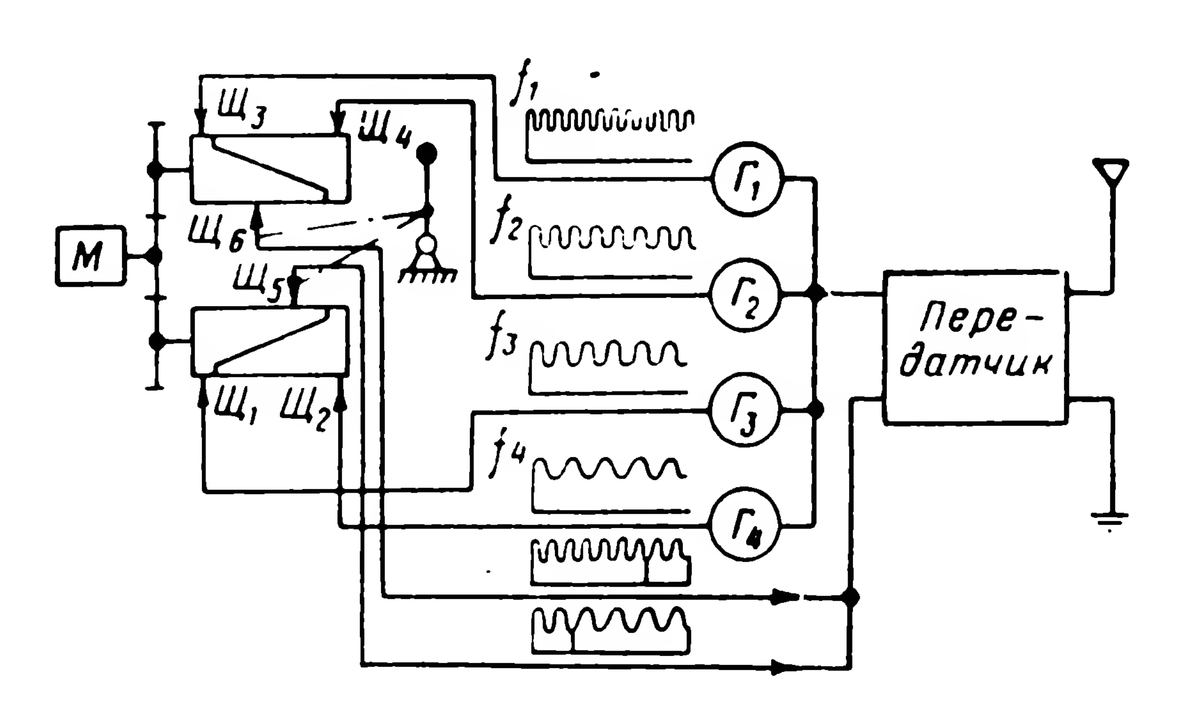
## 2. Радиотехническая линия связи

Радиосвязь может осуществляться на волнах любой длины. Выбор диапазона обусловлен тем, что с уменьшением длины волны уменьшаются и размеры антенны.

В качестве примера использования радиотехнической линии для передачи команд кратко опишем схему, принцип работы которой аналогичен принципу действия описанной выше проводной линии. Принципиальная схема аппаратуры пункта управления приведена на фиг. 4.18.

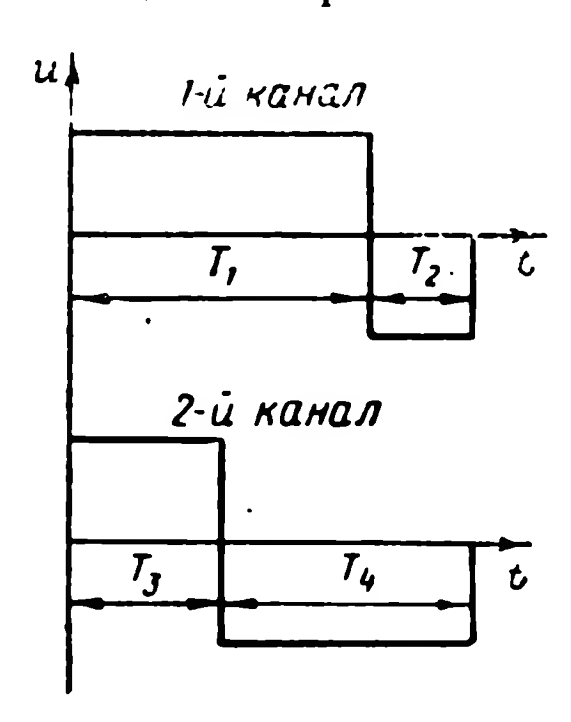
Для образования команд управления имеется командный прибор, содержащий два валика, вращаемые двигателем, ручку для перемещения щеток вдоль образующих валиков, модулятор, в ко-

торый входят четыре генератора звуковых частот $f_1$, $f_2$, $f_3$ и $f_4$, и передатчик с антенной. Напряжения звуковых частот модулятора подводятся через щетки $Щ_1$, $Щ_2$, $Щ_3$ и $Щ_4$ к половинкам валиков, и в каждый момент времени два из этих напряжений воздейству-




Фиг. 4.18. Принципиальная схема аппаратуры пункта управления снарядом $H_s$-293

ют на передатчик, модулируя несущую частоту. На борту снаряда находится приемник с антенной, дешифратор и усилитель.




Фиг. 4.19. Диаграмма напряжений, управляющих снарядом, на выходе дешифратора.

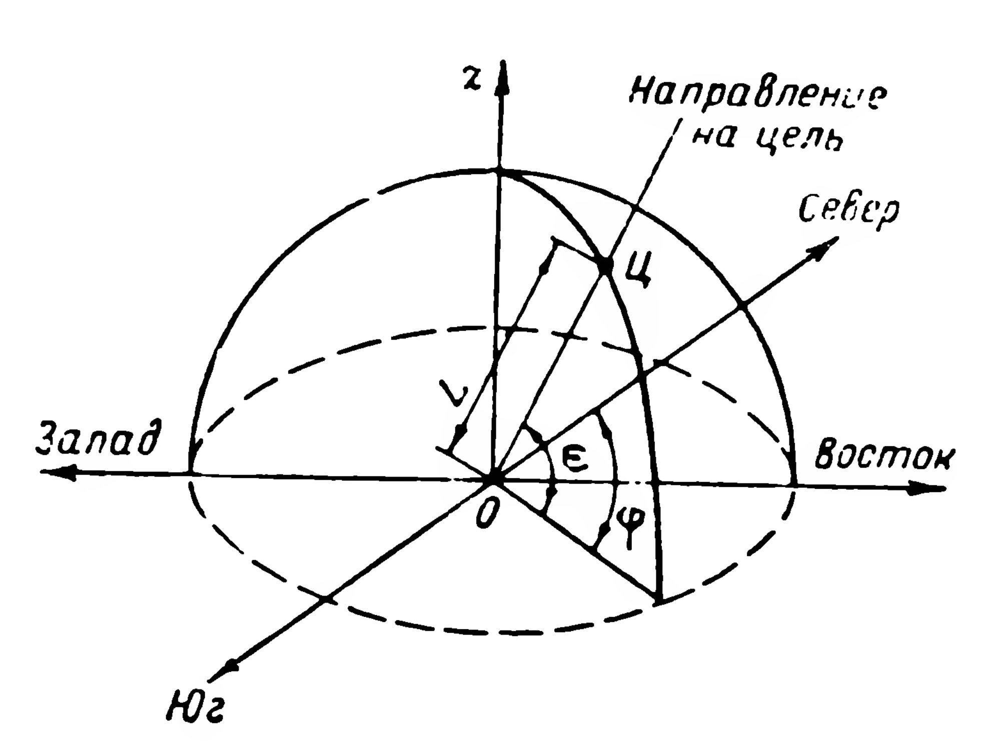
Дешифратор представляет собой систему резонансных контуров, на которых выделяются напряжения модулирующих частот $f_1$ и $f_2$ в одном канале и $f_3$ и $f_4$ — в другом. После выпрямления и усиления на выходе обоих каналов дешифратора получаем последовательности полярных импульсов, изображенных на фиг. 4.19. Интервалы времени $T_1$, $T_2$, $T_3$ и $T_4$, характеризующие эти последовательности, определяются величиной и направлением отклонения от вертикали рукоятки управления снарядом в двух перпендикулярных плоскостях. Среднее значение напряжения на выходе каждого канала определяется коэффициентами команды, известными из формул (4.11) и (4.12). Далее эти напряжения могут быть поданы на последующие звенья системы управления снарядом либо непосредственно, либо после сглаживания соответствующим фильтром.

## § 4.3. РАДИОЛОКАЦИОНННЫЕ СТАНЦИИ ОБНАРУЖЕНИЯ ВОЗДУШНЫХ ЦЕЛЕЙ

Радиолокационные станции обнаружения воздушных целей, как правило, являются станциями кругового обзора. В гл. XIV

рассмотрен один из вариантов реализации метода телеуправления, в котором сведения о координатах цели и снаряда получаются с помощью станции кругового обзора. В этом параграфе рассматриваются различные принципы измерения координат цели с помощью станций обнаружения. Очевидно, что те же принципы могут быть использованы и для определения координат снаряда *.

Станции обнаружения для характеристики положения цели в пространстве обычно используют сферическую систему координат. В этой системе координатами являются наклонная дальность $L$, азимут $\varphi$ и угол места $\varepsilon$ (фиг. 4.20). Область пространства, просматриваемая радиолокационной станцией, характеризуется дальностью обнаружения целей, сектором обзора по азимуту и сектором обзора по углу места. Угол раствора диаграммы направленности станций значительно меньше требуемого сектора обзора в соответствующей плоскости. Поэтому для обнаружения целей диаграмма направленности станции должна перемещаться в пределах заданной области пространства. Такое перемещение диаграммы направленности, подчиненное определенному закону, называется радиолокационным обзором пространства.



Фиг 4.20. Сферическая система координат цели.

Системы обзора должны обладать следующими качествами:

1) не должно быть пропусков целей при обзоре или, иными словами, должна облучаться каждая точка внутри заданной области;

2) минимальная длительность обзора заданной области; при большой длительности обзора за время между двумя последовательными облучениями цель успеет переместиться на значительное расстояние и данные о ее положении будут резко изменяться;

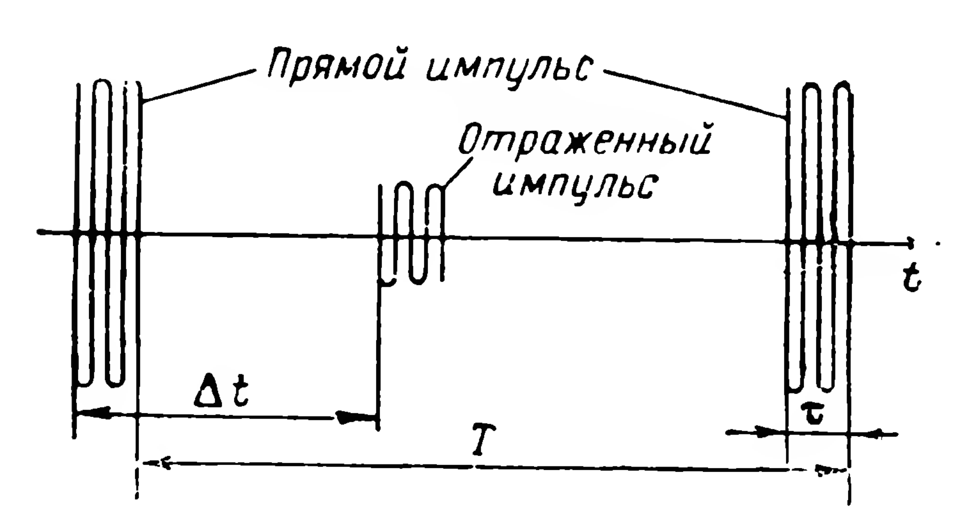
3) при каждом облучении цели число попадающих на нее импульсов не должно быть меньше определенного минимума, чтобы индикация целей была надежной;

4) необходимая точность определения координат обнаруженных целей.

Радиолокационные станции могут работать как в режиме по-

* Б. М. Степанов, Радиолокационный обзор, Воениздат, 1959.

иска, так и в режиме автоматического сопровождения цели или снаряда. Сведения об обнаруженных во время поиска целях передаются на индикатор станции, где на экране электронно-лучевой трубки воспроизводятся две координаты цели (обычно дальность и азимут). Третья координата воспроизводится на экране второй трубки. В режиме автосопровождения равносигнальная зона антенны станции с помощью следящей системы направляется на цель, в результате чего положение антенны определяет величины азимута и угла места цели.




Фиг. 4.21. Прямой и отраженный импульсы радиолокационной станции.

Остановимся кратко на принципах замера координат. Для определения дальности до цели обычно используется импульсный метод. Передатчик радиолокационной станции генерирует кратковременные импульсы высокой частоты, называемые прямыми или зондирующими. В паузах между ними осуществляется прием слабых отраженных сигналов. Расположение импульсов во времени показано на фиг. 4.21. Время между импульсами $T$ называется периодом повторения импульсов. Дальность определяется $\Delta t$ — временем между началом посылки прямого и началом приема отраженного импульса. За время $\Delta t$ как прямой, так и отраженный импульсы должны пройти расстояние до цели (дальность $L$), определяемое соотношением

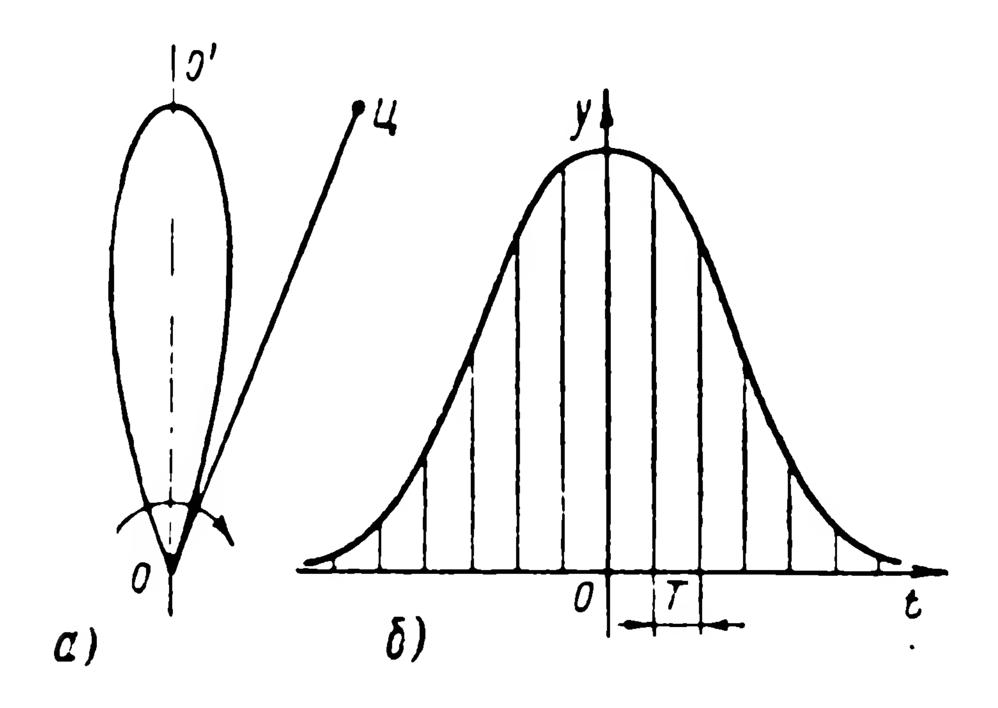
$$L = \frac{c}{2} \Delta t, \qquad (4.13)$$

где $c$ — скорость распространения радиоволн — скорость света, приблизительно равная 300 000 *км/сек*.

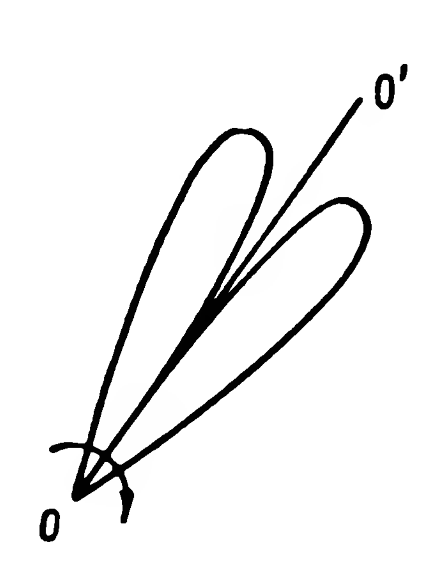
Одним из недостатков импульсного метода является невозможность обнаружить и определить дальность объектов, расположенных от станции ближе чем $L = c\tau/2$, так как в этом случае отраженный импульс придет тогда, когда еще не закончилось излучение прямого импульса. Импульсный метод обеспечивает очень высокие точности определения расстояния. Средняя ошибка в точных импульсных дальномерах доходит до нескольких метров, причем эта точность обеспечивается для расстояний до целей, измеряемых десятками километров (40—60 *км*).

Для определения направления по азимуту и углу места используются направленные свойства антенны. При этом для определения азимута цели необходимо, чтобы антенная система имела ярко выраженные направленные свойства в горизонтальной

плоскости, а для определения угла места — в вертикальной плоскости. При применении одной антенны часто используют оценку максимума отраженного сигнала. На фиг. 4.22 приведена диаграмма направленности антенны в одной плоскости и огибающая амплитуды отраженных от цели импульсов. При вращении антенны диаграмма направленности проходит через цель. При симметричной диаграмме направленности линия ОЦ будет энергетиче-




Фиг. 4.22. Диаграмма направленности антенны (*а*) и огибающая амплитуды отраженных сигналов (*б*).

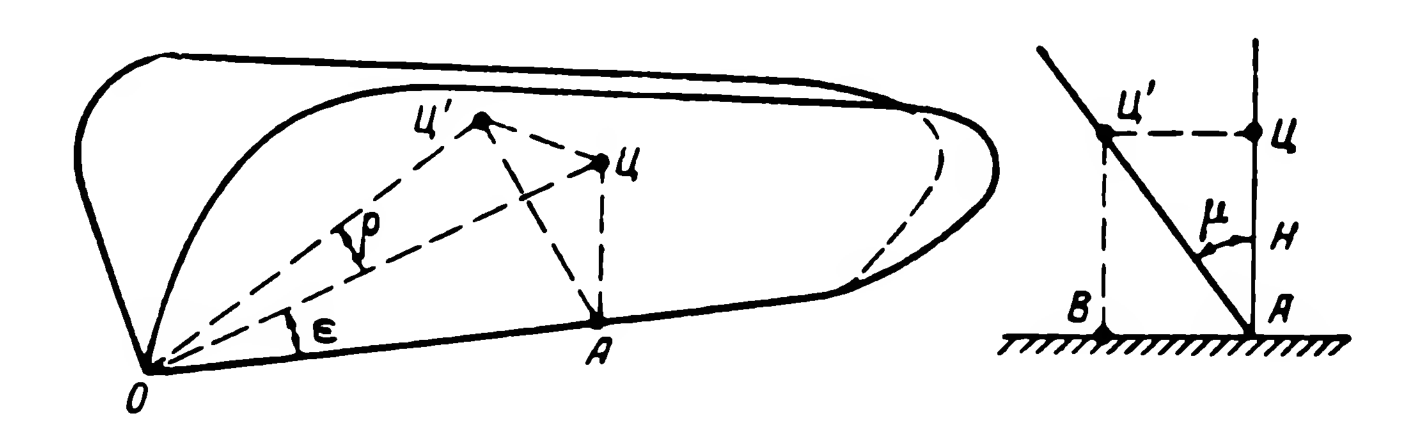



Фиг. 4.23. Диаграмма направленности с резким минимумом.

ским центром точки импульсов. Если принятые сигналы подать на индикатор, то импульсу с максимальной амплитудой будет соответствовать максимальная яркость пятна. Оператор стремится так установить направление антенны, чтобы получить на экране индикатора максимальную яркость отметки. Чем больше крутизна характеристики диаграммы направленности, тем выше точность определения направления на цель. Направление на цель можно определить и при вращении антенны с постоянной скоростью. Очевидно, что отраженные от цели импульсы будут образовывать светящиеся пятна. Так как частота посылки импульсов велика, то пятна сливаются, образуя дугу. Центр дуги соответствует направлению на цель. В некоторых случаях для определения направления на цель используются две антенны с узкой диаграммой направленности (фиг. 4.23). Процесс определения направления на цель сводится здесь к тому, что, изменяя положение диаграммы направленности в вертикальной плоскости, добиваются минимума амплитуды отраженного сигнала (в этом случае минумум диаграммы направленности направлен на цель) и отсчитывают угол места.

Наибольшее распространение для определения азимута и угла места нашли V-лучевые диаграммы направленности

(фиг. 4.24), имеющие сложную форму. Диаграмма состоит из двух плоских лепестков, один из которых вертикален, а второй составляет с ним некоторый угол. Ширина лепестков в горизонтальной плоскости делается как можно меньше (0,5—2,0°). Азимут цели определяется при помощи вертикального лепестка по максимуму амплитуды отраженного сигнала. Для замера угла места цели используются оба лепестка. Чем больше угол места цели $\varepsilon$, тем больше расстояние $ЦЦ'$ и угол $\rho$. Следовательно, с увеличением высоты растет интервал времени между максимумами амплитуд отраженных сигналов. Зная угол $\rho$ и наклонную дальность $L$, можно определить высоту цели. Согласно геометрическим построениям на фиг. 4.24 получим




Фиг. 4.24. V-лучевая диаграмма направленности.

$$H = ЦЦ' \operatorname{tg} \mu; \tag{4.14}$$

$$ЦЦ' = BA = L \cos \varepsilon \sin \rho; \tag{4.15}$$

$$L \cos \varepsilon = \sqrt{L^2 - H^2}, \tag{4.16}$$

где $\mu$ — угол раствора диаграмм направленности.

После преобразования

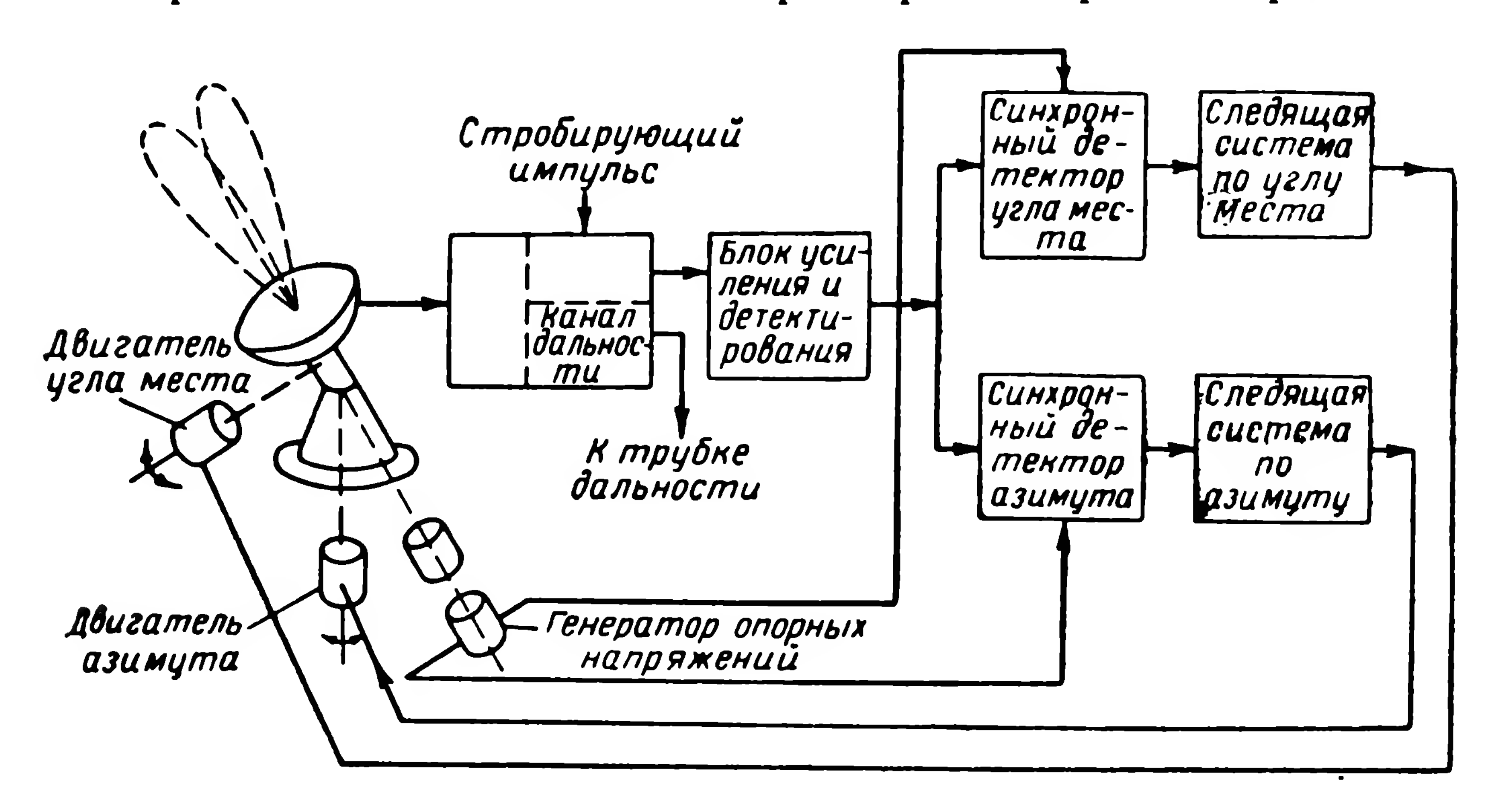
$$H = L \frac{\sin \rho \operatorname{tg} \mu}{\sqrt{1 + \sin^2 \rho \operatorname{tg}^2 \mu}}. \tag{4.17}$$

При угле раствора $\mu = 45°$ имеем

$$H = L \frac{\sin \rho}{\sqrt{1 + \sin^2 \rho}}. \tag{4.18}$$

Наиболее точно определяются координаты цели при использовании принципа равносигнальной зоны. Принцип получения сигналов, пропорциональных углам отклонения равносигнальной зоны от линии радиостанция — цель, аналогичен принципу получения сигнала управления в радиолокационных головках самонаведения (см. § 3.5). Средняя ошибка определения угловых координат цели колеблется в пределах 0,2′ — 7,2′. Принцип равно-

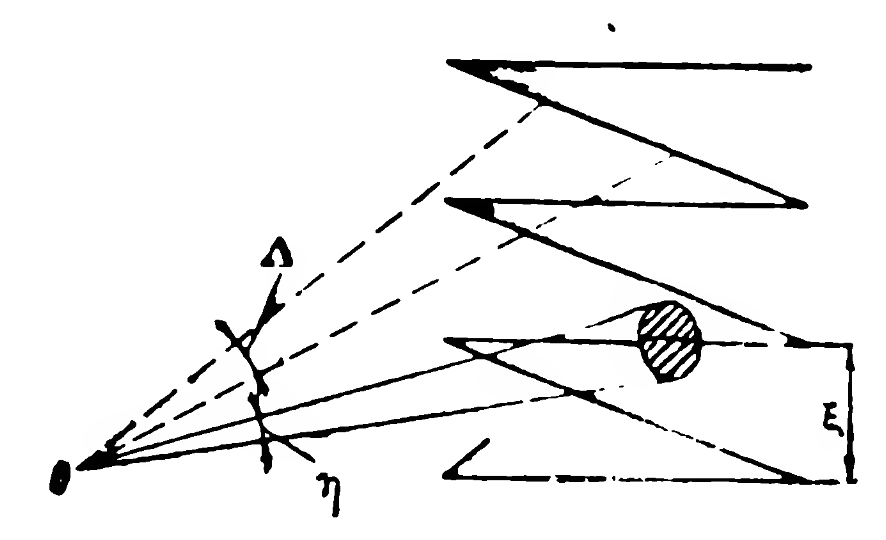
сигнальной зоны используется при работе станции в режиме автосопровождения. На фиг. 4.25 приведена блок-схема системы автосопровождения. Одной из характеристик работы радиолока-




Фиг. 4.25. Блок-схема системы автосопровождения цели.

ционной станции обнаружения является величина пространства, в котором могут быть обнаружены цели, и принцип обзора этого пространства.

Периодом обзора радиолокационной станции ($T_{обз}$) называется отрезок времени между двумя последовательными прохождениями диаграммы направленности антенны через одну и ту же точку пространства. Обзор пространства может совершаться по какой-либо сложной траектории (фиг. 4. 26). Максимальный угол между соседними элементами траектории движения диаграммы направленности называется ее шагом ($\xi$). Диаграмма направленности должна перемещаться с определенной угловой скоростью $\Omega$, чтобы все заданное пространство было бы просмотрено за заданный отрезок времени. Так, угол $\Delta$ будет просмотрен за время




Фиг. 4.26. Схема зигзагообразного обзора.

$$t = \frac{\Delta}{\Omega} \; [сек]. \qquad (4.19)$$

Временем облучения ($T_{обл}$) называется время, в течение которого цель находится в пределах диаграммы направленности антенны. Время облучения равно

$$T_{обл} = \frac{\Phi}{\Omega}, \qquad (4.20)$$

где $\Phi$ — угол раствора диаграммы направленности.

За время $T_{обл}$ от цели отражается $n$ импульсов. Для надежной индикации цели необходимо, чтобы минимальное количество импульсов было не менее $n_{min} \approx 5 \div 6$. Необходимость нескольких отраженных импульсов обусловлена тем, что на фоне собственных шумов приемника один слабый отраженный импульс может быть не замечен. Если же при каждом облучении цели принимается несколько отраженных импульсов, которые имеют приблизительно постоянную амплитуду и моменты времени их прихода соответствуют расположению электронного луча в одной и той же точке индикатора, то суммарное их действие будет создавать бóльшую яркость отметки, чем отметки шума. Если положение цели определяется не визуально, а автоматически, то оказывается возможным уменьшить $n_{min}$ до 1—2, что дает возможность сократить период обзора (увеличив угловую скорость $\Omega$).

Период обзора определяется на основании тактических требований. Так как радиолокационные станции используются для обнаружения подвижных целей, то за период обзора цель не должна пройти большое расстояние, чтобы не вызвать скачка отметки на индикаторе. Скачки отметок ухудшают условия наблюдения целей, снижают точность определения их координат и усложняют ориентировку операторов.

Оценка максимально допустимого периода обзора производится по формуле

$$T_{обз} \leqslant k \frac{Q}{V_{max}}, \qquad (4.21)$$

где $Q$ — линейный размер отметки цели (масштаб);
$V_{max}$ — максимальная скорость движения цели;
$k$ — коэффициент, изменяющийся от $^1/_3$ до 3 в зависимости от тактического назначения станции.

Минимальный период обзора является функцией размеров области обзора, раствора диаграммы направленности антенны и минимального количества импульсов, необходимых для четкого обнаружения цели:

$$(T_{обз})_{min} = \frac{n_{min} T \Delta_\varepsilon \Delta_\varphi}{\eta_\varepsilon \eta_\varphi}, \qquad (4.22)$$

где $T$ — период повторения импульсов;

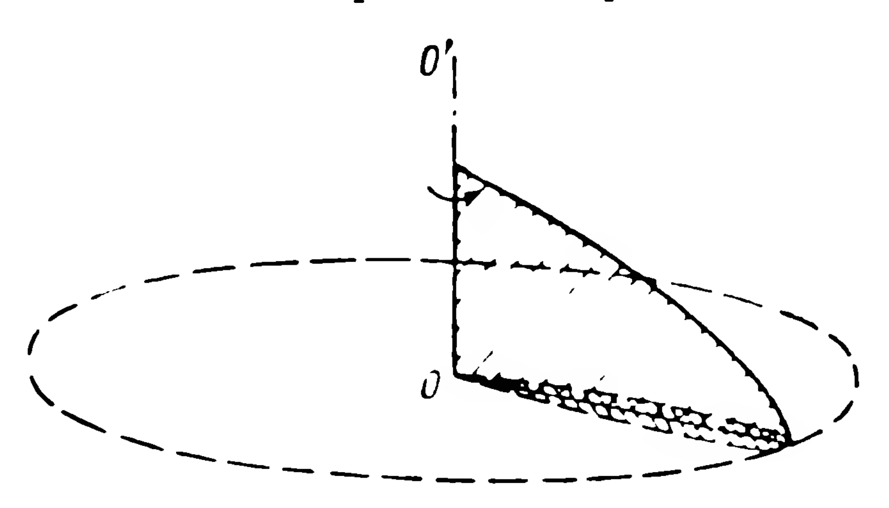
$\Delta_\varepsilon$, $\Delta_\varphi$ — угловые размеры области по углу места и по азимуту;

$\eta_\varepsilon$, $\eta_\varphi$ — угловые размеры диаграммы направленности антенны по углу места и по азимуту.

Период повторения импульсов определяется максимальной дальностью действия радиолокационной станции

$$T = k\frac{2L_{\max}}{c}, \tag{4. 23}$$

где $k$ — коэффициент запаса, равный приблизительно 1,25.




Фиг. 4.27. Схема кругового обзора.

Подставляя значение $T$ в формулу (4.22), получим

$$(T_{\text{обз}})_{\min} = 2{,}5\frac{n_{\min}L_{\max}\Delta_\varepsilon\Delta_\varphi}{\eta_\varepsilon\eta_\varphi}. \tag{4. 24}$$

По формуле (4.24) определяется теоретически минимальный период обзора. Но так как при обзоре некоторые точки области обзора облучаются при двух положениях диаграммы направленности (фиг. 4.26), то необходимо полученное значение времени обзора $(T_{\text{обз}})_{\min}$ несколько увеличить. Как указывалось выше, существует несколько видов обзора пространства, определяемых характером движения диаграммы направленности антенного устройства. Простейшим из этих видов обзора является круговой обзор, который находит наибольшее применение при управлении снарядами. При круговом обзоре плоская диаграмма направленности вращается вокруг вертикальной оси (фиг. 4.27). При этом обеспечивается высокая точность измерения дальности и азимута. При использовании $V$-образной диаграммы направленности определяется еще и угол места (см. фиг. 4.24). Частным случаем кругового обзора является секторный обзор — обзор части окружности плоскими диаграммами направленности.

При использовании игольчатой диаграммы направленности (симметричной относительно направления максимального излуче-

ния) применяют зигзагообразный, винтовой, спиральный, поступательно-конический и конический обзоры. В этих случаях диаграмма направленности совершает сложное движение. Из всех этих видов обзора для управления снарядами наибольшее значение имеет конический обзор. При коническом обзоре узкого сектора образуется равносигнальная зона, которая используется в системах самонаведения, управления по лучу и автосопровождения целей.

## § 4.4. НАВЕДЕНИЕ СНАРЯДОВ МЕТОДАМИ РАДИОНАВИГАЦИИ

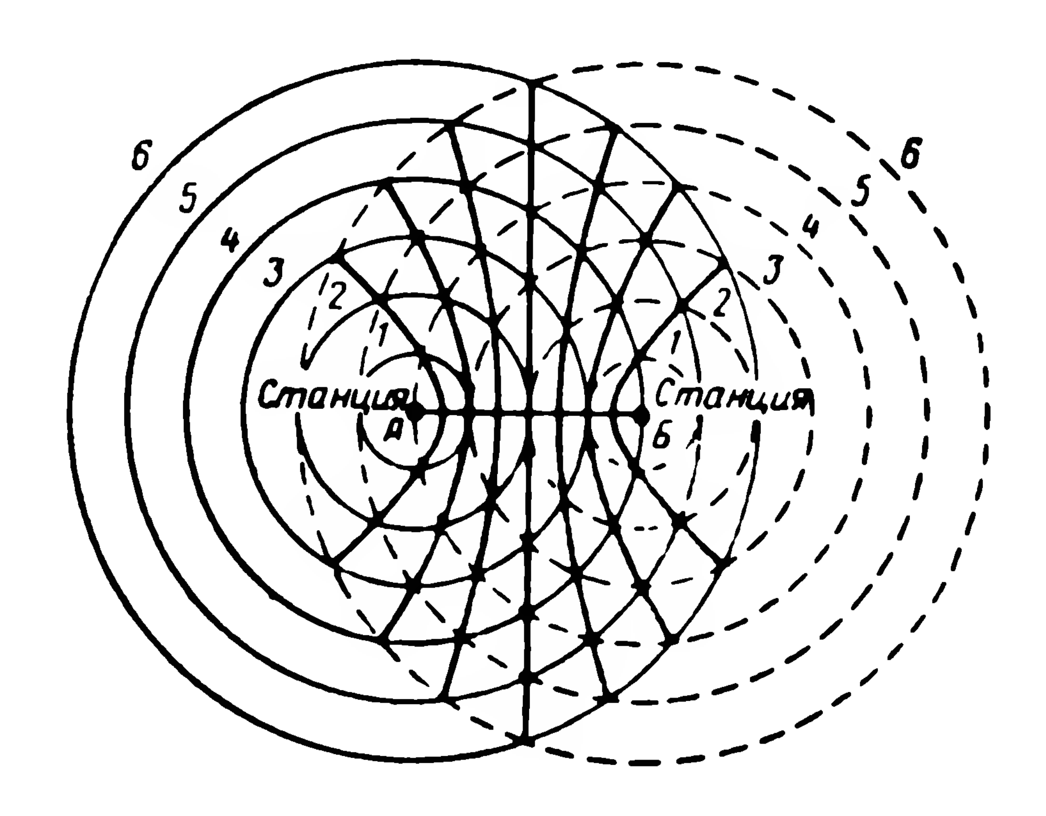
Для вождения самолетов широко используются различные радионавигационные системы. В простейшем случае эти системы дают возможность осуществлять полет на радиомаяк и от него, а в сочетании с радиодальномером — непрерывно определять расстояние до маяка. Существуют также системы, позволяющие определить азимут самолета относительно маяка. Путем пеленгации с самолета двух маяков или, наоборот, пеленгации самолета двумя станциями на земле с последующей передачей результатов пеленгации на самолет можно определить положение самолета относительно земной поверхности. Наконец, все большее применение находят гиперболические системы радионавигации, которые позволяют определить положение самолета путем измерения промежутка времени между приходом сигналов от двух импульсных радиостанций *.

Все указанные системы радионавигации не определяют высоты полета самолета, которая должна определяться автономно-барометрическим прибором или радиовысотомером. Для наведения снарядов методом телеуправления в принципе могут быть использованы те же самые радионавигационные средства, что и для вождения самолетов, при условии автоматизации съема информации о положении снаряда относительно земли.

В качестве примера рассмотрим более подробно принцип получения управляющих сигналов при использовании гиперболических систем радионавигации. На фиг. 4.28 поясняется принцип образования семейства гипербол с помощью двух радиостанций *А* и *Б*, излучающих кратковременные импульсы высокочастотных колебаний электромагнитной энергии. Окружности со станцией в центре являются геометрическим местом точек, до которых время распространения импульса от этой станции одинаково. Если две станции излучают импульсы одновременно и последние приняты в некоторой точке в один момент, то эта точка находится на равном расстоянии от обеих станций. Если на какой-либо кривой время между приемом импульсов от станций *А* и *Б* является постоян-

* А. С. Локк, Управляемые снаряды, Гостехиздат, 1957.

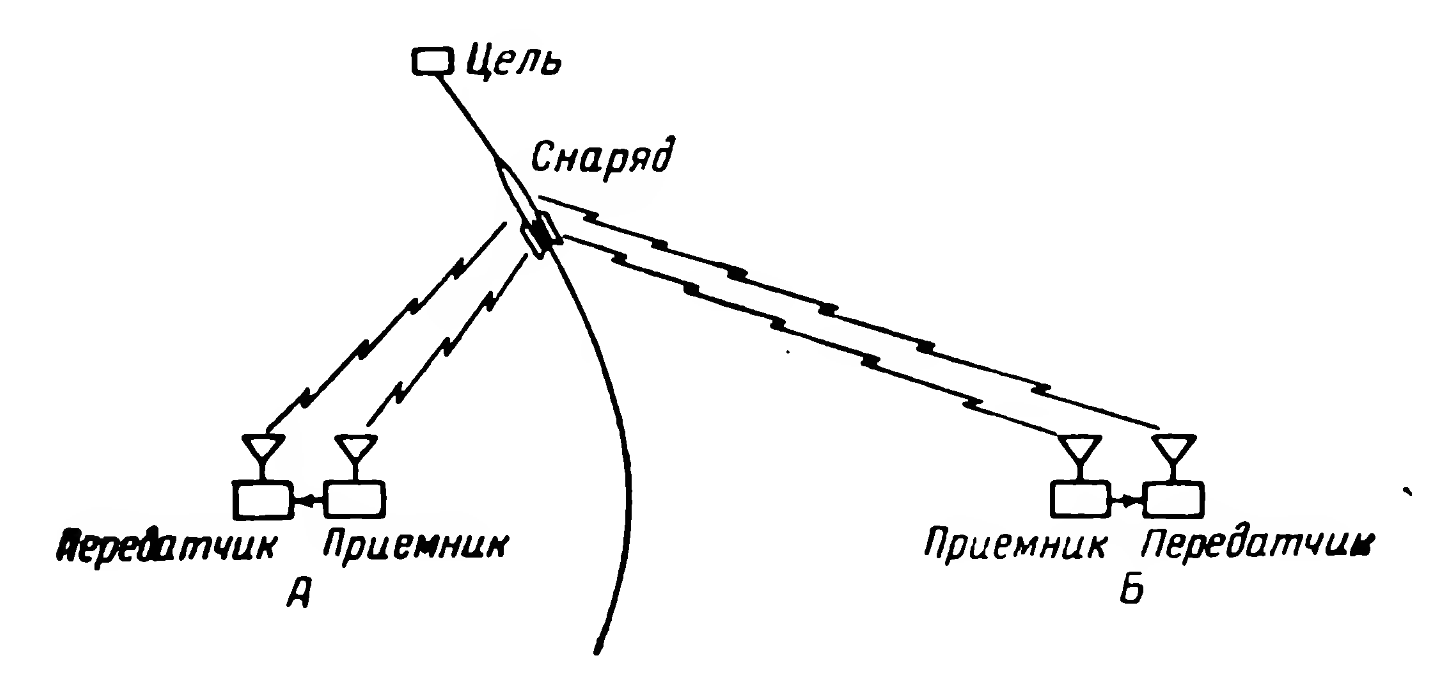
ным, то вследствие постоянства скорости распространения радиоволн в любой точке этой кривой разность расстояний до обеих станций также постоянна. Нетрудно видеть, что указанная кривая является гиперболой с фокусами в точках *А* и *Б*.




**Фиг. 4.28.** К принципу образования семейства гипербол.

*1—6* — окружности равных дальностей.

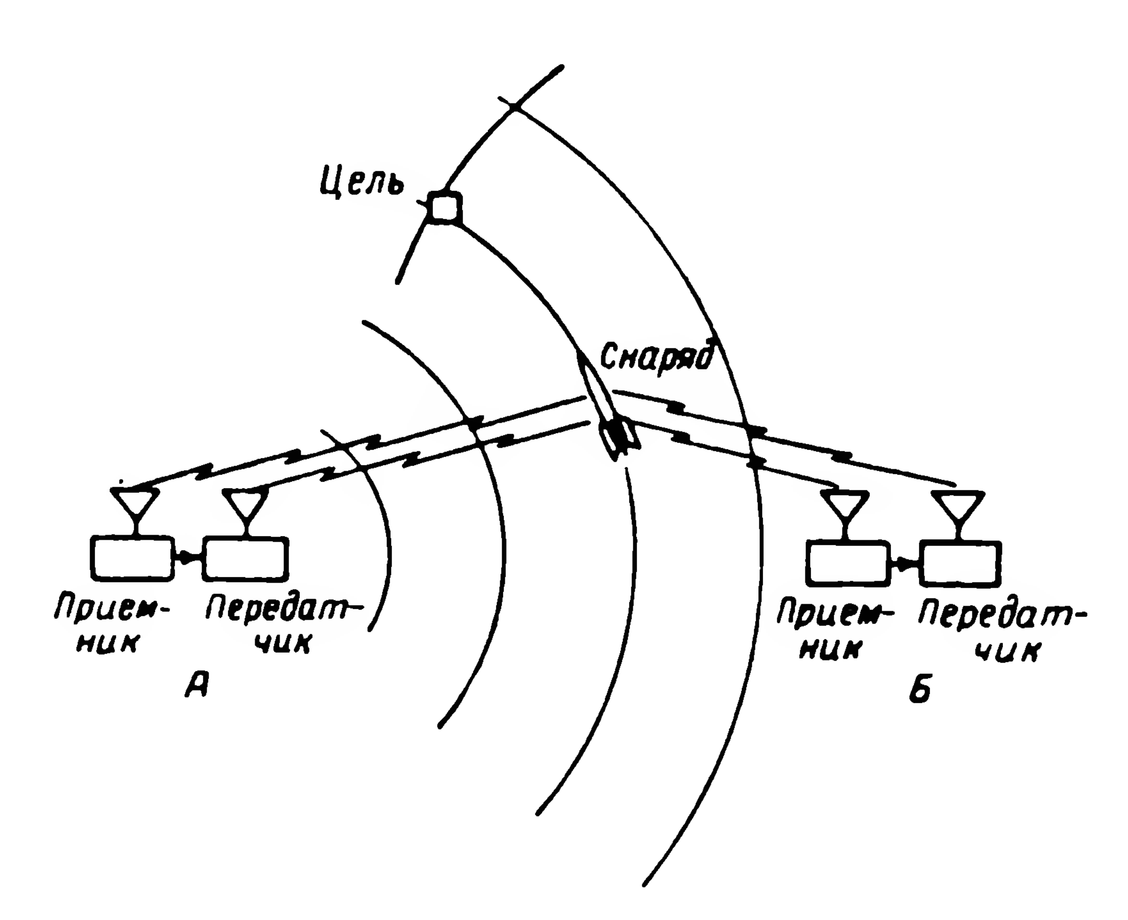
Один из возможных способов применения гиперболической системы навигации для наведения снарядов поясняется фиг. 4.29. На снаряде установлен приемо-передатчик, являющийся запросчиком, а на станциях *А* и *Б* — приемо-передатчики, работающие в ка-




Фиг. 4.29. Схема гиперболической навигационной системы для управления снарядом.

честве ответчиков. Передатчик снаряда излучает импульс, принятие которого на станциях *А* и *Б* вызывает посылку этими станциями импульсов, принимаемых на снаряде. Снаряд должен двигаться к цели по одной из гипербол, определяемых заданным значением интервала времени между приемом импульсов от станций *А* и *Б*.

Измеряя этот интервал на снаряде, можно получить управляющий сигнал в том случае, если указанный интервал будет больше или меньше заданного. Этот сигнал через систему управления обеспечивает возвращение снаряда на заданную траекторию. Описанная система дает возможность заставить снаряд двигаться по заранее выбранной гиперболе, проходящей через цель. Высота полета выдерживается определенной, причем чувствительным элементом системы стабилизации высоты должен быть какой-либо высотомер.




Фиг. 4.30. Схема круговой навигационной системы для управления снарядом.

Чтобы определить, когда снаряд находится над целью, можно использовать другую пару станций, которая создает семейство гипербол для определения дальности. Для повышения точности при определении дальности желательно, чтобы семейство гипербол дальности в районе цели пересекалось с семейством курсовых гипербол под углами, близкими к прямым. Когда снаряд достигнет заданной гиперболы дальности, проходящей через цель, на нем включается система самонаведения (если она применяется) или он переводится в пикирование на цель.

Другой способ измерения дальности состоит в определении на снаряде времени между посылкой импульса передатчиком снаряда и приходом ответного импульса от одной из станций (*А* или *Б*). Таким образом определяется расстояние до станции. Когда это расстояние достигнет заданного значения, снаряд переводится в пикирование на цель. Последний метод может быть использован для управления снарядом способом круговой навигации, схема которого приведена на фиг. 4.30. В этом случае для задания траектории используется лишь одна станция *А*. Если время между по-

сылкой и приемом ответного импульса на снаряде постоянно, то он будет двигаться по окружности со станцией *А* в центре. Это время задается так, чтобы траектория снаряда (окружность) проходила через цель. При отклонении указанного интервала времени от заданного значения вырабатывается сигнал, который через систему управления возвращает снаряд на заданную окружность. Станция *Б* в этом случае служит для определения положения снаряда на круговой траектории путем измерения времени прохождения до снаряда импульсов от этой станции. При достижении заданной точки на круговой орбите снаряд переводится в пикирование.

Дальность действия гиперболической и круговой систем навигации зависит от частоты, используемой при посылке импульсов. При применении ультракоротких волн эта дальность ограничивается прямолинейным характером распространения этих волн и зависит от высоты полета снаряда. При использовании волн средне- и длинноволнового диапазона дальность действия достигает нескольких тысяч километров.

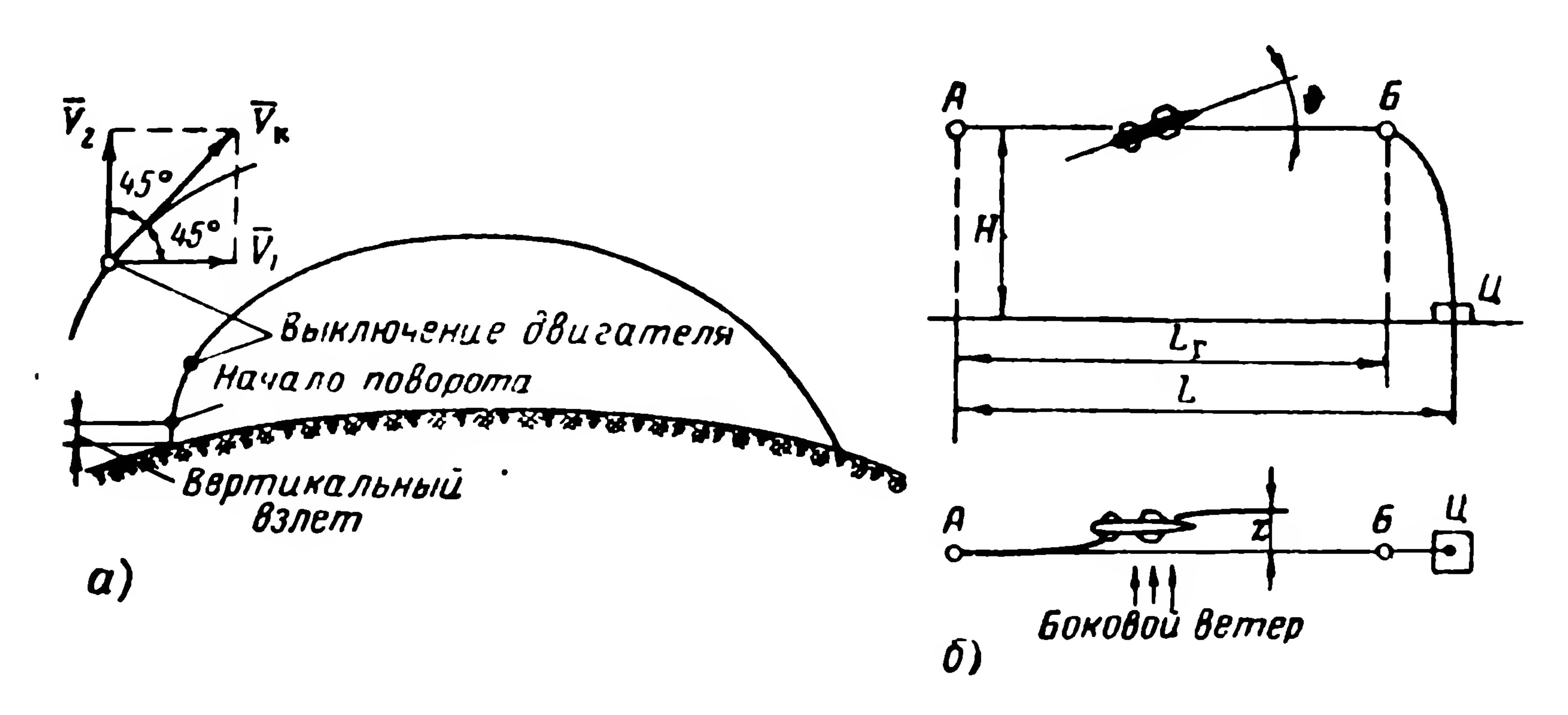
Достоинством применения рассмотренных систем гиперболической и круговой навигации для управления снарядами является возможность использования одной пары станций для управления многими снарядами, запускаемыми с самых различных стартовых площадок, разбросанных на большой площади. После старта снаряд следует по траектории, определенной программным устройством, пока не войдет в зону заданной гиперболы, после чего включается система управления от радионавигационной системы. Точность гиперболических систем навигации очень высока.

## *Глава V*

# УПРАВЛЯЮЩИЕ СИГНАЛЫ ПРИ АВТОНОМНОМ НАВЕДЕНИИ

## § 5.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В зависимости от типа снаряда, на котором используется система автономного управления, для работы этой системы нужны те или иные управляющие сигналы. Так, например, баллистическая ракета должна двигаться на активном участке полета по заданной траектории. Активный участок такой траектории в вертикальной плоскости, даваемый программным механизмом, приведен на фиг. 5.1, *а*. Практически программный механизм задает не траекторию, а направление продольной оси ракеты как функцию времени. При полете ракеты под действием различных внешних возмущений (ветер, несимметрия аэродинамических сил и т. п.) ее траектория может отличаться от заданной. Поэтому система управления ракеты должна обеспечить сравнение действительного положения центра массы с заданным и образование управляющего сигнала при появлении рассогласования.




Фиг. 5.1. Виды программных траекторий.

Ракета может отклониться от заданной ей плоскости стрельбы. Следовательно, необходимо измерять и устранять боковые от-

клонения ракеты от этой плоскости. Наконец, при достижении ракетой определенной скорости двигатель должен быть выключен системой управления, которая непрерывно сравнивает действительное значение скорости с заданным расчетным значением.

При автономном управлении самолетами-снарядами состав сигналов управления зависит от дальности полета. Самолеты-снаряды малой дальности имеют прямолинейную траекторию, иногда разделенную на несколько участков разной высоты. Здесь снова возникает задача измерения направления продольной оси снаряда, а также высоты его полета. Для ввода снаряда в пикирование на цель необходимо измерить дальность его полета.

Самолеты-снаряды при полете на небольшие расстояния имеют прямолинейные горизонтальные траектории. Чтобы прямолинейная траектория проходила на определенной высоте (фиг. 5.1, *б*), необходимо измерять положение продольной оси и действительную высоту полета снаряда. Дальность полета может быть задана временем полета, и в этом случае на борту снаряда нужно иметь датчик времени. С увеличением дальности полета ошибки наведения снаряда увеличиваются за счет того, что программа, заданная на старте, не учитывает случайных изменений состояния атмосферы на всей траектории полета. При этом, кроме измерения положения продольной оси снаряда, надо определить высоту, боковое смещение и дальность.

Системы управления при любом методе наведения для обеспечения хороших динамических свойств снарядов требуют введения сигналов, пропорциональных не только его угловым и линейным координатам, но и первым, а иногда и вторым производным от этих координат. Таким образом, возникает задача измерения угловых и линейных скоростей и ускорений снаряда относительно трех его осей.

При полете снарядов, управляемых автономно, на большие дальности возникает задача дискретного или непрерывного определения координат относительно Земли. Это дает возможность определить положение снаряда относительно цели, координаты которой заданы на снаряде.

Опыт навигации самолетов, управляемых летчиком, позволил найти средства для определения своего места относительно земной поверхности. На основании разработанных географических карт, изучения движения Земли относительно небесных тел найдены земные и астрономические ориентиры и системы отсчета, используемые в навигации.

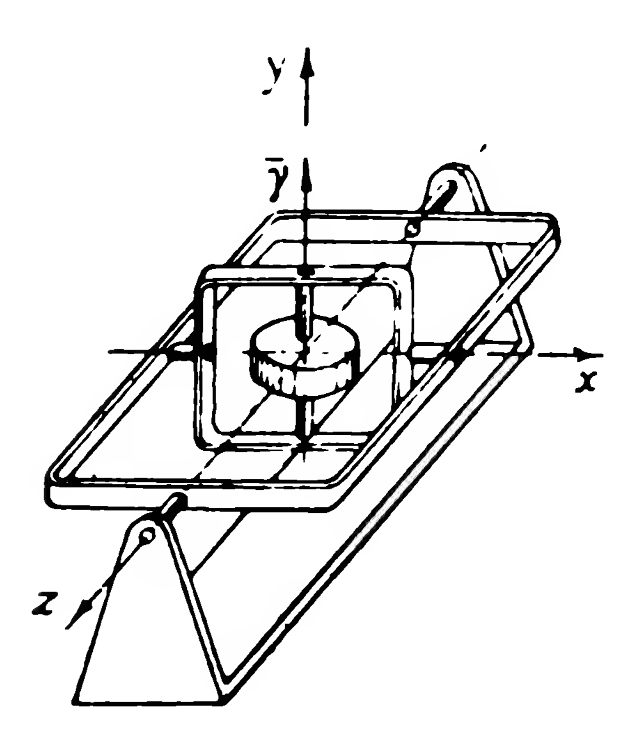
Для повышения точности наведения снаряда применяют инерциально-гироскопические системы, позволяющие определить положение снаряда относительно Земли. В этих системах должны быть акселерометры, измеряющие ускорение центра тяжести снаряда

относительно Земли; для этого их устанавливают на платформу, положение которой поддерживается определенным образом.

В последующих параграфах рассмотрим приборы и системы, применяемые в снарядах, управляемых автономно. Некоторые из этих приборов используют и в системах управления снарядов при самонаведении и телеуправлении.

## § 5.2. ДАТЧИКИ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ОСЕЙ СНАРЯДА

В качестве указателя углов, образуемых осями, связанными со снарядами, с осями «неподвижной» системы координат, служит астатический гироскоп с тремя степенями свободы (фиг. 5.2). Центр тяжести ротора астатического гироскопа совмещается с центром тяжести подвеса, благодаря чему исключается момент от силы тяжести. Положение ротора гироскопа изменяется при движении основания подвеса только вследствие действия на гироскоп сил трения в осях подвеса и некоторой остаточной несбалансированности ротора. Скорость изменения положения ротора гироскопа при надлежащем значении его кинетического момента — небольшая. Поэтому в тех случаях, когда требуется обозначение определенного направления в течение короткого промежутка времени (до 2—3 *мин*), вполне возможно применять для этих целей астатический гироскоп. Так как астатический гироскоп может быть установлен в любом положении, его можно использовать для кратковременного обозначения любого направления относительно неподвижной системы координат. Необходимо при этом астатический гироскоп первоначально устанавливать в нужном направлении, так как гироскоп не определяет это направление.




Фиг. 5.2. Астатический гироскоп.

В качестве датчиков сигналов угловых отклонений могут служить потенциометры, закрепленные на корпусе гироскопа. Щетки крепят на оси соответствующей рамки гироскопа. Гироскоп с тремя степенями свободы с достаточной степенью точности может быть принят за безынерционное звено, передаточная функция которого имеет вид

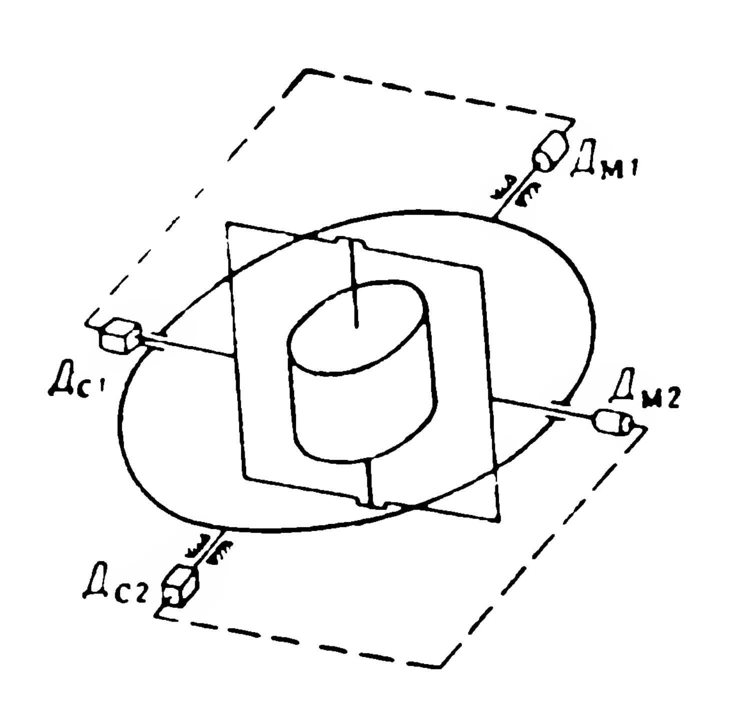
$$W(p) = \frac{u}{\vartheta} = k, \qquad (5.1)$$

где $u$ — напряжение, снимаемое с потенциометра;

$\vartheta$ — угол поворота продольной оси снаряда.

Если время работы гироскопа достаточно велико или действие сил трения в осях подвеса таково, что вызывает значительную прецессию и, следовательно, заметное изменение в положении осей гироскопа (нарушается перпендикулярность рамок), то применяется коррекция гироскопа. Коррекция гироскопа чаще всего обеспечивается двумя не зависимыми друг от друга системами, каждая из которых предназначена для определенной рамки подвеса. Возможно применение коррекции положения одной, наиболее быстро изменяющей свое положение (или наиболее нагруженной) рамки подвеса.

Структурная схема коррекции для поддержания перпендикулярности рамок гироскопа приведена на фиг. 5.3. Связь между датчиком сигнала и датчиком момента в каждой системе коррекции устанавливается перекрестно, т. е. коррекция первой рамки осуществляется за счет приложения момента ко второй рамке. Коррекция может осуществляться как линейной (пропорциональной) системой, так и нелинейной.



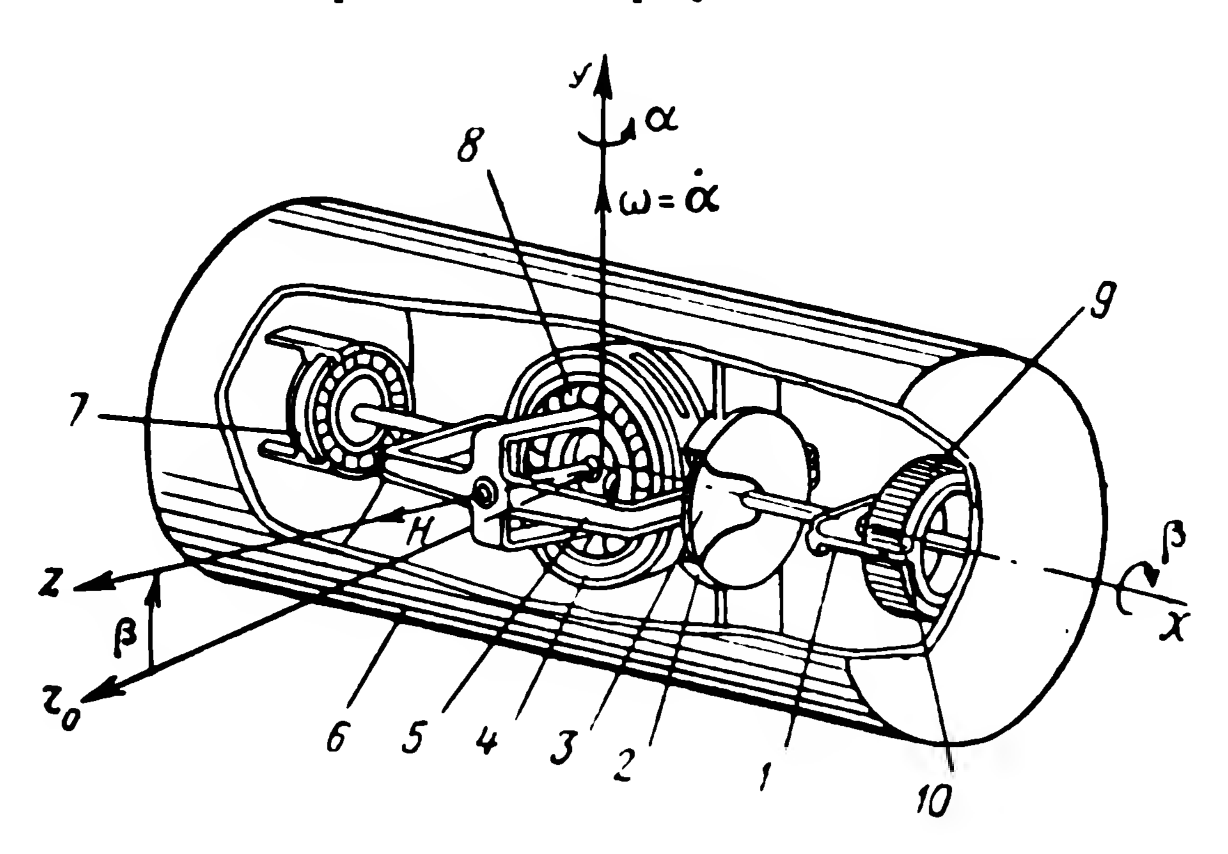

Фиг. 5.3. Структурная схема коррекции гироскопа.

$Д_{с1}$, $Д_{с2}$ — датчики сигнала системы коррекции, $Д_{м1}$, $Д_{м2}$ — датчики момента (моментные устройства) системы коррекции; индекс «1» относится к первой (внутренней), а индекс «2» — ко второй (внешней) рамкам подвеса.

В навигационных системах используются в качестве датчиков интегрирующие поплавковые гироскопы, позволяющие получить высокую точность измерения, повышенную вибропрочность и виброустойчивость к ударам.

Корпус прибора заполняется тяжелой жидкостью. Объем корпуса и удельный вес жидкости подбираются так, чтобы подъемная сила жидкости равнялась весу гироузла и практически полностью разгружала его подшипники. Малая нагрузка подшипников приводит к уменьшению момента трения в них до пренебрежимо малой величины и позволяет избежать передачи ударов и вибраций. Центр тяжести гироузла и центр давления жидкости должны совпадать, чтобы не появлялся момент дисбаланса. Демпфирование обеспечивается трением цилиндрической поверхности кожуха гироузла о тонкий слой вязкой жидкости, находящейся в небольшом зазоре между цилиндрическими поверхностями кожуха гироузла и кожуха прибора. При таком демпфировании отсутствует сухое трение. Величина зазора между кожухом поплавкового гироузла и корпусом прибора выбираются так, чтобы при всех практически возможных в процессе работы гироскопа скоростях поворота поплавкового гироузла относительно корпуса прибора демпфирующий момент был бы строго пропорционален скорости по-

ворота поплавкового гироузла. Прибор помещается в камеру, в которой автоматически поддерживается постоянная температура. Постоянство температуры необходимо, во-первых, для сохранения постоянной вязкости жидкости и, следовательно, неизменного коэффициента демпфирующего момента, во-вторых, для поддержания постоянного удельного веса жидкости и, наконец, в-третьих, для сохранения неизменного положения центра давления жидкости относительно оси вращения гироузла.




Фиг. 5.4. Упрощенная конструктивная схема интегрирующего гироскопа.

1 — щетка потенциометра, 2 — кожух демпфера (жестко связан с корпусом гироскопа), 3 — диск демпфера (жестко связан с рамкой гироскопа), 4 — ротор гироскопа, 5 — рамка гироскопа, 6 — корпус гироскопа, 7 — задатчик, 8 — статор гиромотора, 9 — потенциометр, 10 — вывод средней точки потенциометра.

На фиг. 5.4 приведена упрощенная конструктивная схема интегрирующего гироскопа. Через $\beta$ обозначен угол отклонения рамки (оси гироскопа $z$) от ее исходного положения (ось $z_0$); через $\alpha$ — угол поворота корпуса гироскопа вокруг его измерительной (входной) оси $y$. Покажем, что угол поворота рамки $\beta$ пропорционален углу $\alpha$. При вращении корпуса вокруг измерительной оси $y$ с угловой скоростью $\omega$ возникает гироскопический момент, под действием которого рамка начинает поворачиваться. Вращению рамки препятствует момент, создаваемый демпфером. При повороте рамки возникает также момент сил инерции. К оси рамки приложен и момент трения, но, как указывалось выше, этот момент очень мал и им можно пренебречь. На основании второго закона Ньютона движение гироскопа можно описать уравнением

$$J\frac{d^2\beta}{dt^2} + K_д\frac{d\beta}{dt} = H\frac{d\alpha}{dt}. \qquad (5.2)$$

где $J\frac{d^2\beta}{dt^2}$ — момент сил инерции;

$K_д\frac{d\beta}{dt}$ — момент демпфирования;

$H\frac{d\alpha}{dt}$ — гироскопический момент.

Интегрируя уравнение (5.2) при нулевых начальных условиях $\alpha=\beta=d\beta/dt=0$, получим

$$T\frac{d\beta}{dt}+\beta=\frac{H}{K_д}\alpha, \tag{5. 3}$$

где $T=\frac{J}{K_д}=[0{,}0015\div 0{,}003]$ *сек* — постоянная времени интегрирующего гироскопа.

Интегрируя уравнение (5.3) при тех же начальных условиях, получим

$$\beta=\frac{H}{K_д}\alpha\left(1-e^{-t/T}\right). \tag{5. 4}$$

Если постоянная времени прибора $T$ очень мала, то второй член в скобках формулы (5.4) затухает быстро и можно считать, что

$$\beta=\frac{H}{K_д}\alpha. \tag{5. 5}$$

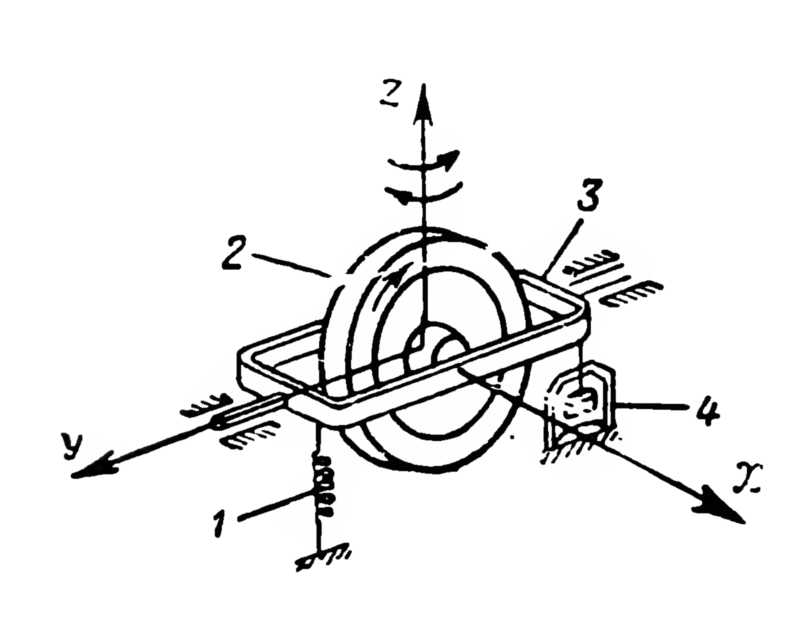
Таким образом, точность выражения (5.5) будет тем больше, чем меньше постоянная времени прибора, что и должно быть принято во внимание при его конструировании.

Применение интегрирующего гироскопа для измерения угла $\alpha$ путем непосредственного (прямого или дистанционного) измерения углов $\beta$ поворота рамки гироскопа относительно корпуса прибора целесообразно только в тех случаях, когда возможные значения углов $\alpha$ и параметры прибора таковы, что во все время работы угол $\beta$ остается малым. Если же угол $\beta$ получает значение, при котором нельзя принять $\cos\beta\approx 1$, то гироскопический момент будет равен $H\frac{d\alpha}{dt}\cos\beta$, что повлечет за собой нелинейность зависимости $\beta$ от $\alpha$. Кроме того, в этом случае нельзя принять $\sin\beta\approx 0$ и на величине угла $\beta$ будет сказываться угловая скорость корпуса прибора вокруг исходного положения оси $z$, т. е. вокруг оси $z_0$. Поэтому при необходимости измерять произвольные углы $\alpha$ интегрирующий гироскоп должен применяться в совокупности со следящим приводом, посредством которого интегрирующий гироскоп разворачивается так, чтобы угловая ско-

рость отработки была бы равна $da/dt$ и тогда $\beta \approx 0$ (с точностью до переходных процессов). Такая система в целом представляет собой интегратор угловой скорости, работающий на принципе интегрирующего привода, где гироскоп является воспринимающим элементом.

## § 5.3. ДАТЧИКИ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

В качестве датчика угловой скорости обычно используют скоростные или двухстепенные гироскопы с ограничением степени свободы подвеса центрирующей пружиной и демпфером (фиг. 5.5) Направление оси, по которой гироскоп не свободен (оси $z$), совпадает с направлением оси, угловая скорость движения относительно которой должна быть замерена. Ротор 2 вращается относительно оси $x$ и может, преодолевая силы пружин 1 и демпфера 4, поворачиваться относительно оси $y$. Рамка 3 поворачивается до тех пор, пока гироскопический момент не будет уравновешен противодействующим моментом пружины. Гироскопический момент пропорционален угловой скорости поворота. На основании второго закона Ньютона уравнение движения скоростного гироскопа следует записать таким образом:




Фиг. 5.5. Принципиальная схема скоростного гироскопа.
1 — пружина, 2 — ротор, 3 — рамка, 4 — демпфер.

$$J\frac{d^2\mu}{dt^2} + h_д\frac{d\mu}{dt} + K_{пр}\mu = H\omega_c, \tag{5.6}$$

где $J$ — момент инерции относительно оси рамки;
$\mu$ — угол поворота рамки;
$h_д \frac{d\mu}{dt}$ — момент демпфера;
$K_{пр}\mu$ — момент пружины;
$H\omega_c$ — гироскопический момент;
$\omega_c$ — угловая скорость поворота снаряда.

По окончании переходного процесса (когда $d^2\mu/dt^2 = d\mu/dt = 0$) угол поворота рамки гироскопа станет пропорциональным угловой скорости поворота снаряда:

$$\mu_{уст} = \frac{H\omega_c}{K_{пр}}. \tag{5.7}$$

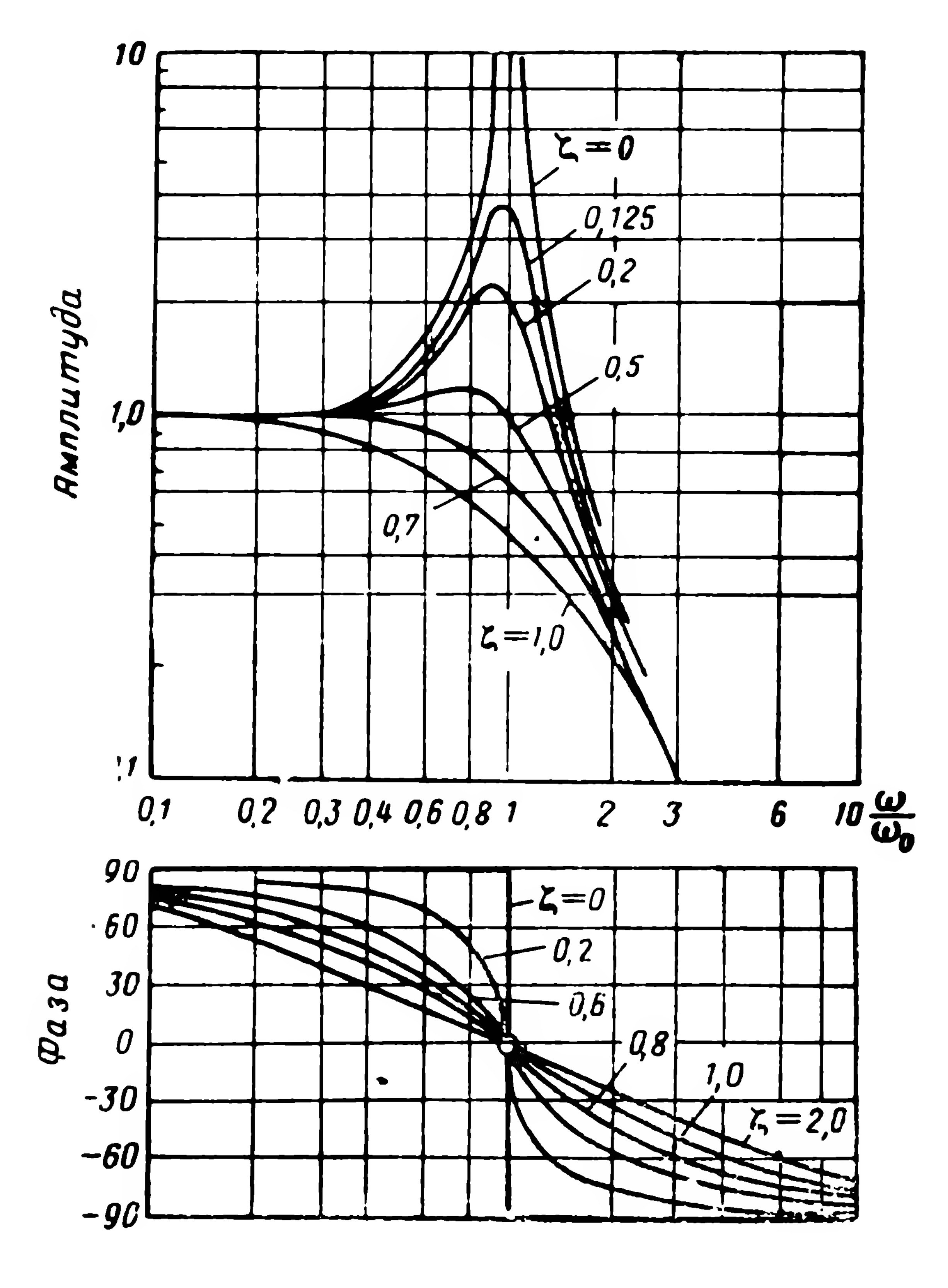
Разделив уравнение (5.6) на $K_{пр}$, получим

$$T^2 \frac{d^2\mu}{dt^2} + 2\zeta T \frac{d\mu}{dt} + \mu = \frac{H\omega_c}{K_{пр}}, \tag{5.8}$$

где $T = \sqrt{\frac{J}{K_{пр}}} = \frac{1}{\omega_0}$;

$\omega_0$ — частота собственных колебаний прибора;

$\zeta = \frac{h_д}{2\sqrt{K_{пр}J}}$ — относительный коэффициент затухания.




Фиг. 5.6. Амплитудно- и фазо-частотные характеристики колебательного звена.

Уравнение (5.8) показывает, что скоростной гироскоп является колебательным звеном. Как известно из теории автоматического регулирования, переходные функции колебательного звена пол-

ностью характеризуются величинами $\omega_0$ и $\zeta$. При малой величине $\zeta$ и при входном сигнале, изменяющемся с частотой $\omega$, близкой к $\omega_0$, возникает явление резонанса, когда амплитуда выходной величины (в данном случае угла $\mu$) оказывается очень большой. При $\zeta \geqslant 0{,}75$ явление резонанса не возникает.

На фиг. 5.6 приведены логарифмические амплитудно- и фазочастотные характеристики колебательного звена. Как видно из амплитудных характеристик, относительный коэффициент затухания должен быть в пределах $\zeta = 0{,}6$—$0{,}8$, так как при этом горизонтальный участок амплитудной характеристики наиболее велик. Из фазовых характеристик следует, что по мере увеличения частоты сигнала фазовые погрешности растут. Следовательно, собственная частота гироскопа должна быть значительно выше возможных частот входных сигналов, т. е. частот угловых колебаний снарядов. Область возможных частот входных сигналов находится в пределах 0—2,5 *гц*. Нецелесообразно слишком увеличивать частоту собственных колебаний прибора, так как она может оказаться близкой к частоте вибрации конструкции снаряда и прибор будет на них реагировать. Собственная частота гироскопов с воздушным демпфером должна быть 8—10 *гц*.

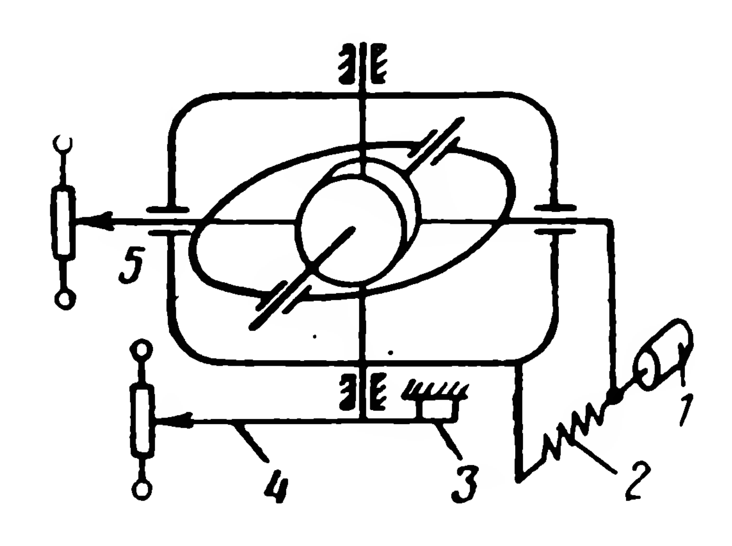
Трение в опорах гироскопических приборов порождает «шумы» в выходном сигнале (случайные уходы). С уменьшением нагрузки на шарикоподшипники уменьшается амплитуда шума и соответственно снижается его влияние на выходной сигнал. Для уменьшения нагрузки на подшипники ротор гироскопа помещают в вязкую жидкость, т. е. используют поплавковый гироскоп. Расположение гироскопа в вязкой жидкости позволяет также увеличить момент демпфирования и, следовательно, увеличить степень затухания прибора $\zeta$. Применяемое в поплавковом гироскопе регулирование температуры жидкости позволяет сохранять характеристики прибора неизменными в течение всего полета снаряда.

## § 5.4. КОМБИНИРОВАННЫЕ ГИРОСКОПИЧЕСКИЕ ДАТЧИКИ

Сигнал, пропорциональный скорости и ускорению углового движения снаряда, можно получить при помощи ускорительно-скоростного гироскопа, схема которого приведена на фиг. 5.7. Ускорительно-скоростной гироскоп представляет собой гироскоп с тремя степенями свободы, но одна степень свободы (вращение вокруг оси внешней рамки) ограничена посредством упругой связи с корпусом прибора, а другая — так же, как и в скоростном гироскопе.

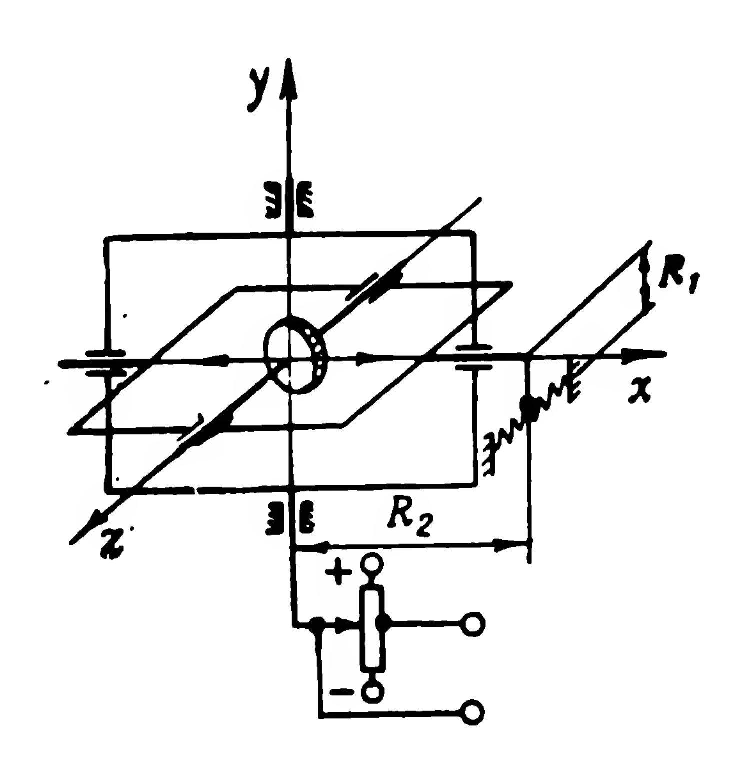
При постоянной скорости вращения снаряда $\omega_c$ вокруг оси, совпадающей с осью внешней рамки, упругая связь заставит и внешнюю рамку поворачиваться с той же угловой скоростью. Внутренняя рамка гироскопа будет реагировать на угловую скорость $\omega_c$ так же, как и у скоростного двухстепенного гироскопа,

т. е. повернется на угол, пропорциональный угловой скорости. При постоянной угловой скорости снаряда $\omega_c$ пружина внешней рамки не деформируется, а момент пружины внутренней рамки вызывает прецессию внешней рамки в направлении вращения корпуса с угловой скоростью, равной угловой скорости вращения корпуса.




Фиг. 5.7. Схема ускорительно-скоростного гироскопа.

1 — демпфер. 2 — противодействующая пружина внутренней рамки. 3 — противодействующая пружина внешней рамки. 4 — датчик углового ускорения. 5 — датчик угловой скорости.




Фиг. 5.8. Схема ускорительно-скоростного гироскопа с одной пружиной.

При изменении угловой скорости вращения $\omega_c$ угол поворота внутренней рамки изменяется, причем чем быстрее изменяется угловая скорость $\omega_c$, тем больше скорость поворота внутренней рамки. При этом повороте появляется гироскопический момент, вектор которого направлен вдоль оси внешней рамки. Модуль момента пропорционален скорости вращения внутренней рамки, т. е. угловому ускорению снаряда. Под воздействием этого гироскопического момента внешняя рамка будет поворачиваться до тех пор, пока момент не уравновесится моментом пружины внешней рамки. При этом внешняя рамка повернется на угол, пропорциональный угловому ускорению.

Сигнал, пропорциональный угловой скорости и ускорению, можно получить, применив одну пружину (фиг. 5.8), которая могла бы создавать моменты как вокруг оси внутренней рамки, так и вокруг оси внешней рамки. Пружину одним концом закрепляют к внутренней рамке, а другим — к корпусу прибора. При установившейся угловой скорости разворота внутренней рамки вокруг своей оси пружина натягивается и создается момент как относительно оси внутренней рамки, так и вокруг оси внешней рамки. Момент относительно оси внешней рамки поворачивает ее на угол, пропорциональный углу поворота внутренней рамки, т. е. пропор-

циональный угловой скорости поворота снаряда. При наличии углового ускорения снаряда появляется скорость поворота внутренней рамки, возникает гироскопический момент, вызывающий дополнительное отклонение внешней рамки относительно корпуса прибора на угол, при котором гироскопический момент будет уравновешен пружиной. Таким образом, внешняя рамка повернется на угол, пропорциональный как угловой скорости, так и угловому ускорению. Соотношения сигналов зависят от конструктивных параметров, т. е. от соотношения плеч $R_1$ и $R_2$.

Для уменьшения веса и габаритов бортовой системы управления, а также для удешевления ее часто применяется дифференцирование и интегрирование при помощи ячеек $rc$ сигналов трехстепенного или двухстепенного гироскопов. Интегрирование целесообразно применять лишь при кратковременном полете снаряда, так как при длительном времени полета снаряда в результате интегрирования сигналов, соответствующих уходу нуля прибора, появляются значительные по величине сигналы, снижающие точность управления снарядом. Более подробно применение дифференцирующих и интегрирующих ячеек рассматривается в гл. VI.

## § 5.5. ДАТЧИКИ ЛИНЕЙНЫХ УСКОРЕНИЙ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СНАРЯДА (АКСЕЛЕРОМЕТРЫ)

Линейные ускорения измеряют с помощью акселерометров, использующих инерционные свойства массы свободно подвешенного груза. На фиг. 5.9 приведена принципиальная схема акселерометра с потенциометрическим датчиком. При возникновении ускорения инерционные силы массы, преодолевая силу упругости пружин *1* и *2*, перемещают щетку по потенциометру *3*.

Уравнение движения массы как материальной точки имеет вид

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}+h\frac{dx_1}{dt}+kx_1=m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad (5.9)$$

где $x$ — линейное перемещение снаряда в месте установки прибора;
$x_1$ — перемещение массы прибора относительно снаряда;
$h\frac{dx_1}{dt}$ — сила демпфирования;
$kx_1$ — сила пружин;
$m\frac{d^2x_1}{dt^2}$ — сила инерции, действующая на массу прибора.

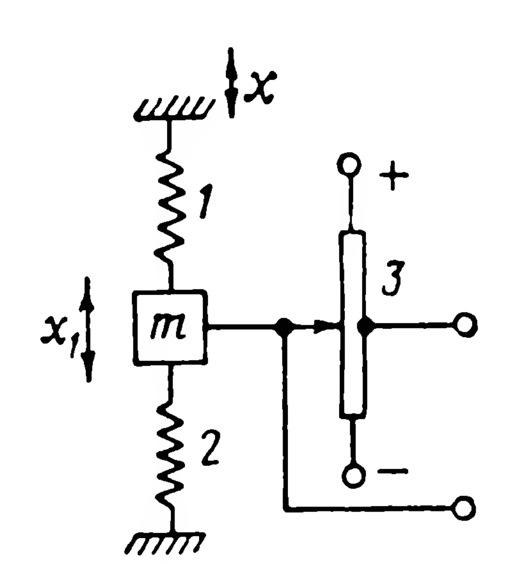
Перепишем уравнение (5.9), поделив его на коэффициент $k$:

$$T^2\frac{d^2x_1}{dt^2}+2\zeta T\frac{dx_1}{dt}+x_1=\frac{m}{k}\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad (5.10)$$

где $T=\sqrt{\frac{m}{k}}$; $\quad 2\zeta T=\frac{h}{k}$.

Уравнение (5.10) есть уравнение колебательного звена. Следовательно, акселерометр, как всякое колебательное звено, будет достаточно точно воспроизводить медленно изменяющиеся ускорения снаряда и погрешность воспроизведения будет возрастать по мере увеличения частоты этих ускорений. Учитывая это обстоятельство, собственную частоту акселерометра $\omega_0 = 1/T$ следует выбирать в 4—10 раз выше частоты изменения ускорений снаряда.

Для получения электрического сигнала, пропорционального перемещению массы акселерометра, применяются не только потенциометры, но и индукционные датчики. Преимущество этих датчиков заключается в том, что у них нет токоподводов к подвижной системе и, следовательно, дополнительной нагрузки за счет трения, что имеет место при потенциометрическом съеме сигналов.




Фиг. 5.9. Принципиальная схема акселерометра.
*1, 2* — пружины, *3* — потенциометр.

## § 5.6. ДАТЧИКИ ВОЗДУШНОЙ СКОРОСТИ ИЛИ СКОРОСТНОГО НАПОРА

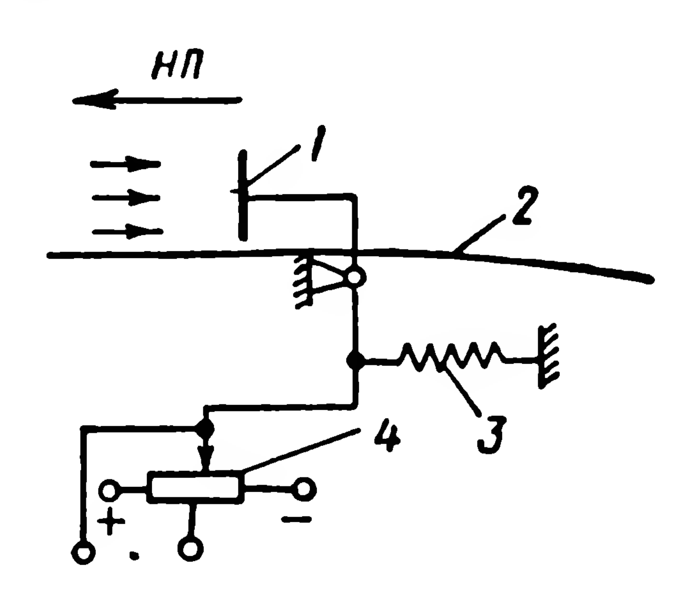
Данные о величине воздушной скорости или скоростного напора используют в системах управления самолетов-снарядов и многих других типов снарядов. Данные о воздушной скорости часто используют вместо данных о путевой скорости, получение которых, как показано ниже, сопряжено с установкой на снаряд сложной аппаратуры.

Простейший датчик скоростного напора показан на фиг. 5.10. Сила давления на находящуюся в потоке воздуха пластину *1* уравновешивается силой пружины *3*. При изменении скоростного напора (увеличении) пружина растягивается и щетка перемещается по потенциометру на расстояние, пропорциональное скоростному напору. Натяжение пружины соответствует среднему значению скоростного напора.

На некоторых снарядах для определения воздушной скорости использовали воздушный винт («ветрянка»), устанавливаемый в носовой части снаряда. Угловая скорость вращения ветрянки пропорциональна воздушной скорости, а число оборотов — пройденному пути. Главными недостатками перечисленных датчиков являются увеличение лобового сопротивления снаряда и недостаточная точность.

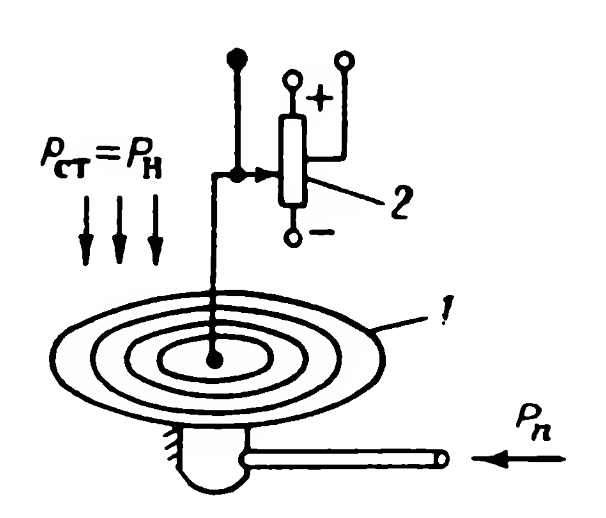
Манометрические датчики не имеют этих недостатков. На фиг. 5.11 приведена принципиальная схема такого датчика. В манометрическую коробку *1* подается полное давление, равное сум-

ме динамического и статического давления. Приемное отверстие полного давления расположено в носовой части снаряда. В корпусе снаряда имеются отверстия для приема статического давления. На коробку 1 снаружи действует статическое давление, и ход коробки пропорционален разности давлений, т. е. $(p_п - p_{ст}) = p_{дин}$ — динамическому давлению, или скоростному напору. Ход коробки передается щетке, скользящей по потенциометру. Во




Фиг. 5.10. Датчик скоростного напора.

1 — пластина, 2 — корпус снаряда, 3 — пружина, 4 — потенциометр.




Фиг. 5.11. Простейший датчик воздушной скорости.

1 — барометрическая коробка, 2 — потенциометр.

многих случаях для получения электрического сигнала, пропорционального скорости или скоростному напору, используют индукционные датчики, измеряющие перемещение подвижного центра мембранной коробки.

## § 5.7. ДАТЧИКИ ВЫСОТЫ

В качестве датчиков высоты полета снаряда применяют барометрические высотомеры и радиовысотомеры. Барометрический высотомер измеряет относительную высоту полета, т. е. высоту полета относительно места старта, а радиовысотомер — истинную высоту полета. Различие в значениях высот полета поясняется на фиг. 5.12.

Барометрический высотомер. Барометрический метод измерения высоты полета основан на использовании закона изменения давления воздуха с увеличением высоты.

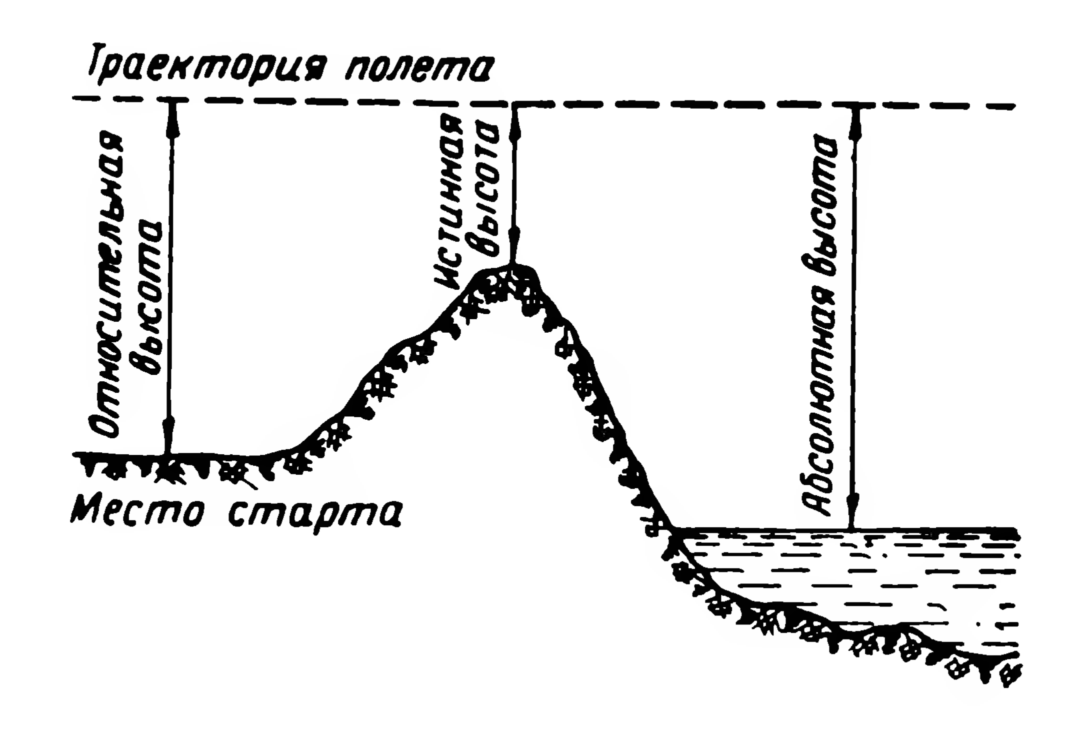
Для высот от 0 до 11 000 *м*

$$H = \left[1 - \left(\frac{p_н}{p_0}\right)^{\tau R}\right] \frac{T_0}{\tau}, \tag{5.11}$$

а для высот более 11 000 *м*

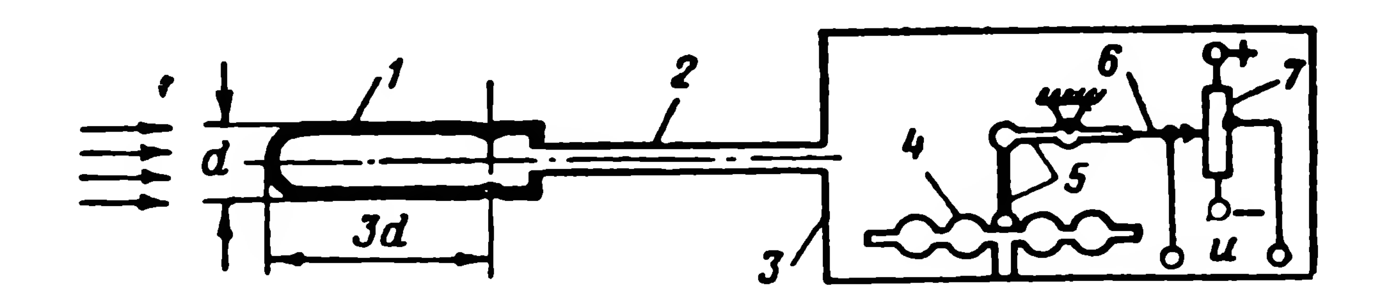
$$H = 11\,000 + RT_{11} \ln \frac{p_{11}}{p_н}, \tag{5.12}$$

где $R=29{,}27$ газовая постоянная в *м/град*;
$T_0$ — абсолютная температура у земли;
$\tau$ — температурный градиент;
$p_0$ — абсолютное давление у земли в *н/м²*;
$T_{11}$ — абсолютная температура на высоте 11 000 *м*;
$p_{11}$ — абсолютное давление на высоте 11 000 *м*.




Фиг. 5.12. К определению относительной, истинной и абсолютной высот полета.

Если считать, что параметры $p_0$, $T_0$, $\tau$ постоянны, то $H=f(p_н)$ может быть измерена измерителем давления атмосферы — барометром. Принципиальная схема барометрического высотомера приведена на фиг. 5.13. Из приемника статического давления *1*



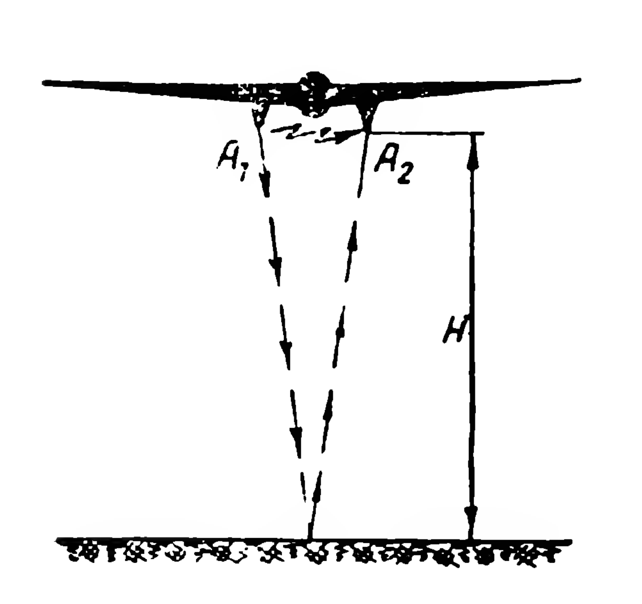

Фиг. 5.13. Принципиальная схема барометрического высотомера.

*1* — приемник статического давления, *2* — трубопровод, *3* — герметический корпус, *4* — мембранная коробка, *5* — механизм передачи, *6* — щетка, *7* — потенциометр.

воздух поступает в герметический корпус *3*, где помещается мембранная коробка *4*. При изменении давления (высоты) подвижный центр коробки перемещается и через передачу *5* передвигает щетку *6*, скользящую по потенциометру *7*. Напряжение *u* пропорционально перемещению щетки, а следовательно, и изменению высоты полета относительно высоты точки старта. В качестве приемника статического давления можно также использовать фюзе-

ляж снаряда. В этом случае на поверхности фюзеляжа можно найти точку, в которой давление равно статическому. В этой точке помещают заборный штуцер, к которому присоединяют трубопровод, ведущий к высотомеру.

Если высотомер включается в систему стабилизации высоты полета и тактическое использование снаряда требует полета его на различных высотах, в схему высотомера вводится задатчик высоты. Простейший задатчик высоты представляет собой устройство, при помощи которого можно менять жесткость мембранной коробки. Таким устройством может являться пружина, которая сжимается калибровочным винтом. Отсчет поворота винта производится по шкале, градуированной в единицах высоты.



Фиг. 5.14. Путь электромагнитных волн при применении радиовысотомера.

При полетах на большие расстояния допущение постоянства параметров $p_0$, $T_0$ и $\tau$ приводит к увеличению методической ошибки высотомера. В таких случаях целесообразнее пользоваться радиовысотомером.

Радиовысотомер. Действие радиовысотомера основано на отражении электромагнитных волн от земной поверхности. Источником электромагнитных волн является радиопередатчик высотомера, установленный на снаряде. Электромагнитные волны излучаются в пространство (главным образом вниз) антенной радиопередатчика и после отражения от земной поверхности поступают на антенну приемника высотомера (фиг. 5. 14).

Время прохождения радиоволн от снаряда до земли и обратно зависит от высоты полета

$$t = \frac{2H}{c}, \tag{5. 13}$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ — скорость распространения радиоволн, равная скорости распространения света, в *м/сек*.

Скорость распространения электромагнитных волн не соизмерима со скоростью снаряда, поэтому время прохождения волн от снаряда до земли и обратно практически не зависит от скорости его полета.

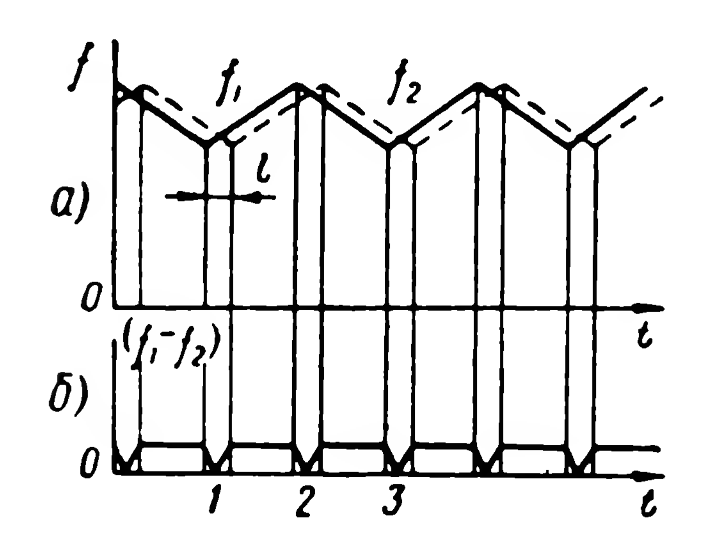
Существующие радиовысотомеры по характеру излучения радиоволн можно разделить на два типа:

радиовысотомеры непрерывного излучения;

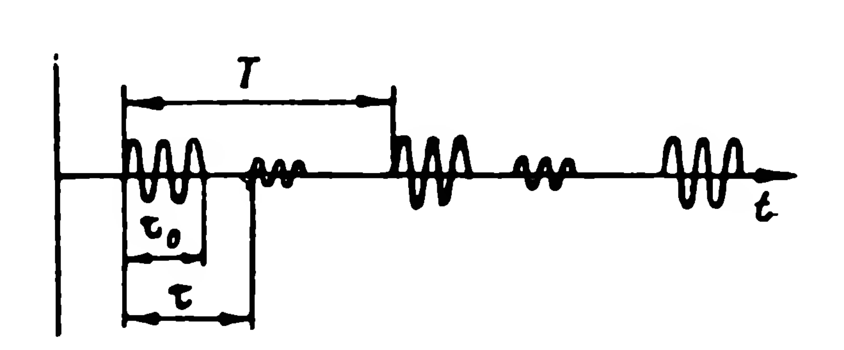
радиовысотомеры импульсного излучения.

Радиовысотомеры непрерывного излучения применяют для высот, не превосходящих 1500 *м*, так как потребная мощность передатчика растет пропорционально четвертой степени измеряемой

высоты и для измерения бо́льших высот требуется большая, практически неприемлемая мощность передатчика. Принцип работы радиовысотоме́ра непрерывного излучения заключается в следующем: антенна радиопередатчика излучает в пространство электромагнитные волны, частота которых непрерывно изменяется в некоторых пределах от среднего значения. Закон изменения частоты во времени имеет вид пилообразной кривой (фиг. 5.15). Как показано на фиг. 5.15, *а*, частота отраженных от земли радиоволн,



Фиг. 5.15. К изменению частоты сигнала радиовысотомера.



Фиг. 5.16. Кривые, характеризующие импульсы радиовысотомера.

принятых радиоприемником, изменяется по такому же закону, но со сдвигом во́ времени (пунктирная линия) на величину

$$\tau = \frac{2H}{c}. \quad (5.14)$$

В каждый момент времени частота посылаемого сигнала отличается от частоты отраженного сигнала на величину, равную изменению частоты передатчика за время прохождения радиоволн от снаряда до земли и обратно (за исключением отрезков времени *l* — точки *1*, *2*, *3* и т. д., где разность частот уменьшается до нуля). Разность частот $\nu = f_1 - f_2$ легко определить, если аналитически закон изменения частот $f_1$ и $f_2$ имеет вид

$$f_1 = f_0(1 \pm at) \quad \text{и} \quad f_2 = f_0[1 \pm a(t - \tau)].$$

Колебания высокой частоты $f_1$ и $f_2$ детектируются и в результате получается напряжение низкой частоты $\nu$ (фиг. 5.15, *б*):

$$\nu = f_1 - f_2 = f_0 a\tau = f_0 a \frac{2H}{c}.$$

Частоту измеряют частотомером, и сигнал, пропорциональный измеренной частоте, будет пропорционален высоте полета $H$. Такого типа радиовысотомеры позволяют измерять истинную высоту полета с точностью до 5%.

Для больших высот полета (боле́е 1500 *м*) применяют радиовысотомеры импульсного излучения (фиг. 5.16), посылающие

периодические кратковременные импульсы высокой мощности при сравнительно небольшой средней мощности передатчика. Соотношение между мгновенной мощностью, излучаемой в пространство в импульсе, и средней мощностью передатчика равно

$$\frac{P_{\text{имп}}}{P_{\text{ср}}} = \frac{T}{\tau_0}, \tag{5.15}$$

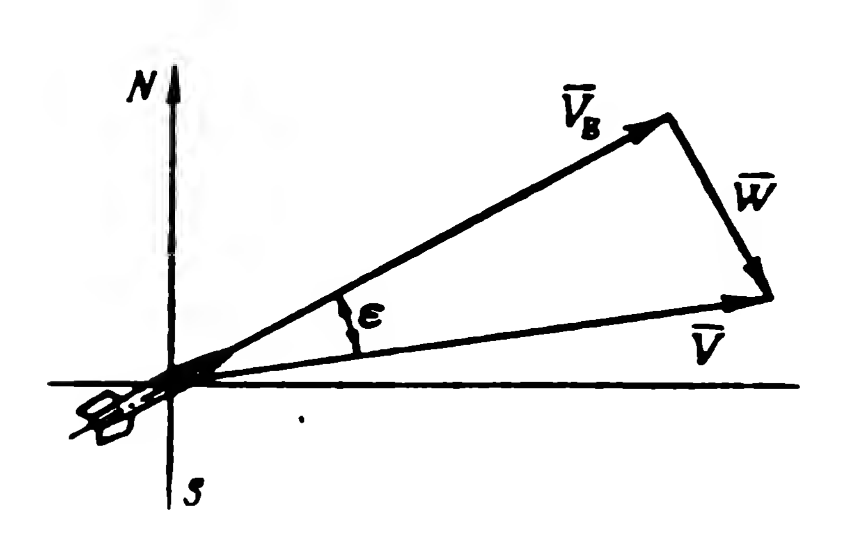
где $T$ — период между импульсами;

$\tau_0$ — длительность импульса.

За время между посылаемыми импульсами антенна принимает отраженный импульс. Интервал времени между посланным и отраженным импульсами $\tau = 2H/c$ соответствует высоте полета.

## § 5.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПУТЕВОЙ СКОРОСТИ

Определять путевую скорость, а по ней и пройденный путь необходимо на самолетах-снарядах, снабженных автономной системой управления. Из навигационного треугольника скоростей (фиг. 5.17) видно, что вектор путевой скорости $\bar{V}$ равен геометрической сумме двух векторов — истинной воздушной скорости $V_{\text{в}}$ (скорости снаряда относительно воздуха) и скорости ветра $\bar{W}$ (скорости воздуха относительно земли). Для задач навигации снаряда необходимо знать составляющие путевой скорости по двум взаимно перпендикулярным направлениям, например, север — юг и восток — запад (см. фиг. 5.17).




Фиг. 5.17. Навигационный треугольник скоростей.

Для определения путевой скорости можно использовать инерциальную систему навигации, подробное описание работы которой приведено в § 5.9. Но в некоторых случаях необходимо найти лишь одну из составляющих путевой скорости, например, если работа двигателя ракеты дальнего действия должна быть прекращена при достижении ракетой расчетной величины скорости полета в плоскости стрельбы.

Для этого наиболее часто используют гироскопический интегратор ускорения (фиг. 5.18). Он представляет собой трехстепенный гироскоп, ось подвески внутренней рамки которого не проходит через центр тяжести гироскопа. Ось внешней рамки направлена по продольной оси ракеты в том случае, когда необходимо определить скорость в плоскости стрельбы. При возникновении ускорения появляется момент относительно оси внутренней рамки,

и в результате возникает прецессия внешней рамки гироскопа. Угловая скорость прецессии пропорциональна моменту, приложенному к оси рамки:

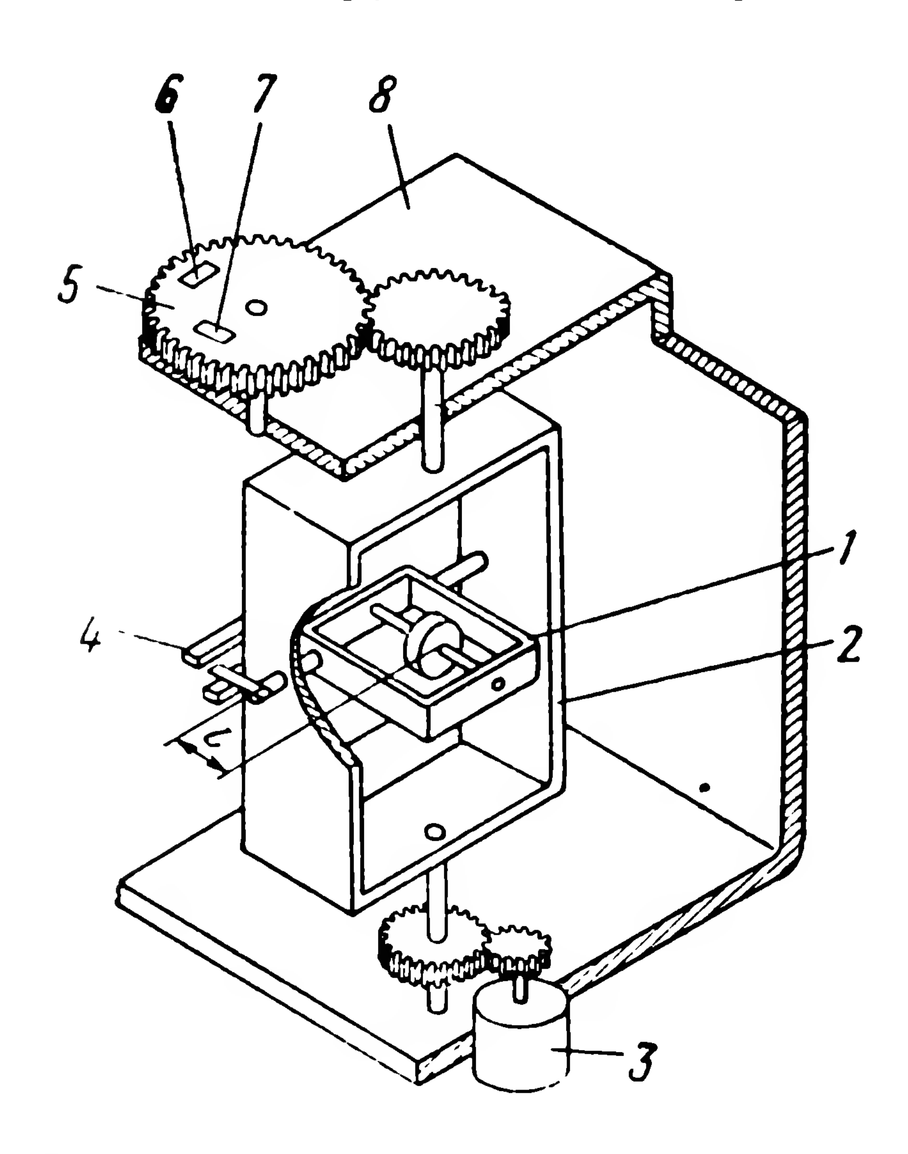
$$\omega_{пр} = \frac{Fl}{J\Omega}, \qquad (5.16)$$

где $F$ — сила, приложенная к центру тяжести гироскопа;

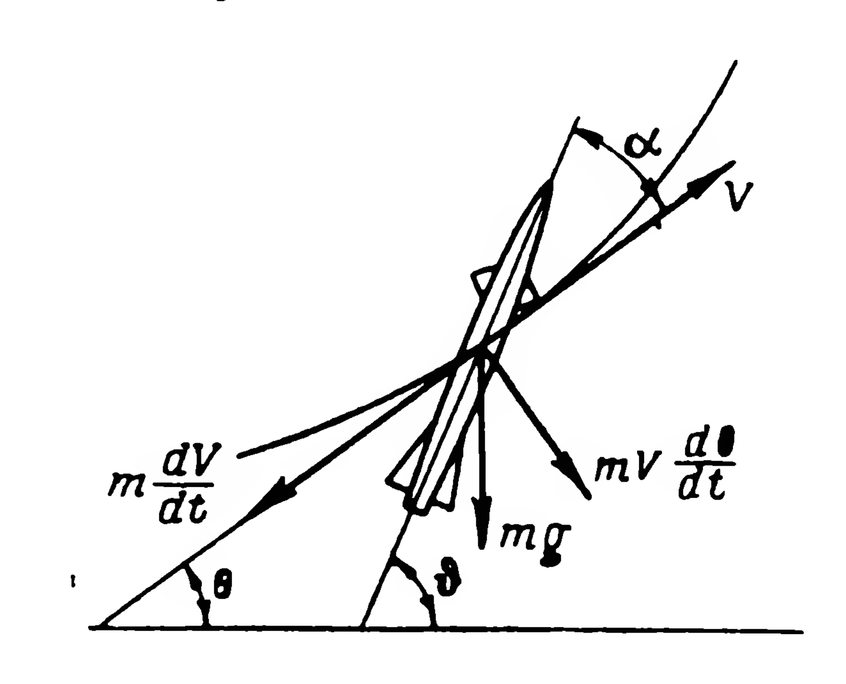
$l$ — плечо силы;

$J\Omega$ — кинетический момент гироскопа.

Момент можно вычислить как произведение силы, приложенной к центру тяжести гироскопа, на плечо, равное расстоянию между осью подвески внутренней рамки гироскопа и центром тяжести его. Сила, приложенная к центру тяжести, будет складываться из проекции силы веса и сил инерции на направление, перпендикулярное оси внутренней рамки гироскопа.




Фиг. 5.18. Интегрирующий гироскоп.
1 — внутренняя рамка. 2 — внешняя рамка, 3 — мотор коррекции. 4 — контакты коррекции. 5 — контактный диск. 6 — кулачок предварительного выключения двигателя. 7 — кулачок полного выключения двигателя. 8 — корпус прибора.




Фиг. 5.19. Схема сил, действующих на снаряд.

На фиг. 5.19 показаны ускорения, действующие на снаряд. Как следует из фиг. 5.19, кажущаяся сила веса, приложенная к центру тяжести гироскопа, будет

$$F = m\left[\frac{dV}{dt}\cos\alpha + V\frac{d\theta}{dt}\sin\alpha + g\sin(\theta+\alpha)\right], \qquad (5.17)$$

где $m$ — масса ротора гироскопа с кожухом;

$\alpha$ — угол атаки;

$\theta$ — угол наклона вектора скорости;

$g$ — ускорение силы тяжести;
$V$ — скорость снаряда.

Угол поворота внешней рамки гироскопа относительно оси $x$ может быть вычислен по формуле

$$\mu = \int_0^t \omega_{\text{пр}}\, dt = \int_0^t \frac{ml}{J\Omega}\left[\frac{dV}{dt}\cos\alpha + V\frac{d\theta}{dt}\sin\alpha + g\sin(\theta+\alpha)\right]dt. \quad (5.18)$$

При постоянных кинетическом моменте гироскопа, плече $l$, массе $m$ и малом угле атаки $\alpha$ угол поворота рамки складывается из двух составляющих:

$\mu_1 = \frac{ml}{J\Omega} V$ — угол, пропорциональный величине скорости полета в данный момент времени;

$\mu_2 = \frac{ml}{J\Omega} g \int_0^t \sin\theta\, dt$ — угол поворота рамки за счет действия ускорения силы тяжести;

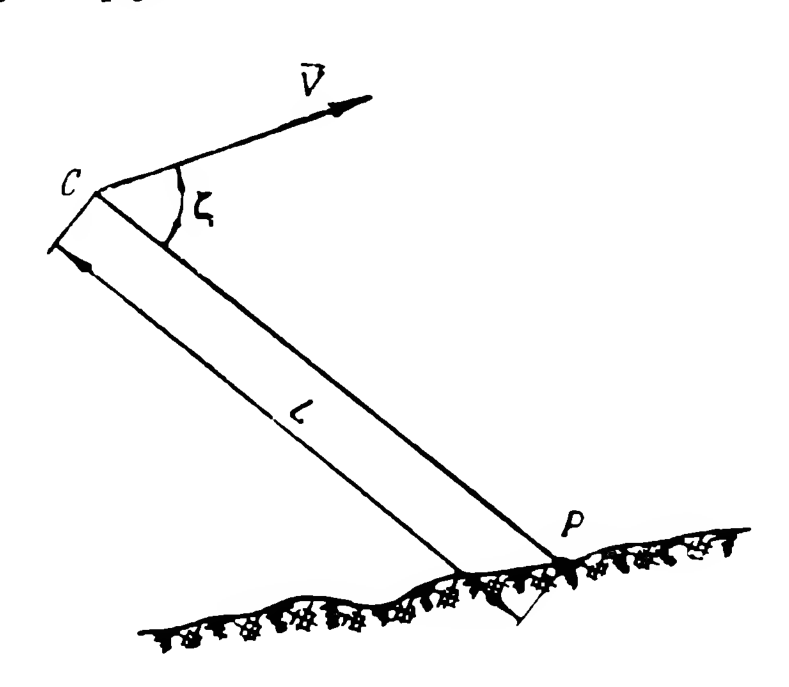
$\mu_3 = \frac{ml}{J\Omega} \int_0^t V \frac{d\theta}{dt} \alpha\, dt$ — угол поворота рамки за счет действия ускорения, направленного перпендикулярно к вектору скорости.

Угол $\theta$ изменяется согласно программе полета, а поэтому показания гироскопического интегратора должны быть исправлены на основании заданной программы $\theta$, а также вычисленного закона изменения угла атаки $\alpha$ на траектории. Необходимость учитывать программу полета приводит к методической ошибке интегратора. Так как программа выполняется с погрешностями, то эти погрешности сказываются и на определении интегратором скорости ракеты $V$.

Для повышения точности работы интегратора необходимо, чтобы плечо $l$ не изменялось в полете, а для этого не должна нарушаться перпендикулярность рамок. Для выполнения данного условия в интеграторе предусмотрено корректирующее устройство. Если ось гироскопа отклонится вверх или вниз, замкнется нижний или верхний контакт и на моментный мотор поступает сигнал соответствующего знака. При этом к оси внешней рамки гироскопа через зубчатую передачу будет передан момент, который вызовет прецессию внутренней рамки и в результате перпендикулярность рамок восстановится. Установка скорости полета, при которой выключается двигатель, производится поворотом диска, несущего контактное устройство. На шестерне, связанной через передачу с осью внешней рамки, расположены кулачки. Один из кулачков замкнет контакт на частичное выключение двигателя, а второй — на полное выключение.

Для определения путевой скорости применяют радиолокационные системы, основанные на использовании эффекта Допплера. Как известно, эффект Допплера наблюдается при перемещении источника и приемника энергии (звуковой, световой и электромагнитной) относительно друг друга. Эффект Допплера заключается в изменении («сдвиге») частоты принимаемых сигналов по сравнению с частотой передаваемых сигналов при относительном перемещении передатчика и приемника. Если приемник и передатчик неподвижны относительно друг друга, то эти частоты, естественно, одинаковы. Величина изменения частоты называется частотой Допплера.

В системах, определяющих путевую скорость снаряда, источник колебаний сверхвысокой частоты расположен на борту снаряда, движущегося со скоростью $V$ относительно земли (фиг. 5.20). Электромагнитные волны распространяются по направлению к земле в точку $P$ и часть из них отражается обратно к приемнику, расположенному в точке $C$. Для получения количественных соотношений представим процесс передача — отражение — прием как единый.



Фиг. 5.20. К определению скорости при использовании эффекта Допплера.

Сигнал передатчика определяется выражением

$$E_{пер} = A \sin 2\pi f t, \qquad (5.19)$$

а принимаемый сигнал

$$E_{пр} = B \sin (2\pi f t - \varphi), \qquad (5.20)$$

где $A$ и $B$ — постоянные, характеризующие амплитуду сигнала;
$f$ — частота передатчика;
$\varphi$ — отставание по фазе принимаемого сигнала от сигнала передатчика за счет времени распространения.

Отставание по фазе

$$\varphi = 2\pi \frac{2L}{\lambda}, \qquad (5.22)$$

где $L$ — расстояние от приемо-передатчика до точки $P$;
$\lambda = \frac{c}{f}$ — длина волны электромагнитной энергии;
$c$ — скорость света.

Так как время между передачей и приемом отраженного сигнала очень мало, то расстояние $L$ может быть вычислено по приближенной формуле

$$L(t) = L_0 - Vt \cdot \cos\zeta, \tag{5.23}$$

где $L_0$ — расстояние при $t=0$;

$\zeta$ — угол между вектором скорости $\overline{V}$ и направлением распространения электромагнитных волн.

С учетом соотношений (5.22) и (5.23) уравнение (5.20) запишется в виде

$$E_{\text{пр}} = B\sin\left[2\pi ft - \frac{4\pi}{c} f(D_0 - Vt\cos\zeta)\right] = $$
$$= B\sin\left[\left(2\pi f + \frac{4\pi}{c} V\cos\zeta f\right)t - \varphi_0\right], \tag{5.24}$$

где $\varphi_0 = \frac{4\pi D_0}{c} f$ — постоянная запаздывающая фаза.

Из соотношения (5.24) определим частоту принимаемого сигнала

$$f_{\text{пр}} = f + \frac{2V\cos\zeta}{c} f = f\left(1 + \frac{2V\cos\zeta}{c}\right). \tag{5.25}$$

Следовательно, частота Допплера определится выражением

$$\nu = f_{\text{пр}} - f = \frac{2V\cos\zeta}{c} f. \tag{5.26}$$

Величина $V\cos\zeta$ представляет собой составляющую путевой скорости снаряда в направлении распространения. Для определения полного значения вектора $V$ необходимо воспользоваться по крайней мере тремя некомпланарными лучами. Определенная с помощью многолучевой системы скорость снаряда представляет собой путевую скорость в системе координат, связанной со снарядом.

Рассмотрим случай, когда антенное устройство стабилизировано в горизонтальной плоскости. При помощи следящих систем антенны вращаются в горизонтальной плоскости так, чтобы горизонтальная проекция вектора путевой скорости была бы направлена по биссектрисе угла между лучами $K$ и $L$ (фиг. 5.21). Если четыре луча $K$, $L$, $M$, $N$ направлены симметрично относительно осей $x$ и $z$, получим

$$\begin{aligned} k_x &= l_x = -m_x = -n_x = \cos\gamma, \\ k_y &= l_y = m_y = n_y = -\cos\mu, \\ k_z &= -l_z = -m_z = n_z = \cos\sigma, \end{aligned} \tag{5.27}$$

где $k$, $l$, $m$, $n$ — единичные векторы направлений четырех лучей;

$k_x$, $k_y$ и $k_z$ и т. д. — составляющие вектора $k$ и т. д. вдоль осей ортогональной системы координат $x$, $y$, $z$.

Если выполняется условие симметрии, то имеем

$$V_{\text{гор}} = V_x = V\cos\theta,$$
$$V_y = V\sin\theta, \quad (5.28)$$
$$V_z = 0,$$

где $\theta$ — угол наклона траектории.

Из уравнений (5. 26), (5. 27) и (5. 28) следует, что

$$\left.\begin{aligned} \nu_k = \nu_l &= \frac{2}{\lambda} V(\cos\gamma\cos\theta - \cos\mu\sin\theta), \\ \nu_m = \nu_n &= \frac{2}{\lambda} V(-\cos\gamma\cos\theta - \cos\mu\sin\theta). \end{aligned}\right\} \quad (5.29)$$

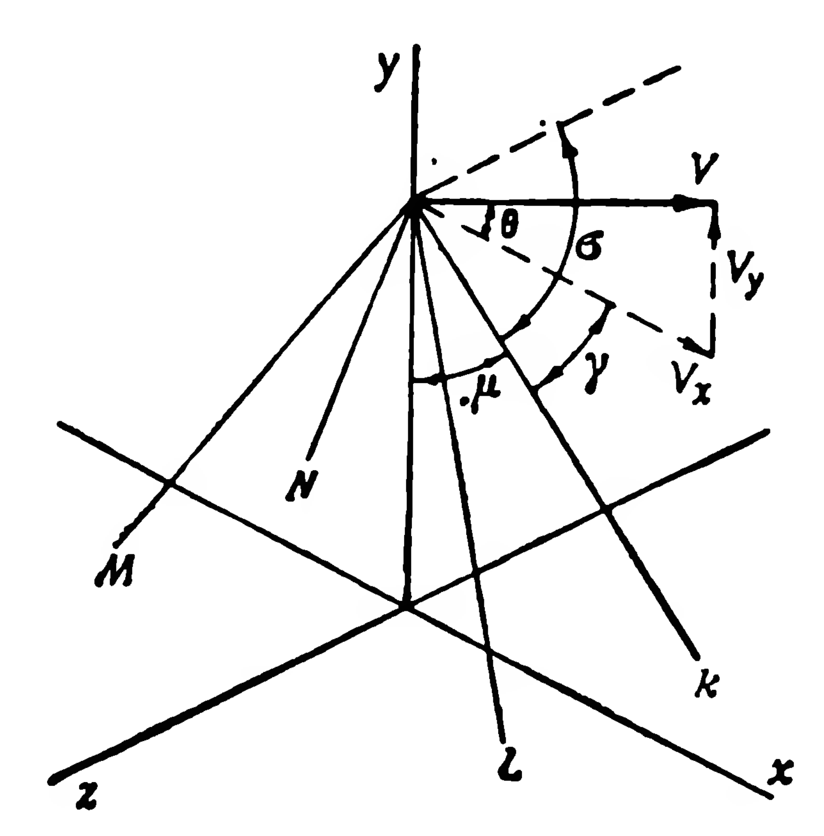
В результате получим

$$(\nu_k - \nu_m) = (\nu_l - \nu_n) = \frac{4}{\lambda} V\cos\gamma\cos\theta = \frac{4}{\lambda}\cos\gamma V_{\text{гор}}. \quad (5.30)$$

Выражение (5.30) показывает, что разность частот Допплера для лучей, направленных в сторону носа и хвоста снаряда, пропорциональна горизонтальной составляющей вектора путевой скорости. Однократное интегрирование сигнала, пропорционального горизонтальной составляющей путевой скорости, дает возможность определить путь снаряда по поверхности земли.

Если разность частот $\nu_k - \nu_l$ или $\nu_m - \nu_n$ не равна нулю, то, следовательно, угол между лучом $K$ и горизонтальной проекцией вектора путевой скорости и угол между лучом $L$ и той же проекцией не равны между собой. Покажем, что разность частот Допплера $\nu_k - \nu_l$ пропорциональна углу между горизонтальной проекцией вектора скорости и осью $x$ (см. фиг. 5.21). Из геометрических соотношений имеем

$$\left.\begin{aligned} V_x &= V\cos\theta\cos\beta, \\ V_y &= V\sin\theta, \\ V_z &= -V\cos\theta\sin\beta, \end{aligned}\right\} \quad (5.31)$$




Фиг. 5.21. К определению горизонтальной составляющей путевой скорости.

где $\beta$ — угол между горизонтальной проекцией вектора скорости и осью $x$.

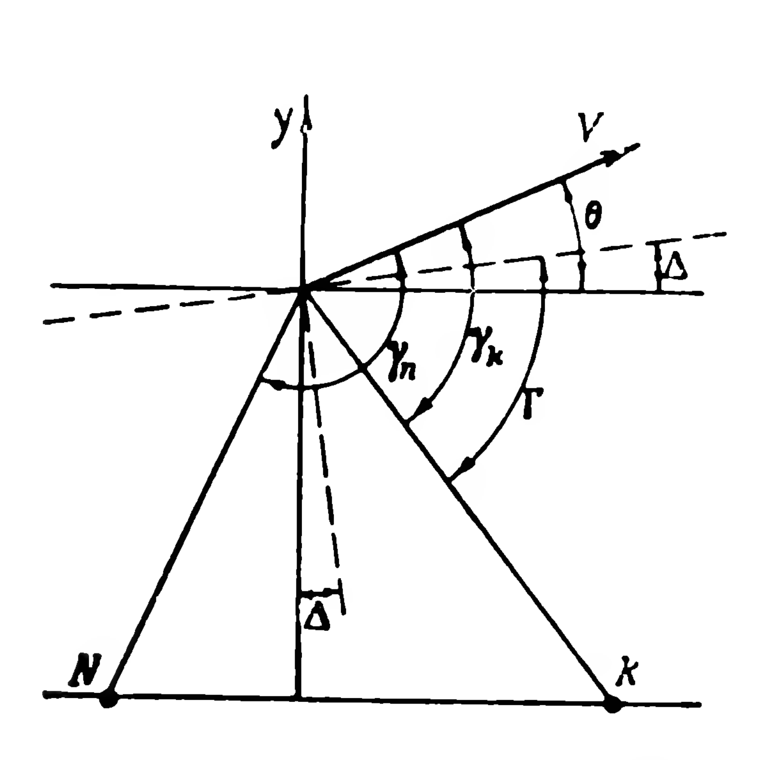
Используя уравнения (5. 23), (5. 24) и (5. 25), получим

$$\left.\begin{aligned} \nu_k &= \frac{2}{\lambda} V[\cos\theta\cos\beta\cos\gamma - \sin\theta\cos\mu - \cos\theta\sin\beta\cos\sigma], \\ \nu_l &= \frac{2}{\lambda} V[\cos\theta\cos\beta\cos\gamma - \sin\theta\cos\mu + \cos\theta\sin\beta\cos\sigma]. \end{aligned}\right\} \quad (5.32)$$

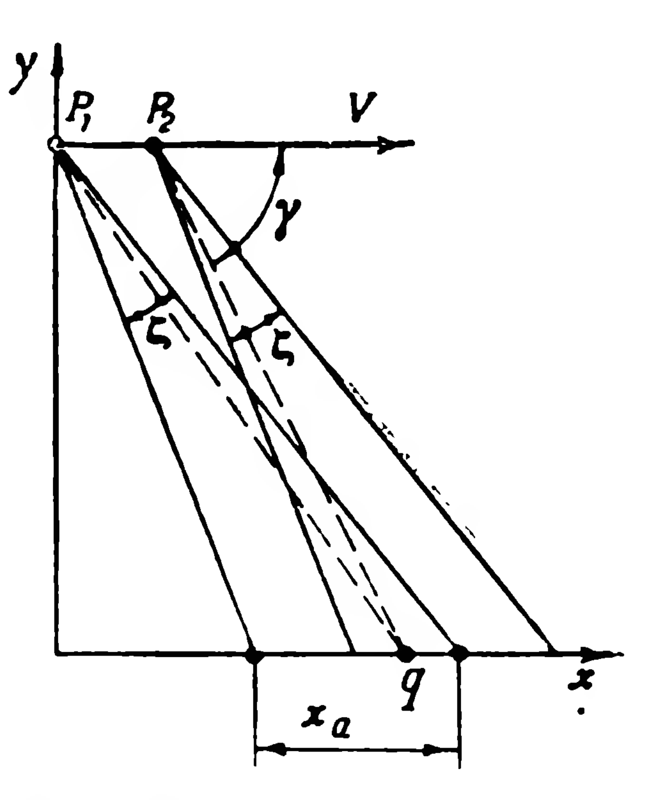
Разность $\nu_k - \nu_l$ равна

$$\nu_k - \nu_l = -\frac{4}{\lambda} V \cos\theta \sin\beta \cos\sigma = -\frac{4}{\lambda} \cos\sigma \sin\beta V_{\text{гор}}. \quad (5.33)$$

При малом угле $\beta$ можно $\sin\beta$ заменить углом $\beta$. Тогда разность частот Допплера для лучей, направленных в сторону носа или хвоста снаряда, пропорциональна углу между осью симметрии лучей и горизонтальной проекцией вектора путевой скорости. Очевидно, что $\cos\sigma$ и $V$ не могут быть равны нулю, а разность $\nu_k - \nu_l = 0$ лишь при $\beta = 0$. На основании этого сигнал, пропорциональный $\nu_k - \nu_l$, используется следящей системой для поворота антенн относительно вертикальной оси.




Фиг. 5.22. К определению ошибок по скорости.




Фиг. 5.23. Определение сигнала от отдельного элемента поверхности.

Для определения составляющих путевой скорости снаряда можно использовать антенны, фиксированные относительно снаряда, и счетно-решающие устройства для учета действительного положения снаряда и, следовательно, антенного устройства относительно земной поверхности. Точность поддержания антенного устройства системы Допплера для измерения путевой скорости в горизонтальной плоскости или точность учета положения антенного устройства относительно земной поверхности в значительной степени влияют на погрешность этой системы.

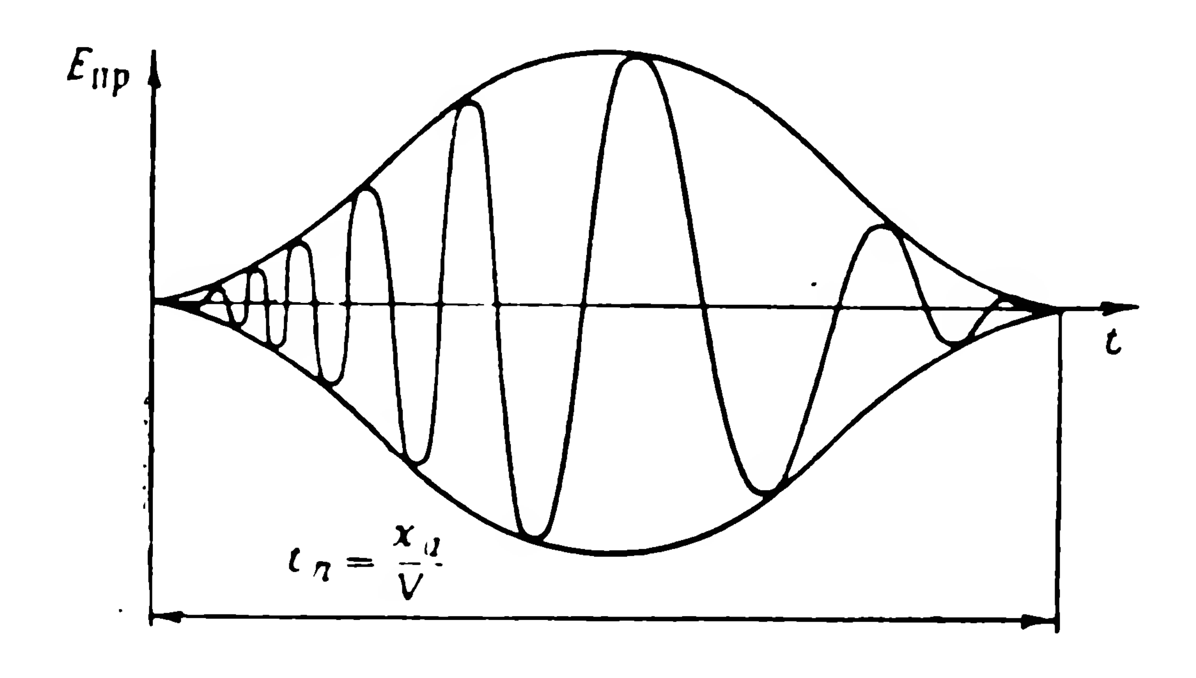
Оценим погрешность, вызываемую отклонением антенны от горизонтальной плоскости. Для сокращения выкладок рассмотрим плоскую задачу. Пусть вертикальная плоскость проходит через вектор путевой скорости (фиг. 5.22). Угол $\Delta$ характеризует ошибку стабилизации антенн по вертикали. Если ошибка $\Delta$ не равна нулю, то соответственно

$$\nu = \nu_k - \nu_n = \frac{2V}{\lambda}(\cos\gamma_k - \cos\gamma_n) = \frac{2V}{\lambda}[\cos(\Gamma + \theta - \Delta) +$$

$$+ \cos(\Gamma - \theta + \Delta)] = \frac{4V}{\lambda}\cos\Gamma\cos(\theta - \Delta). \quad (5.34)$$

При $\theta = 0$ ошибка в определении скорости при $\Delta = 1°$ примерно равна 0,015%. При $\theta = 15°$ и при $\Delta = 1°$ $\Delta V = 0{,}0196\%$.

Все приведенные выше соотношения были сделаны для случая бесконечно узкого радиолуча. Реально электромагнитная энергия излучается антенной узкой, но не бесконечно узкой диаграммой направленности. Диаграмма направленности определяет уровень мощности излучения в данном направлении. Максимум энергии облучения направлен по биссектрисе угла $\zeta$ (фиг. 5.23). При перемещении снаряда из точки $P_1$ в точку $P_2$ элемент поверхности $q$ облучается с различной мощностью. Одновременно изменяется во времени и угол $\gamma$, что приводит к изменению частоты Допплера. На фиг. 5.24 показана форма




Фиг. 5.24. Форма сигнала, отраженного от отдельного элемента поверхности.

сигнала, отраженного от отдельного элемента поверхности. Среднее значение частоты Допплера соответствует направлению максимума луча на отражающий элемент $q$. Суммарный отраженный сигнал от элемента $q$ представляет собой сумму множества сигналов, подобных изображенному на фиг. 5.24. Так как антенна в каждый момент времени облучает бесконечное множество элементов поверхности, то и отраженный сигнал будет состоять из бесконечно большого количества сигналов, причем амплитуды и фазы отраженных сигналов от каждого элемента различны. Свойства такого сигнала подчиняются статистическим закономерностям. Установлено, что спектр отраженного сигнала непрерывен и середина его соответствует частоте Допплера $\nu = \frac{2V}{\lambda} \cos \gamma_0$ ($\gamma_0$ — угол между направлением максимума диаграммы направленности и вектором скорости).

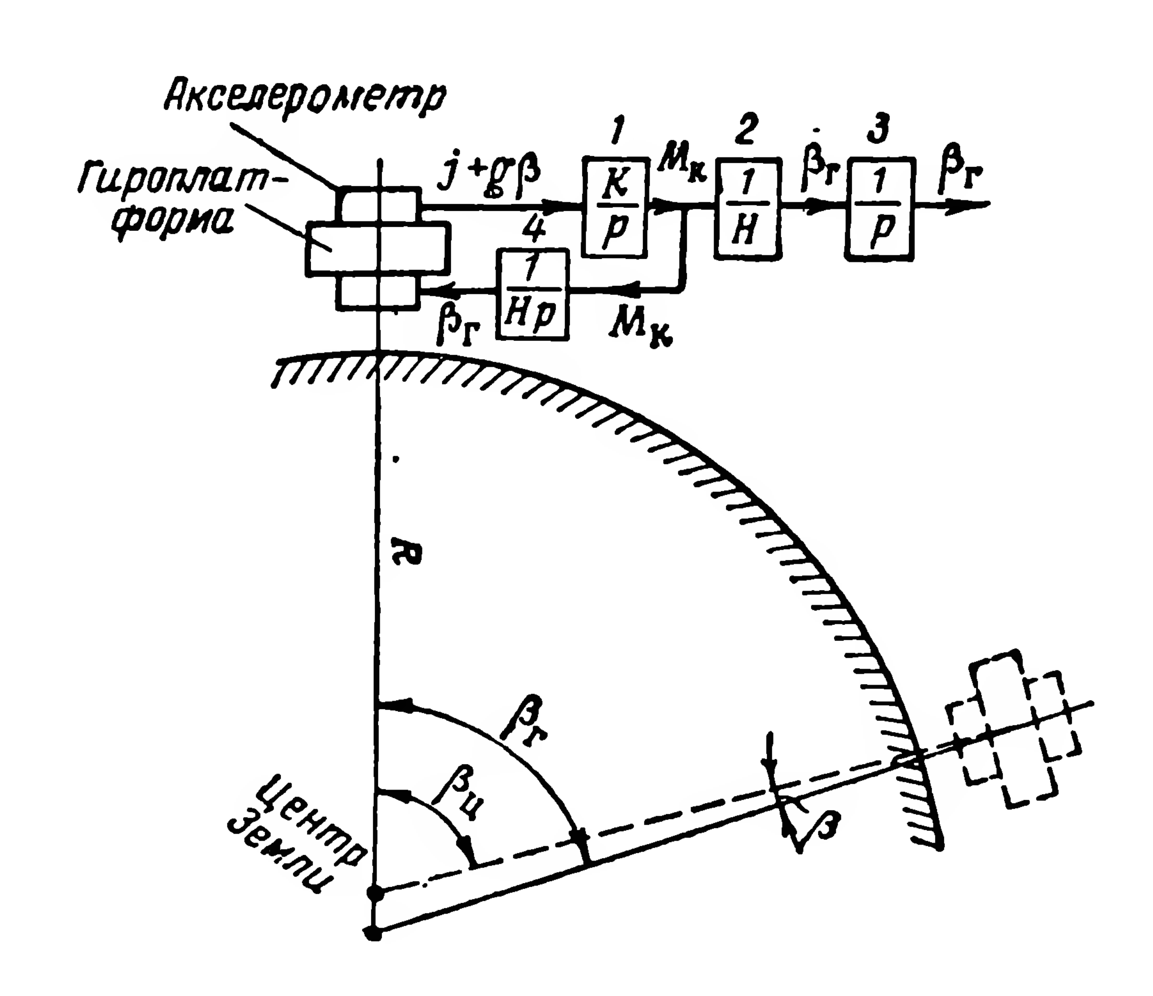
## § 5.9. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ НАВИГАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ

Инерциальной навигацией называется определение местоположения объекта у поверхности земли на основе бортовых измерений ускорения летательного аппарата и последующего двойного интегрирования полученных сигналов. Чувствительные элементы или датчики инерциальных систем навигации бывают двух видов. Датчик первого вида представляет собой три акселерометра, ориентированные вдоль известной системы координат; для ориентации акселерометров необходима гироплатформа того или иного исполнения. В датчике второго вида шесть акселерометров жестко

связаны с корпусом снаряда. Датчики первого вида широко распространены, тогда как датчики второго вида известны мало. В дальнейшем речь будет идти об инерциальных системах с датчиками первого вида. Эти инерциальные системы в свою очередь распадаются на несколько типов в зависимости от системы координат, в которой ориентированы акселерометры, и конструктивной связи акселерометров с гироплатформой. Рассмотрим два основных типа таких инерциальных систем. В системах первого типа два акселерометра ориентированы в двух взаимно перпендикулярных направлениях в плоскости горизонта, а ось третьего акселерометра совпадает с вектором земного ускорения. В системах второго типа декартова система координат, в которой ориентированы акселерометры, неподвижна в мировом пространстве.

## 1. Инерциальные системы первого типа

Инерциальные системы этого типа являются моделью Шулера. Так называется маятник с длиной подвеса, равной радиусу Земли и имеющий период колебаний $T=2\pi\sqrt{R/g}=84{,}5$ *мин.*




Фиг. 5.25. Положение гиростабилизированной платформы первого типа при движении снаряда.

Пусть летательный аппарат, несущий платформу с акселерометрами, движется около поверхности земли (фиг. 5.25) с ускорением $j=\frac{dV}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$ в направлении оси одного из акселеромет-

ров. Если платформа отклонена на малый угол $\beta$ от горизонта (местного), то сигнал акселерометра будет

$$j + g\beta.$$

Для поворота платформы вслед за поворотом плоскости горизонта образуем сигнал коррекции гироплатформы, пропорциональный интегралу от сигнала акселерометра:

$$M_к = k \int_0^t (j + g\beta)\,dt.$$

Скорость поворота платформы $\beta_г$ получим, разделив момент коррекции на кинетический момент $H$:

$$\dot{\beta}_г = \frac{k}{H} \int_0^t (j + g\beta)\,dt, \qquad (5.35)$$

где $\beta_г$ — центральный угол поворота гироплатформы.

Путь $x$, пройденный снарядом, можно представить в виде центрального угла $\beta_ц = x/R$, где $R$ — радиус Земли. Если в любой момент времени углы $\beta_г$ и $\beta_ц$ совпадают, то это означает, что гироплатформа совпадает с линией местного горизонта и угол $\beta = 0$. Следовательно, всегда

$$\beta = \beta_ц - \beta_г. \qquad (5.36)$$

Угол

$$\beta_ц = \frac{1}{R} \int_0^t \int_0^t j\,dt\,dt \qquad (5.37)$$

определяется характером полета снаряда и, следовательно, является некоторой функцией времени.

Перепишем уравнения (5.35)—(5.37) в операторной форме:

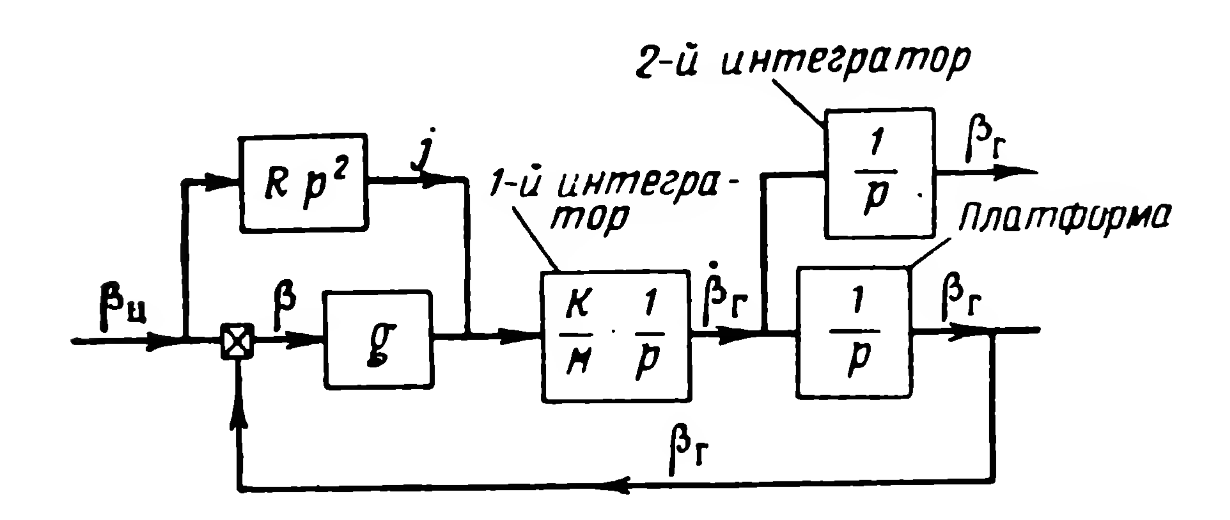
$$\left.\begin{aligned} \beta_г &= \frac{k}{H} \frac{1}{p^2} (j + g\beta), \\ \beta &= \beta_ц - \beta_г, \\ \beta_ц &= \frac{1}{R} \frac{1}{p^2} j. \end{aligned}\right\} \qquad (5.38)$$

Системе уравнений (5.38) соответствует структурная схема на фиг. 5.26. Эта структурная схема представляет собой комбинированную следящую систему с дополнительным воздействием по второй производной от входной величины $\beta_ц$.

Передаточные функции для выходной величины $\beta_г$ и ошибки $\beta$ имеют следующий вид:

$$\Phi(p) = \frac{(Rp^2 + g)\frac{k}{H}}{p^2 + \frac{k}{H}g}, \tag{5.39}$$

$$S(p) = \frac{\left(\frac{1}{R} - \frac{k}{H}\right)Rp^2}{p^2 + \frac{k}{H}g}. \tag{5.40}$$




Фиг. 5.26. Структурная схема системы стабилизации платформы с акселерометрами.

Из передаточных функций (5.39) и (5.40) или из системы (5.38) получим уравнения замкнутой системы

$$\ddot{\beta}_г + \frac{k}{H}g\beta_г = \frac{k}{H}R\ddot{\beta}_ц + \frac{k}{H}g\beta_ц; \tag{5.41}$$

$$\ddot{\beta} + \frac{k}{H}g\beta = \left(\frac{1}{R} - \frac{k}{H}\right)j. \tag{5.42}$$

Если выбрать

$$\frac{k}{H} = \frac{1}{R}, \tag{5.43}$$

то передаточная функция (5.39) обратится в единицу, а передаточная функция (5.40) — в нуль. Этот результат указывает на идеальное слежение платформы за поворотом плоскости горизонта. Поскольку угол $\beta$ оказывается равным нулю, то нормаль к платформе всегда будет совпадать с вектором земного ускорения. Благодаря указанной настройке на снаряде образовалась невозмущаемая вертикаль.

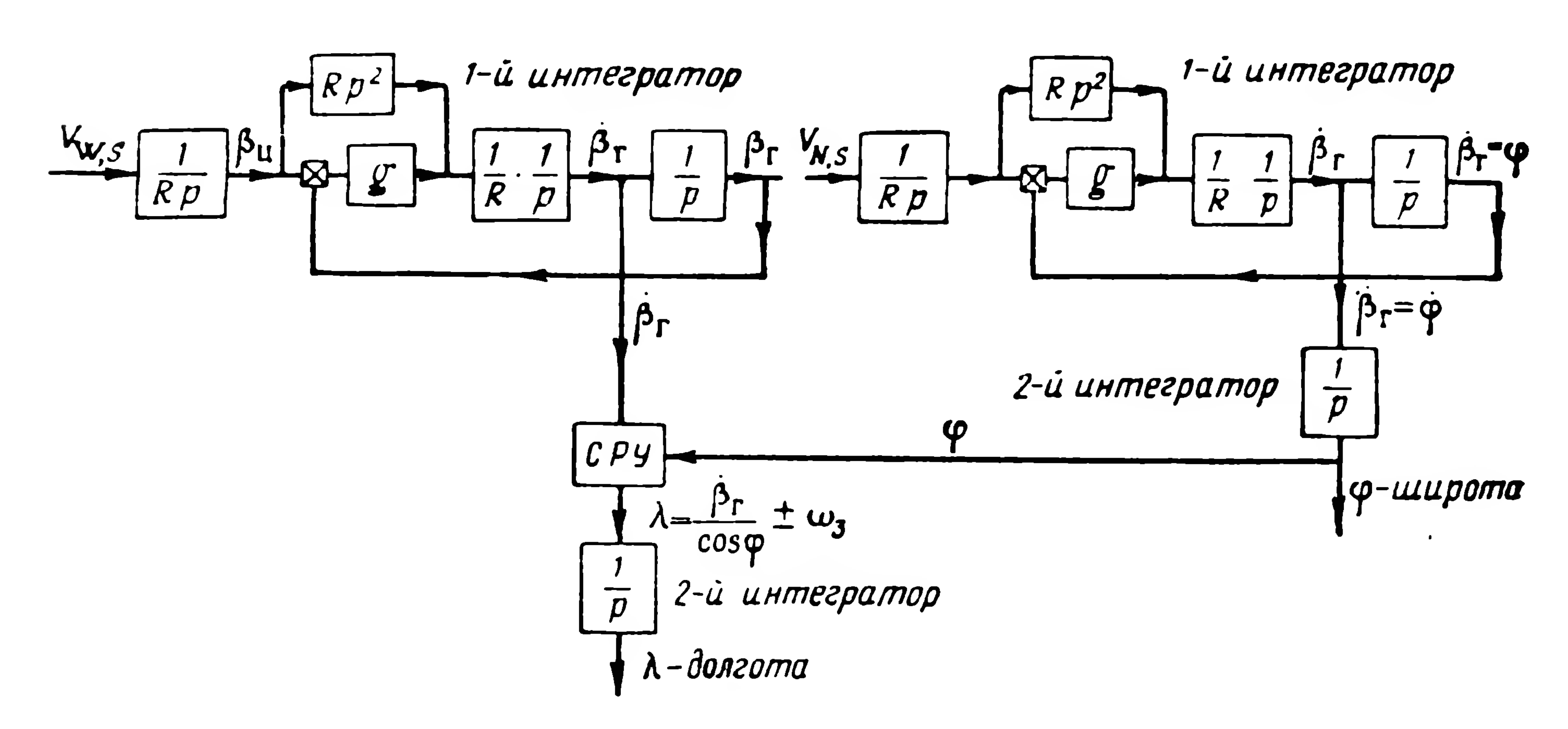
При $\frac{k}{H}=\frac{1}{R}$ уравнение (5.42) примет вид

$$\ddot{\beta}+\frac{g}{R}\beta=0. \qquad (5.44)$$

Как вытекает из уравнения (5.44), при начальной ошибке в местной вертикали $\beta_0$ и $\dot{\beta}_0=0$ платформа будет совершать незатухающие колебания:

$$\beta=\beta_0\cos\omega_0 t, \qquad (5.45)$$

где $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{R}}$ — круговая частота колебаний маятника Шулера.




Фиг. 5.27. Структурная схема гироориентатора, указывающего местоположение снаряда в географической системе координат.

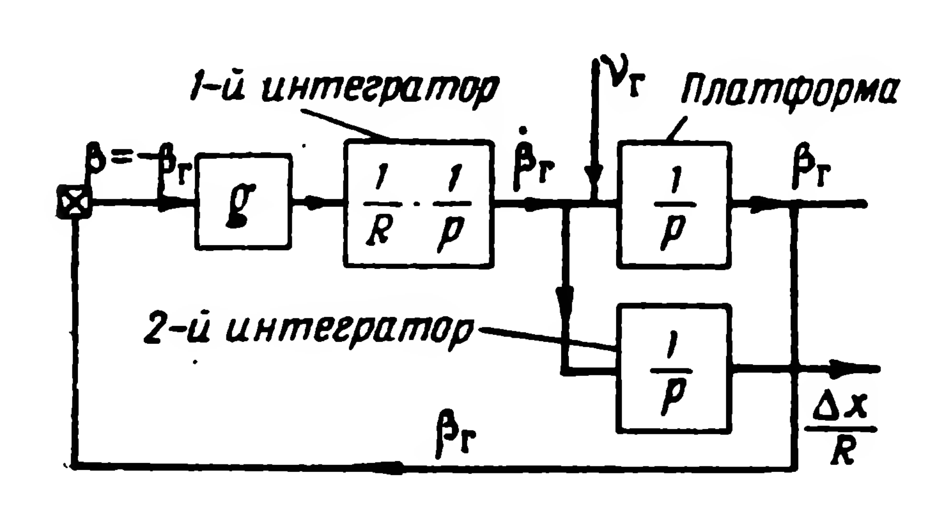
Если начальные ошибки $\beta_0=\dot{\beta}_0=0$, то платформа всегда будет горизонтальна и акселерометры будут выдавать сигнал, равный ускорению снаряда. Выход первого интегратора (фиг. 5.27), умноженный на $R$, даст в этом случае путевую скорость снаряда, а выход второго — пройденное расстояние. Если акселерометр на схемах фиг. 5.27 и 5.28 ориентирован в направлении север—юг, то выход второго интегратора $\beta_г$ при настройке $k/H=1/R$ будет указывать текущую широту места снаряда $\varphi$. Аналогичным образом, но с некоторыми особенностями строится система для указания долготы.

На фиг. 5.27 приведена структура гироориентатора, указывающего местоположение снаряда в географической системе координат. После интегрирования показаний акселерометра $j_{NS}$, ориентированного в направлении север—юг, получается угловая ско-

рость широты $\dot{\varphi}$ и широта $\varphi$. Первый интеграл $\dot{\beta}_г$ сигнала акселерометра запад—восток $jwo$ не является еще угловой скоростью долготы $\dot{\lambda}$. Для получения $\dot{\lambda}$ необходимо $\dot{\beta}_г$ разделить на $\cos\varphi$ и учесть угловую скорость суточного вращения Земли $\omega_з$:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\beta}_г}{\cos\varphi} \pm \omega_з. \tag{5.46}$$

Математические операции, предписываемые формулой (5.46), выполняются специальным счетно-решающим устройством (СРУ). После вычисления сигнала $\dot{\lambda}$ он интегрируется и получается текущая долгота. Гироориентатор, структурная схема которого изображена на фиг. 5.27, непригоден для навигации в районе географических полюсов, поскольку выражение (5.46) при $\varphi=\pi/2$ имеет особую точку. Можно построить гироориентатор в других системах координат, не имеющих упомянутого недостатка.




Фиг. 5.28. Упрощенная схема системы стабилизации платформы с акселерометрами.

Остановимся вкратце на точности описанных гироинерциальных систем навигации. Начальная ошибка $\beta_0$ в установке платформы согласно (5.45) приведет к появлению гармонической составляющей в сигнале акселерометра — $g\beta_0\cos\omega_0 t$. Эта составляющая, дважды проинтегрированная, даст гармоническую составляющую ошибки пройденного пути

$$\Delta x = \int_0^t\int_0^t g\beta_0 \cos\omega_0 t\, dt\, dt = \frac{g\beta_0}{\omega_0^2}(1-\cos\omega_0 t) =$$

$$= \beta_0 R(1-\cos\omega_0 t). \tag{5.47}$$

Как показывает формула (5.47), на каждую угловую минуту начальной ошибки $\beta_0$ получается гармоническая составляющая ошибки в пройденном пути с амплитудой, равной 1 морской миле (1,84 *км*). Поскольку знак ошибки $\Delta x$ совпадает со знаком $\beta_0$, то максимальное значение ошибки будет равно двум морским милям на каждую угловую минуту $\beta_0$.

Более неприятная ошибка возникает в результате дрейфа гироплатформы. Пусть в момент $t=0$ имеет место начальный дрейф

гироплатформы с постоянной угловой скоростью $\nu_г$. В этом случае уравнение (5.35) примет вид (при $k/H=1/R$)

$$\dot{\beta}_г = \frac{1}{R}\int\limits_0^t (j + g\beta)\,dt + \nu_г 1(t). \tag{5.48}$$

Поскольку рассматривается только ошибка, вызванная дрейфом $\nu_г$, то положим $j=0$, $\beta=0$. В этом случае $\beta=\beta_г$ и выражение (5.48) после дифференцирования примет вид

$$\ddot{\beta}_г + \frac{g}{R}\beta_г = \nu_г\delta(t), \tag{5.49}$$

где

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}1(t) \text{ — функция Дирака.}$$

Решая (5.49) с помощью преобразования Лапласа, находим

$$\beta_г = \frac{\nu_г}{\omega_0}\sin\omega_0 t. \tag{5.50}$$

Дрейф гироплатформы также приводит к ее колебаниям с периодом Шулера. На выходе акселерометра в результате этого образуется сигнал $g\beta_г$, который, дважды интегрируясь, даст ошибку в пройденном пути или дальности:

$$\Delta x = \frac{g\nu_г}{\omega_0}\int\limits_0^t\int\limits_0^t \sin\omega_0 t\,dt\,dt = R\nu_г\left(t - \frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right). \tag{5.51}$$

Ошибки в дальности имеют линейно-нарастающую и колебательную компоненты.

Требования к малой величине дрейфа гироплатформы очень высоки. Так, при дрейфе $\nu_г=0{,}1$ *град/час* возникают колебания платформы с амплитудой 1,35′, что соответствует дистанции в 2,5 *км*. При таком же дрейфе линейно-нарастающая ошибка за 84 *мин* полета достигает 8,4 морских миль (15,6 *км*).

Для снарядов с малым временем полета (несколько минут) $\sin\omega_0 t$ в уравнении (5.51) можно заменить двумя первыми членами ряда:

$$\sin\omega_0 t \approx \omega_0 t - \frac{(\omega_0 t)^3}{6}.$$

Тогда формула (5.51) для ошибки от ухода гироскопа примет вид

$$\Delta x = g\nu_г\frac{t^3}{6}. \tag{5.52}$$

Формулу (5.52) можно получить из других соображений. Для небольших отрезков времени структурную схему фиг. 5.28 можно считать разомкнутой. В этом случае дрейф платформы с постоянной скоростью приведет к линейно-нарастающему сигналу акселерометра. Двойное интегрирование этой величины и приводит к выражению (5.52).

В заключение заметим, что уравнение (5.51) может быть получено из анализа структурной схемы системы (фиг. 5.28). Дрейф $\nu_г$ можно рассматривать как возмущение, действующее на вход платформы. Передаточная функция выхода второго интегратора $\Delta x/R$ от возмущения $\nu_г$ будет иметь вид

$$\Phi(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2} \frac{1}{p},$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R}.$$

При ступенчатой функции $\nu_г(t) = \nu_г \cdot 1(t)$ получим изображение выхода второго интегратора

$$L\left(\frac{\Delta x}{R}\right) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2} \frac{\nu_г}{p}.$$

Оригиналом этого изображения как раз и является найденное выше выражение (5.51).

## 2. Коррекция и демпфирование инерциальных систем первого типа

При наличии дополнительных источников информации о координатах снаряда показания инерциальной системы навигации можно скорректировать, т. е. накопившиеся ошибки можно устранить. Характер и метод ликвидации ошибок зависят от характера поступления внешней информации. Если на борту снаряда имеются средства опознавания наземных ориентиров, координаты которых известны, то ошибки устраняются по мере распознавания ориентиров. Часто внешняя информация поступает непрерывно. В этом случае и коррекция автономной системы может происходить непрерывно. Источниками внешней информации для коррекции инерциальных систем могут служить средства астро- и радионавигации. В качестве примера рассмотрим коррекцию инерциальной системы *2* (см. фиг. 5.29) от радиотехнического измерителя *1* вектора путевой скорости снаряда, основанного на эффекте Допп-

лера. Этот измеритель дает сигнал $V+f$, где $V$ — путевая скорость и $f$ — помеха, спектр которой носит высокочастотный характер и математическое ожидание равно нулю. С другой стороны инерциальная система дает сигнал $V+\dot{\alpha}=\beta_г R$, где $V$ — то же значение истинной путевой скорости и $\dot{\alpha}$ — медленно меняющаяся ошибка. Если учесть начальную установочную ошибку $\beta_0$ и дрейф платформы с постоянной скоростью, то

$$\dot{\alpha}=\dot{\alpha}_0+\dot{\alpha}_m \sin(\omega_0 t-\varphi),$$

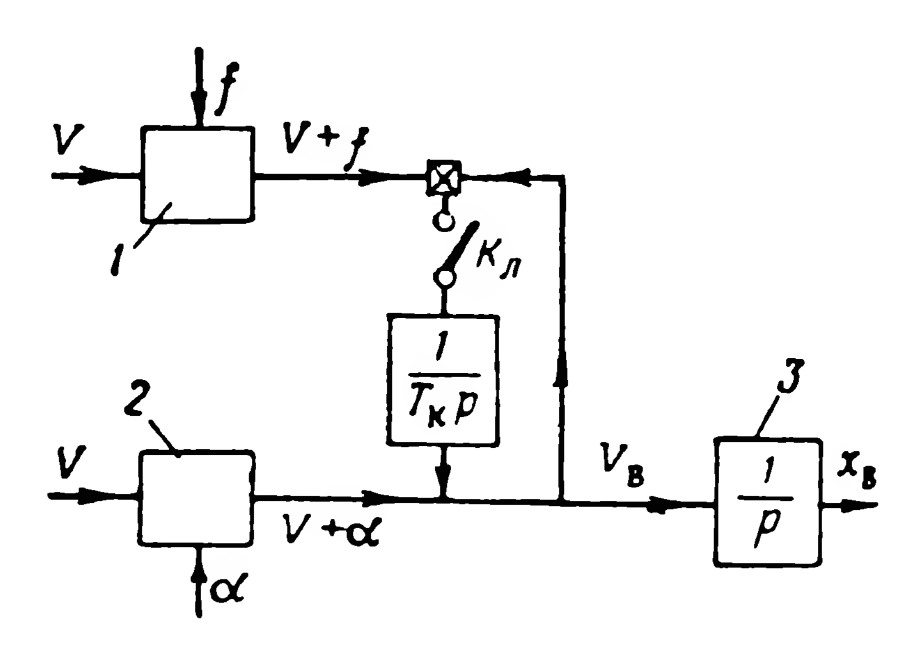
где

$\dot{\alpha}_0=\frac{g\nu_г}{\omega_0^2}=\nu_г R$ — постоянная составляющая ошибки;

$\dot{\alpha}_m=R\sqrt{\beta_0^2\omega_0^2+\nu_г^2}$ — амплитуда гармонической составляющей ошибки;

$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\nu_г}{\beta_0\omega_0}$ — фаза гармонической составляющей ошибки.

Коррекцию инерциальной системы осуществим путем смешивания $V+f$ и $V+\dot{\alpha}$ на одноинтеграторной следящей системе с двумя входами *1* и *2* (фиг. 5.29). Суммарный сигнал $V_в$ с выхода *3* подается на второй интегратор инерциальной системы для вычисления пути. Ключ *Кл* перед интегратором следящей системы служит для включения и отключения сигнала коррекции, идущей от допплеровского измерителя.




Фиг. 5.29. Схема одноинтегральной коррекции инерциальной системы

По входу *1* следящая система имеет передаточную функцию в виде фильтра низких частот

$$W_1(p)=\frac{1}{T_к p+1},$$

а по входу *2* — в виде фильтра высоких частот

$$W_2(p)=\frac{T_к p}{T_к p+1}.$$

Суммарный сигнал $V_в$ на вход следящей системы получим, используя принцип суперпозиции

$$V_в = \frac{1}{T_к p + 1}(V + f) + \frac{T_к p}{T_к p + 1}(V + \dot{\alpha}) =$$

$$= V + \frac{f}{T_к p + 1} + \frac{T_к p}{T_к p + 1}\dot{\alpha}. \qquad (5.53)$$

Выражение (5.53) показывает, что на выходе *3* получается значительно более чистый сигнал путевой скорости, чем ранее с интегратора ускорений, поскольку высокочастотная помеха подавляется фильтром низких частот, а медленно меняющаяся ошибка — фильтром высоких частот.

Подсчитаем ошибку в пройденном пути $\Delta x$, обусловленную неточностями инерциальной системы при рассмотренной системе коррекции. Пренебрегая переходной составляющей в следящей системе коррекции, будем иметь

$$\Delta x = \frac{1}{p}\left[T_к p \dot{\alpha}\right] = T_к \dot{\alpha}_0 + T_к \dot{\alpha}_m \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Таким образом, линейно-нарастающая ошибка отсутствует. Имеется постоянная составляющая $T_к \dot{\alpha}_0 = T_к \nu_г R$ и колебательная составляющая с амплитудой $T_к \nu_г R$, которая возникает вследствие ухода платформы, и с амплитудой $T_к \beta_0 \sqrt{gR}$, обусловленная начальной ошибкой установки $\beta_0$. Ошибка от ухода платформы равна

$$\Delta x_0 = 31 T_к \nu_г \ \textit{град/час} \cdot 10^{-3}.$$

При $\nu_г = 0{,}1$ *град/час* и $T_к = 30$ *сек* величина $\Delta x_0 = 93$ *м*. Амплитудная ошибка от начальной установки будет

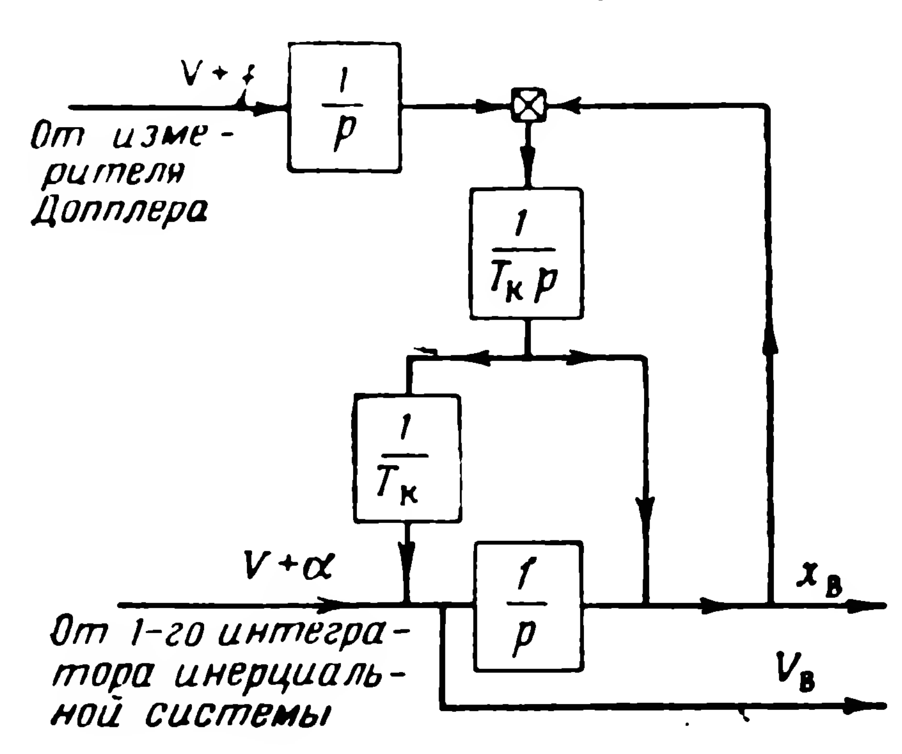
$$\Delta x_m = 0{,}14 T_к \overset{\circ}{\beta_0} \ \textit{км}.$$

При $\overset{\circ}{\beta_0} = \frac{1^\circ}{60}$ и $T_к = 30$ *сек* величина $\Delta x_m = 70$ *м*.

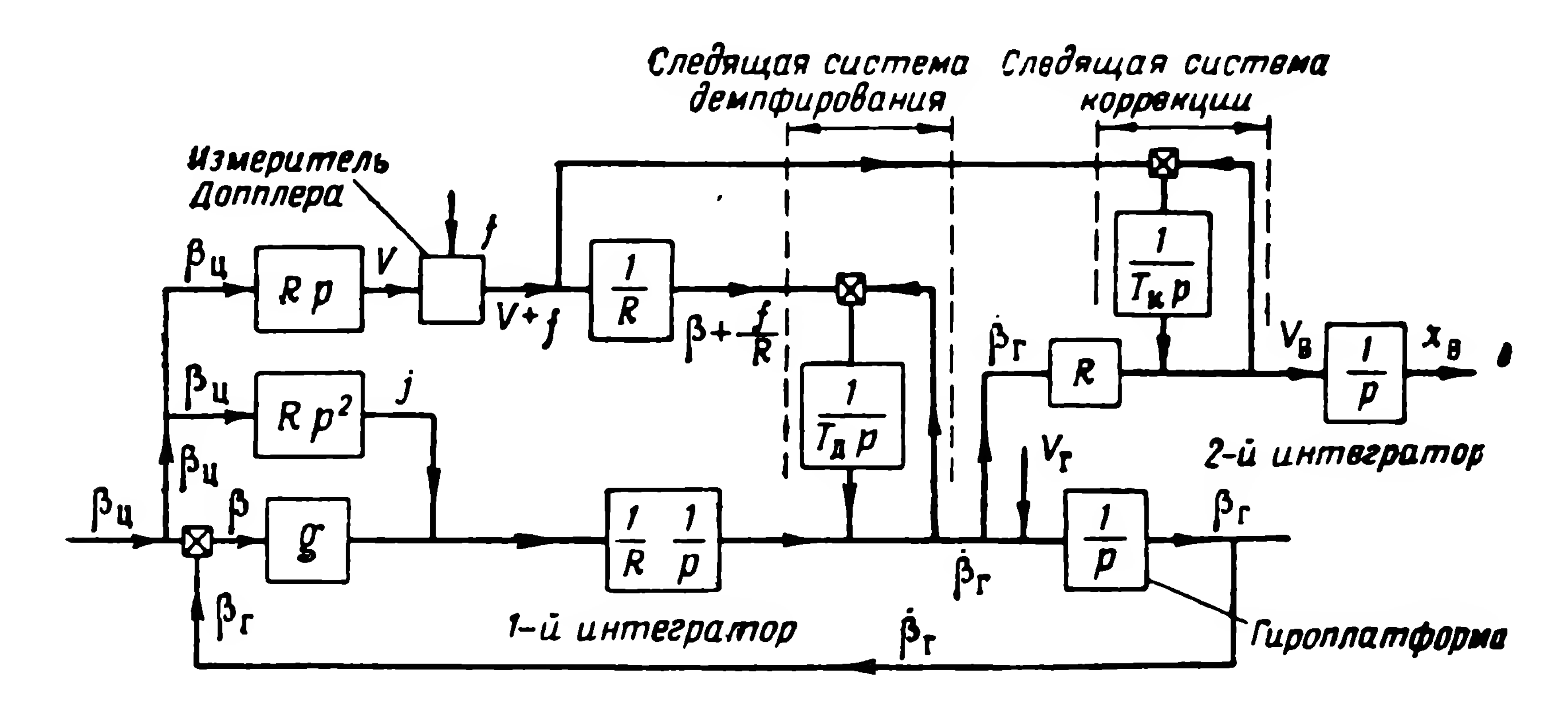
При полетах на большие расстояния такие ошибки являются ничтожными. Это обстоятельство позволяет существенно ослабить требования к значениям $\beta_0$ и $\nu_г$ и применять при наличии коррекции значительно менее точные и, следовательно, более дешевые инерциальные системы. Постоянную ошибку $\Delta x_0$ можно окончательно устранить, изменив схему корректирующей следящей системы. Сигнал от допплеровского измерителя предварительно интегрируется и подается на вход двухинтеграторной следящей системы, структурная схема которой приведена на фиг. 5.30. Одним

из интеграторов этой системы является второй интегратор инерциальной системы. По этой структурной схеме несложно найти передаточные функции следящей системы и определить значения выходных сигналов $x_в$ и $V_в$.

Колебательную составляющую ошибки можно исключить путем демпфирования инерциальной системы. Используя сигнал допплеровского измерителя путевой скорости, можно осуществить демпфирование системы без нарушения свойств невозмущаемости, т. е. получить маятник Шулера с затуханием. На фиг. 5.31 показано, как сигнал допплеровского измерителя скорости используется для демпфирования и коррекции инерциальной системы. Сигнал для демпфирования смешивается с выходом первого интегратора через такую же следящую систему, какая используется для коррекции (в частности, для того, чтобы ослабить влияние помех на контур гироинерциальной системы). Как следует из структурной схемы, приведенной на фиг. 5.31, возникла еще одна цепь регулирования по управляющему воздей-




Фиг. 5.30. Схема двухинтегральной коррекции инерциальной системы.




Фиг. 5.31. Структурная схема демпфирования инерциальной системы.

ствию по сравнению с исходной схемой, изображенной на фиг. 5.28. Составим, как и в предыдущем случае, передаточные функции для $\beta_г$ и $\beta$.

Передаточная функция для $\beta_г$ содержит следующие составляющие:

составляющая от входа *1*

$$\Phi_1(p)=\frac{\dfrac{T_д\omega_0^2}{(T_д p+1)p}}{1+\dfrac{T_д\omega_0^2}{(T_д p+1)p}}=\frac{\omega_0^2}{p^2+\dfrac{1}{T_д}p+\omega_0^2}; \qquad (5.54)$$

составляющая от входа *2*

$$\Phi_2(p)=\frac{\dfrac{T_д p^2}{(T_д p+1)p}}{1+\dfrac{T_д\omega_0^2}{(T_д p+1)p}}=\frac{p^2}{p^2+\dfrac{1}{T_д}p+\omega_0^2}; \qquad (5.55)$$

составляющая от входа *3*

$$\Phi_3(p)=\frac{\dfrac{p}{(T_д p+1)p}}{1+\dfrac{T_д\omega_0^2}{(T_д p+1)p}}=\frac{\dfrac{1}{T_д}p}{p^2+\dfrac{1}{T_д}p+\omega_0^2}. \qquad (5.56)$$

В итоге передаточная функция для $\beta_г$ имеет вид

$$\Phi(p)=\Phi_1(p)+\Phi_2(p)+\Phi_3(p)=\frac{p^2+\dfrac{1}{T_д}p+\omega_0^2}{p^2+\dfrac{1}{T_д}p+\omega_0^2}=1. \qquad (5.57)$$

Таким образом, сигнал $\beta_ц$ проходит без искажения, т. е. так же, как и при отсутствии коррекции от допплеровского измерителя. При повторении тех же рассуждений передаточная функция для $\beta$ будет равна нулю. Таким образом, свойство невозмущаемости инерциальной системы сохранилось, а уравнение свободных колебаний имеет вид

$$\ddot{\beta}+\frac{1}{T_д}\dot{\beta}+\omega_0^2\beta=0$$

или

$$\ddot{\beta}+2\zeta\omega_0\dot{\beta}+\omega_0^2\beta=0,$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{g}{R},\ 2\zeta\omega_0 = \frac{1}{T_д},\ \zeta = \frac{\sqrt{R}}{2T_д\sqrt{g}}.$$

Начальная ошибка будет теперь затухать по закону

$$\beta = \beta_0 \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}\, t + \varphi),$$

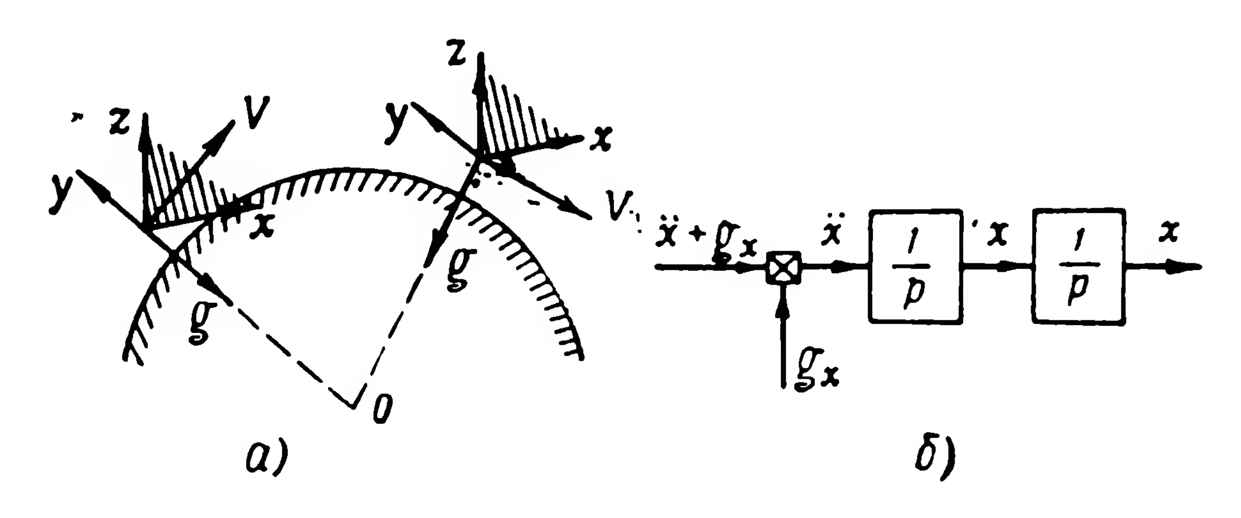
где

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta).$$

Оптимальный коэффициент затухания $\zeta$, как известно, равен $\sqrt{2}/2$. При этом коэффициенте затухания начальная ошибка $\beta_0$ снизится до 5% своего начального значения за полпериода собственных колебаний, т. е. в данном случае за 42,2 *мин*. Постоянная $T_д$ при $\zeta=\sqrt{2}/2$ равна $\sqrt{R/2g}\approx 470$ *сек*. Большое значение $T_д$ означает малый коэффициент усиления интегрирующего звена $1/T_д$. При применении интегрирующих двигателей малый коэффициент $1/T_д$ получается при большом передаточном числе понижающего редуктора.

### 3. Инерциальные системы второго типа

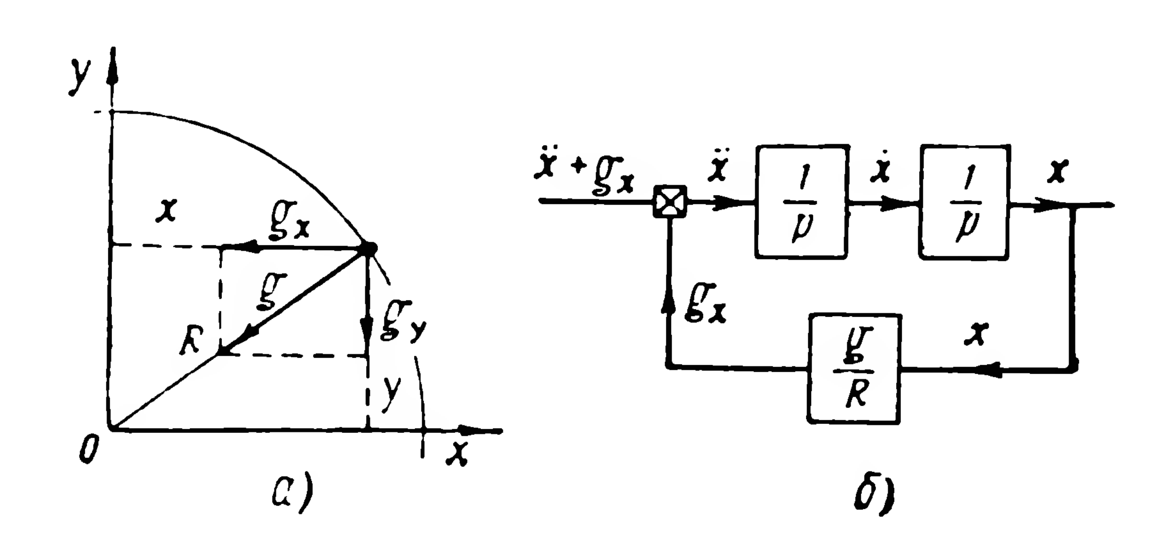
В системах этого типа гироплатформа с акселерометрами остается неподвижной в мировом пространстве. В связи с этим по




Фиг. 5.32. Изменение положения гиростабилизированной платформы второго типа при движении снаряда и структурная схема.

мере перемещения снаряда около поверхности земли составляющие земного ускорения $g_x$, $g_y$, $g_z$, воспринимаемые акселерометрами, будут непрерывно изменяться (фиг. 5.32, *а*). Показания каждого акселерометра будут соответственно $\ddot{x}+g_x$; $\ddot{y}+g_y$ и $\ddot{z}+g_z$. Для получения составляющих скоростей $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и координат снаряда $x$, $y$, $z$ необходимо исключить из показаний акселерометров со-

ставляющие $g_x$, $g_y$, $g_z$ (фиг. 5.32, *б*). Эти составляющие можно вычислить, зная $g$ и координаты $x$, $y$, $z$. Поместив систему координат $x$, $y$, $z$ в центр Земли (фиг. 5.33, *а*), замечаем, что $g_x = g\frac{x}{R}$; $g_y = g\frac{y}{R}$ и $g_z = g\frac{z}{R}$. Отсюда видно, что аналитическое исключение составляющей $g_x$ (аналогично $g_y$ и $g_z$) вновь приводит к замкнутому контуру с двумя интегрирующими звеньями и коэффициентом усиления $g/R = \omega_0^2$ (см. фиг. 5.33, *б*). В контуре при начальных




Фиг. 5.33. Схема определения координат снаряда при использовании гиростабилизированной платформы второго типа.

отклонениях устанавливаются незатухающие колебания с периодом Шулера.

Итак, компенсация земного ускорения в показаниях акселерометров с точки зрения динамики равнозначна моделированию маятника Шулера гироплатформой с акселерометрами. В связи с этим остаются в силе все приведенные выше соображения о точности и коррекции инерциальных систем. Заметим, что при малом времени полета и крутой траектории, как это имеет место у баллистических или защитных ракет, можно не учитывать изменения $g_x$, $g_y$ и $g_z$. В этом случае схема интегрирования оказывается разомкнутой.

*Глава VI*

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УПРАВЛЯЮЩИХ СИГНАЛОВ НА СНАРЯДАХ

## § 6.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

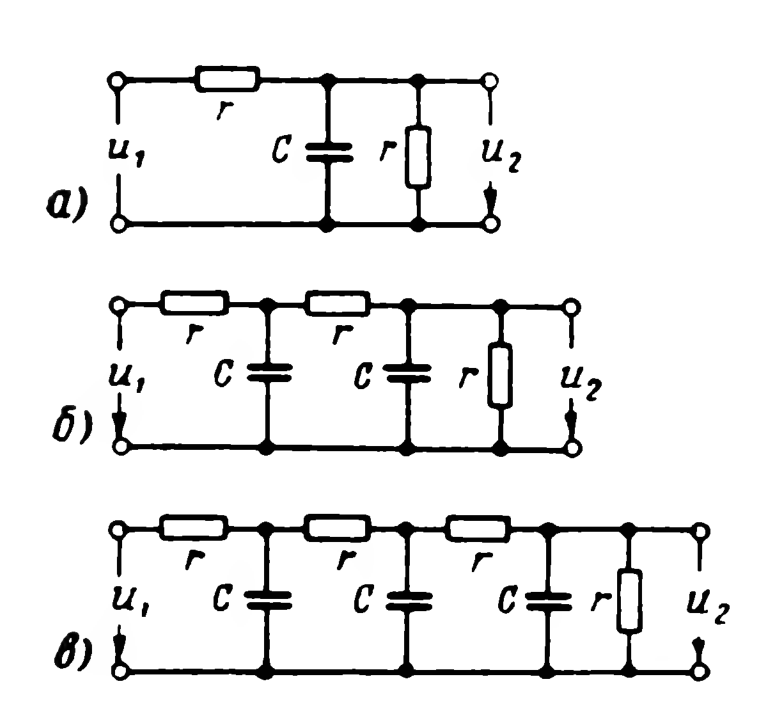
В гл. III—V были рассмотрены методы получения управляющих сигналов при различных способах наведения снарядов. Эти управляющие сигналы во многих случаях содержат, кроме полезной составляющей, также и помехи. Для борьбы с помехами используются специальные фильтры, пропускающие полезный сигнал без существенного искажения и в значительной степени подавляющие помехи. На автопилот снаряда, как правило, подается не один, а несколько управляющих сигналов. Таким образом возникает задача суммирования сигналов. При этом суммировании удельный вес каждого сигнала определяется законом управления.

Для обеспечения высоких динамических свойств, а также заданной точности попадания в закон управления вводятся сигналы, пропорциональные производным и интегралу от составляющих управляющего сигнала. Иногда сигналы, пропорциональные производным от различных величин, могут быть получены непосредственно (скоростной гироскоп, акселерометр). Если этого сделать нельзя, то сигналы, пропорциональные производным, можно образовать дифференцированием соответствующего сигнала. Получение интеграла от какого-либо сигнала обеспечивается различными электрическими схемами или электромеханическими устройствами. В некоторых случаях снаряды не стабилизируются в пространстве относительно продольной оси и могут занимать произвольное положение. Если управляющие сигналы посылаются с земли или с самолета, то они связаны с земной системой координат. Для правильного воспроизведения посланных сигналов на борту снаряда их нужно преобразовать из земной системы координат в систему, связанную со снарядом. Такая операция выполняется специальными преобразователями координат.

Указанные выше задачи, связанные с тем или иным преобразованием сигналов, рассматриваются в настоящей главе.

## § 6.2. СГЛАЖИВАНИЕ И ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ

Сигналы управления, поступающие с чувствительных элементов системы наведения снаряда, часто содержат, кроме медленно изменяющейся полезной составляющей, также и вредные составляющие более высокой частоты. В одних случаях составляющая более высокой частоты обусловлена какой-либо модуляцией управляющего сигнала, вызванной, например, вращением плоскости поляризации антенны радиолокационной станции, входящей в систему управления снаряда. В других случаях высокочастотная составляющая вызвана совокупностью помех, возникающих по самым различным причинам в системе управления. И в том, и другом случае возникает задача выделения полезного сигнала на фоне высокочастотных помех. Ниже будут рассмотрены фильтры, обеспечивающие подавление помех, частоты которых лежат в определенном диапазоне.




Фиг. 6.1. Схемы сглаживающих фильтров.
*а* — однозвенный. *б* — двухзвенный. *в* — трехзвенный.

Рассмотрим простейшие и наиболее распространенные схемы сглаживающих фильтров на сопротивлениях и емкостях. На фиг. 6.1 изображены схемы сглаживающих фильтров, состоящие из одного, двух или трех одинаковых звеньев. Передаточные функции этих фильтров имеют следующий вид:

однозвенный фильтр

$$W_1(p) = \frac{1}{T_ф p + 2}; \tag{6.1}$$

двухзвенный фильтр

$$W_2(p) = \frac{1}{T_ф^2 p^2 + 4T_ф p + 3}; \tag{6.2}$$

трехзвенный фильтр

$$W_3(p) = \frac{1}{T_ф^3 p^3 + 6T_ф^2 p^2 + 10T_ф p + 4}. \tag{6.3}$$

Во всех этих формулах постоянная времени $T_ф$ определяется соотношением

$$T_ф = rc. \tag{6.4}$$

Для характеристики фильтров введем понятие коэффициента передачи. Коэффициент передачи равен отношению действующих

значений выходного и входного синусоидальных сигналов. Для представленных на фиг. 6.1 схем фильтров коэффициенты передачи определяются следующими формулами:

однозвенный фильтр

$$k_1 = \frac{u'_{2\sim}}{u_{1\sim}} = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 4}}; \tag{6.5}$$

двухзвенный фильтр

$$k_2 = \frac{u'_{2\sim}}{u_{1\sim}} = \frac{1}{\sqrt{\mu^4 + 10\mu^2 + 9}}; \tag{6.6}$$

трехзвенный фильтр

$$k_3 = \frac{u'_{2\sim}}{u_{1\sim}} = \frac{1}{\sqrt{\mu^6 + 16\mu^4 + 52\mu^2 + 16}}. \tag{6.7}$$

В формулах (6.5)—(6.7) $\mu$ есть безразмерная частота сигнала, определяемая выражением

$$\mu = T_\text{ф}\,\omega. \tag{6.8}$$

Если в формулах (6.5)—(6.7) положить $\mu=0$, то получим значение коэффициентов передачи для постоянного напряжения. Как уже указывалось, управляющие сигналы на снарядах обычно состоят из полезного сигнала, обусловленного отклонением снаряда от заданной траектории полета, и сигнала помех, имеющих более высокую частоту. Для упрощения будем считать полезный сигнал постоянным по величине и рассмотрим, как преобразуется сглаживающим фильтром напряжение, состоящее из постоянной и синусоидальной составляющих. Сигнал на входе в фильтр характеризуется коэффициентом пульсаций, под которым понимается отношение действующего значения переменной составляющей напряжения к постоянной составляющей:

$$q_1 = \frac{u_{1\sim}}{u_{1=}}. \tag{6.9}$$

Сигнал на выходе фильтра также характеризуется коэффициентом пульсаций

$$q_2 = \frac{u'_{2\sim}}{u'_{2=}}. \tag{6.10}$$

Коэффициент пульсаций на выходе может быть выражен через коэффициент пульсаций на входе и коэффициенты передачи фильтра следующей формулой:

$$q_2 = q_1 \cdot \frac{k_{\sim}}{k_{=}}, \qquad (6.11)$$

где

$$k_{\approx} = \frac{u_{2\sim}}{u_{1\sim}}$$

и

$$k_{=} = \frac{u_{2=}}{u_{1=}}.$$

Подставляя в формулу (6.11) значения коэффициентов передачи различных фильтров на основании выражений (6.5)—(6.7). получим значения коэффициентов пульсации на выходе:

однозвенный фильтр

$$q_2 = q_1 \frac{2}{\sqrt{\mu^2 + 4}}; \qquad (6.12)$$

двухзвенный фильтр

$$q_2 = q_1 \frac{3}{\sqrt{\mu^3 + 10\mu^2 + 9}}; \qquad (6.13)$$

трехзвенный фильтр

$$q_2 = q_1 \frac{4}{\sqrt{\mu^6 + 16\mu^4 + 52\mu^2 + 16}}. \qquad (6.14)$$

Формулы (6.12)—(6.14) можно сокращенно представить следующим образом:

$$q_2 = q_1 k. \qquad (6.15$$

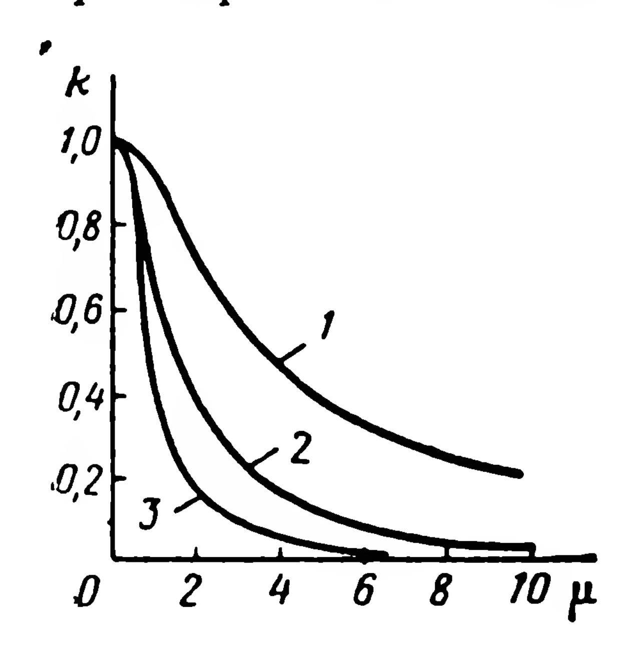
Графики для коэффициента $k$ как функции безразмерной частоты $\mu$ приведены на фиг. 6.2. Эти графики построены на основании формул (6.12)—(6.14). Зная частоту переменной составляющей и коэффициент пульсаций сигнала на входе фильтра, а также требуемое значение коэффициента пульсаций в выходном сигнале, по графикам на фиг. 6.2 можно определить требуемое значение постоянной фильтра $T_{ф}$. Порядок расчета следующий:

1) по известному $q_1$ и заданному $q_2$ находим требуемое значение $k = q_2/q_1$;

2) по графикам на фиг. 6.2 получим значение $\mu$, соответствующее данному $k$; при этом чем меньше значение $k$, тем более сложную схему фильтра следует использовать;

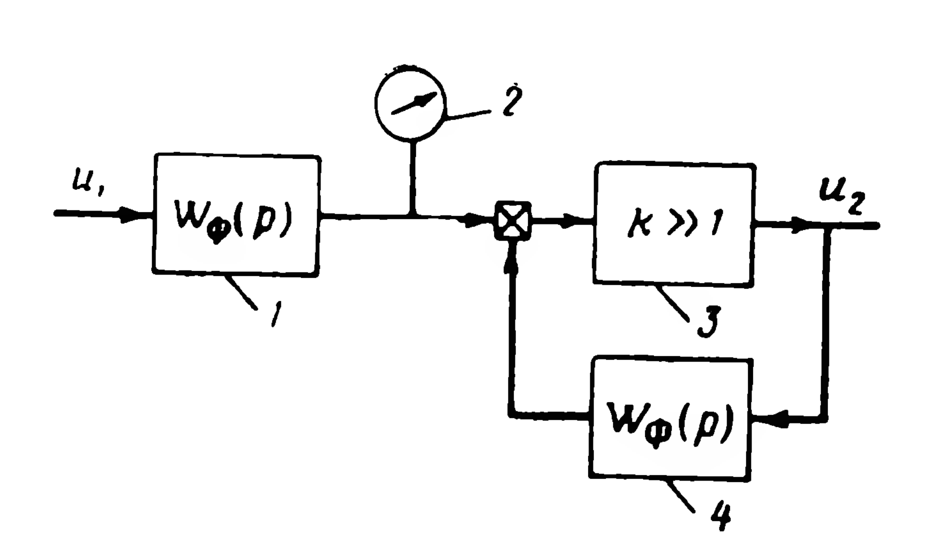
3) зная $\mu$ и $\omega$, находим на основании формулы (6.8) значение постоянной времени фильтра: $T_ф=\mu/\omega$.

Приведенная методика выбора параметров сглаживающих фильтров может быть распространена на пассивные сглаживающие фильтры любой схемы.




Фиг. 6.2. Характеристики сглаживающих фильтров.

*1* — однозвенный, *2* — двухзвенный, *3* — трехзвенный.




Фиг. 6.3. Структурная схема активного сглаживающего фильтра.

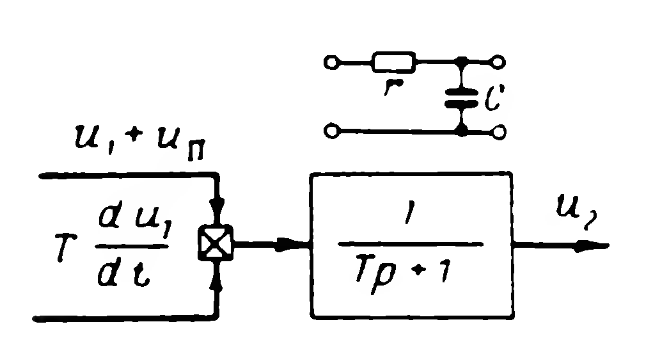
*1* и *4* — фильтры, *2* — указатель, *3* — усилитель.

В сложных системах управления иногда необходимо сгладить сигнал в определенной точке контура управления, но при этом нежелательно вводить в контур дополнительное запаздывание за счет сглаживающего фильтра. Это имеет место, например, в системах, в которых оператор участвует в управлении снарядом. Высокочастотные помехи могут вызвать нежелательные колебания стрелки прибора-указателя, которым пользуется оператор. Сглаживание сигнала перед указателем может быть выполнено сглаживающим фильтром с достаточной эффективностью. Чтобы при включении такого фильтра не увеличилось запаздывание в контуре управления, применяют схему, приведенную на фиг. 6.3. Помеха подавляется в нужной степени фильтром *1* и сигнал подается на указатель *2*. После указателя включен безынерционный усилитель *3* с большим коэффициентом усиления $k$, охваченный обратной связью, в цепи которой в свою очередь включен фильтр *4*, аналогичный фильтру *1*. Передаточная функция всей схемы на фиг. 6.3 определяется выражением

$$W(p)=\frac{kW_ф(p)}{1+kW_ф(p)}=\frac{1}{\dfrac{1}{kW_ф(p)}+1}\approx 1, \qquad (6.16)$$

т. е. схема при большом $k$ ведет себя как безынерционное звено. Очевидно, чем больше $k$, тем точнее выполняется равенство $W(p)=1$. Таким образом, схема активного фильтра, приведенная на фиг. 6.3, решает поставленную задачу, обеспечивая сглаживание сигнала без внесения запаздывания в процесс передачи сигнала.

В ряде случаев подавление помехи, содержащейся в управляющем сигнале, облегчается, если имеются чувствительные элементы, непосредственно измеряющие первую, а иногда и вторую производные от управляющего сигнала. Так, например, при управлении высотой полета сигнал вариометра пропорционален первой производной от высоты, а сигнал нормальной перегрузки — второй производной.




Фиг. 6.4. Структурная схема операционного сглаживающего фильтра с первой производной.

Рассмотрим принцип работы сглаживающего фильтра, на вход у которого подаются не только управляющий сигнал, но и производные от него. В дальнейшем такие фильтры будем называть операционными. На фиг. 6. 4 дана схема простейшего операционного фильтра с одной сглаживающей ячейкой. Передаточная функция этой ячейки отличается от передаточной функции (6.1) тем, что свободный член знаменателя стал в два раза меньше. Это объясняется тем, что сопротивление нагрузки фильтра принято бесконечно большим. Входной сигнал операционного фильтра на фиг. 6.4 состоит из полезного сигнала $u_1$ и его производной, а также сигнала помехи $u_п$. Сигнал производной должен вводиться с коэффициентом пропорциональности

$$T = rc.$$

Связь между входным и выходным сигналами для схемы на фиг. 6.4 определяется дифференциальным уравнением

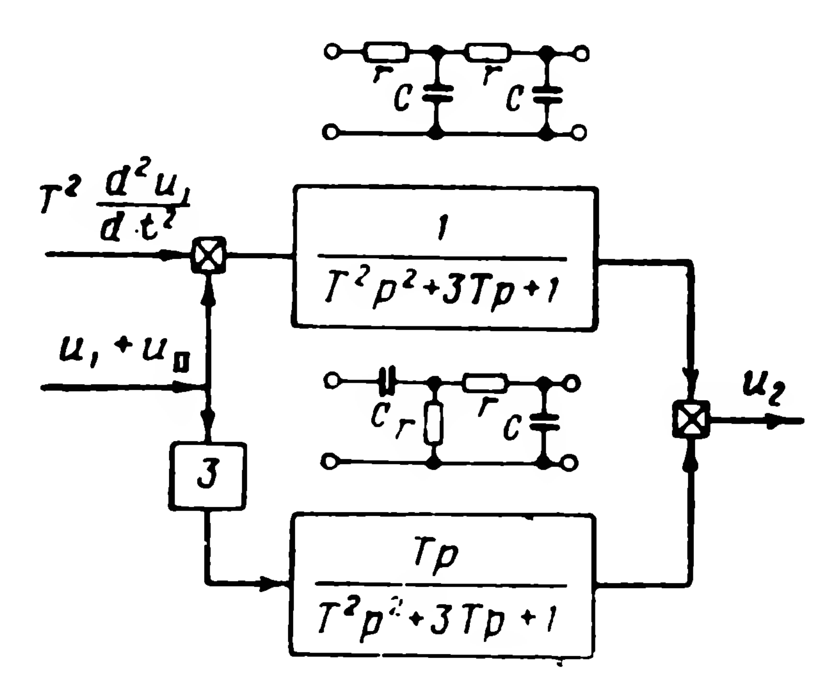
$$T\frac{du_2}{dt} + u_2 = T\frac{du_1}{dt} + u_п + u_1. \qquad (6.17)$$

Если помеха имеет частоту $\omega$, то в установившемся режиме напряжение на выходе фильтра будет равно

$$u_2 = u_1 + \frac{u_п}{\sqrt{(T\omega)^2+1}}. \qquad (6.18)$$

Выражение (6.18) показывает, что управляющий сигнал проходит через рассматриваемый фильтр без искажения (это справедливо и для переходных режимов), а помеха уменьшается в $\left(\sqrt{(T\omega)^2+1}\right)$ раз. Схема, приведенная на фиг. 6.4, позволяет обес-

печить нужное сглаживание, так как управляющий сигнал передается на выход фильтра без дополнительного запаздывания и ничто не препятствует увеличению постоянной времени фильтра. Наиболее существенным отличием операционно-сглаживающих фильтров от обычных является то, что они обеспечивают сглаживание помехи при любой частоте полезного сигнала, в том числе и при частоте, большей частоты помехи. Это происходит благодаря производной от управляющего сигнала, получаемой независимым измерителем, что, естественно, не всегда выполнимо.



Фиг. 6.5. Структурная схема операционного сглаживающего фильтра со второй производной.

Если вместо сигнала первой производной имеется независимый сигнал, пропорциональный второй производной от управляющего сигнала, то, применяя фильтр, приведенный на фиг. 6.5, можно также обеспечить интенсивное подавление помехи. В установившемся режиме напряжение на выходе имеет вид

$$u_2 = u_1 + \frac{u_п \sqrt{(3T\omega)^2 + 1}}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 9T^2\omega^2}}, \tag{6.19}$$

где $T = rc$ и $\omega$ — частота помехи.

Если помеха имеет определенную, фиксированную полосу частот, то ее можно подавить весьма эффективными запирающими фильтрами (типа «фильтр-пробка»). Фильтрация управляющего сигнала, т. е. выделение нужной полосы частот, обеспечивается обычными резонансными или полосовыми фильтрами.

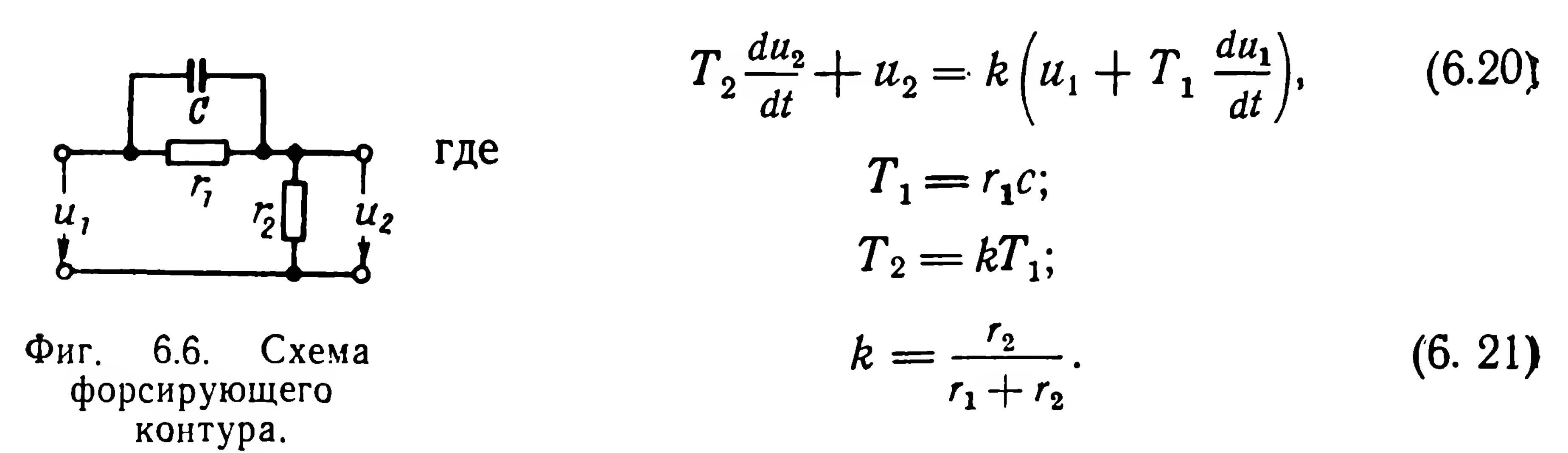
## § 6.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ

В § 2.1 было указано на две основные группы методов, применяемых для анализа систем автоматического управления: методы, связанные с исследованием переходных процессов в системах, и частотные методы. В соответствии с таким делением методов исследования существует и два подхода к анализу устройств, служащих для получения сигналов, повышающих устойчивость и точность систем автоматического управления. В первом случае анализ заключается в выяснении того, как и с какой точностью можно получить от различных сигналов производные и интегралы, необходимые для улучшения динамических и статических характеристик системы. Во втором случае аналогичные устройства анализируются частотными методами и, как это было показано

в § 2.3, рассматривается влияние этих устройств на общую частотную характеристику системы. В настоящем параграфе будут освещены оба указанных приема.

### 1. Дифференцирование сигналов

Если управляющие сигналы реализуются в виде постоянного тока, то для их преобразования наиболее широко применяют схемы из сопротивлений и емкостей. На фиг. 6.6 приведена схема форсирующего контура, у которого выходное напряжение пропорционально входному напряжению и производной от него. Дифференциальное уравнение, связывающее выходное и входное напряжения, имеет вид




Фиг. 6.6. Схема форсирующего контура.

$$T_2\frac{du_2}{dt}+u_2=k\left(u_1+T_1\frac{du_1}{dt}\right), \qquad (6.20)$$

где

$$T_1=r_1C;$$

$$T_2=kT_1;$$

$$k=\frac{r_2}{r_1+r_2}. \qquad (6.21)$$

Из уравнения (6.20) следует, что если бы $T_2$ было равно нулю, то выходное напряжение было бы пропорционально $u_1$ и $\frac{du_1}{dt}$, что и требуется. Так как выполнить условие $T_2=0$ невозможно, то к выходному напряжению добавляется член $T_2\frac{du_2}{dt}$, обусловливающий динамическую погрешность схемы. Погрешность будет тем меньше, чем меньше $k$, который обычно выбирается порядка $0{,}1\div0{,}2$. За счет этого сигнал при дифференцировании ослабляется, что вынуждает после форсирующего контура ставить усилители. Покажем, как, используя усилитель постоянного тока с большим коэффициентом усиления $k$, можно создать схему, выполняющую операцию дифференцирования достаточно точно и без ослабления сигнала. Структурная схема такого операционного усилителя представлена на фиг. 6.7. Передаточная функция этой схемы имеет вид

$$W(p)=\frac{k}{1+kW_{\text{о. с}}(p)}=\frac{1}{\frac{1}{k}+W_{\text{о. с}}(p)}\approx\frac{1}{W_{\text{о.с}}(p)}. \qquad (6.22)$$

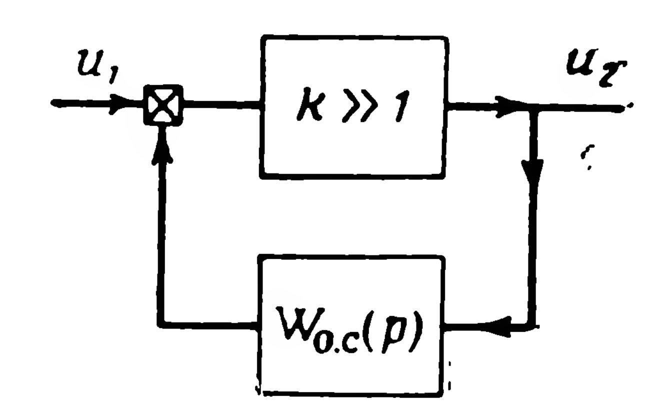
При включении в цепь обратной связи инерционного звена с передаточной функцией $W_{\text{о. с.}}(p)=\frac{1}{Tp+1}$ схема на фиг. 6.7 дает эф-

фект дифференцирования и одновременно пропускает основной сигнал. В этом случае выходной сигнал определяется уравнением

$$u_2 = u_1 + T\frac{du_1}{dt}. \qquad (6.23)$$

Так как коэффициент $k$ усилителя постоянного тока может быть порядка нескольких тысяч и даже десятков тысяч, то уравнение (6.23) можно реализовать с большой степенью точности.

В цепях переменного тока также можно получить производную сигнала управления. Пусть сигнал управления модулирует амплитуду переменного напряжения определенной («несущей») частоты. С изменением знака сигнала управления фаза несущего напряжения изменяется скачком на 180°. Сигнал управления может быть записан в следующей форме:




Фиг. 6.7. Структурная схема операционного усилителя.

$$u = A(t)\sin\omega_0 t, \qquad (6.24)$$

где $\omega_0$ — «несущая» частота;

$A(t)$ — управляющий сигнал.

При этом для достаточно точного воспроизведения сигнала управления необходимо, чтобы частота этого сигнала была много меньше «несущей» частоты.

Если представить управляющий сигнал как $A(t) = A\sin\omega t$, то напряжение $u$ может быть записано в виде

$$u = A\sin\omega t\sin\omega_0 t = \frac{A}{2}\left[\cos(\omega_0 - \omega)t + \cos(\omega_0 + \omega)t\right]. \qquad (6.25)$$

Выражение (6.25) показывает, что напряжение сигнала складывается из двух составляющих с различными частотами. Разность частот $(\omega_0 - \omega) = \Omega_1$ носит название частоты нижней боковой составляющей, сумма $(\omega_0 + \omega) = \Omega_2$ — частоты верхней боковой составляющей.

Для получения производной сигнала управления используется двойной Т-образный контур (фиг. 6.8), настроенный на частоту $\omega_н$. Выходное напряжение Т-образного контура поступает на вход фазового детектора, который выделяет напряжение определенной фазы. При частоте настройки $\omega_н$ контур заперт, т. е. на выходе контура напряжение равно нулю. Чаще частота настройки выбирается равной «несущей» частоте. Комплексная передаточная функция контура, приведенного на фиг. 6.8, может быть представлена в следующем виде:

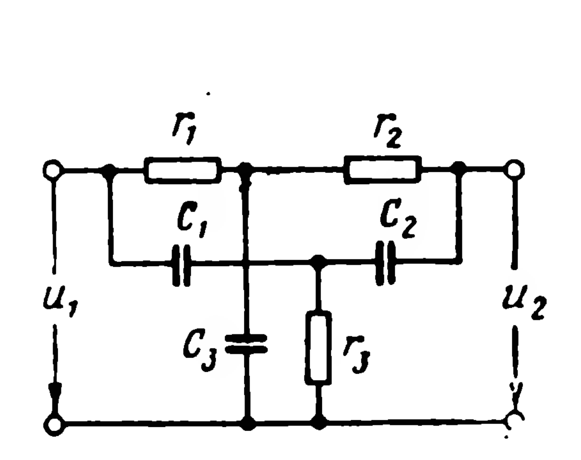
$$W(j\xi) = \frac{1}{1 + j\dfrac{k\xi}{1-\xi^2}}, \qquad (6.26)$$

где

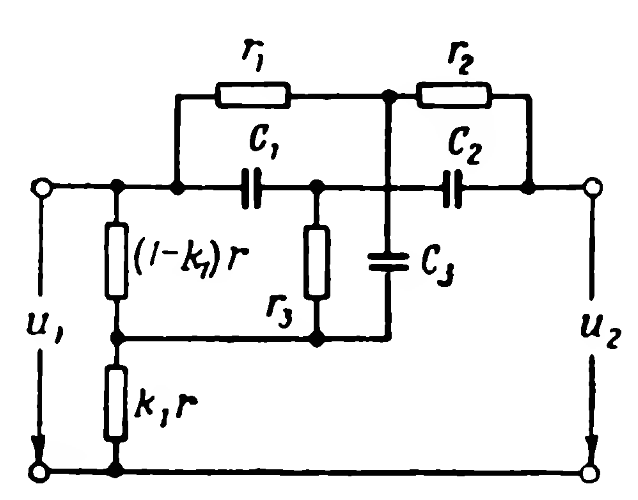
$$\xi = \frac{\Omega}{\omega_н}; \qquad k = \frac{\mu + nm^2}{\mu nm}; \qquad \mu = \frac{r_2}{r};$$

$$n = \frac{\dfrac{1}{\Omega c_2}}{\dfrac{1}{\Omega c_1} + \dfrac{1}{\Omega c_2}}; \quad m = \frac{\dfrac{1}{\omega_н c_1} + \dfrac{1}{\omega_н c_2}}{r}; \quad r = r_1 + r_2.$$

Если контур симметричен $r_1 = r_2$; $c_1 = c_2$, т. е. $\mu = n = \frac{1}{2}$; $m = 1$, то частота настройки контура определяется соотношением $\omega_н = 1/r_1c_1$. При частоте $\Omega = \omega_н$ получим $\xi = 1$ и передаточную функ-



Фиг. 6.8. Схема двойного Т-образного контура.



Фиг. 6.9. Двойной Т-образный контур с делителем напряжения.

цию $W(j\xi) = 0$, т. е. контур будет заперт. Согласно формуле (6.25) сигнал на входе рассматриваемой схемы состоит из двух составляющих с частотами $\Omega_1 = \omega_0 - \omega$ и $\Omega_2 = \omega_0 + \omega$ соответственно. Подставляя значение $\Omega_1$ и $\Omega_2$ в выражение (6.25), получим, что передаточная функция для частоты $\Omega_1$ имеет вид

$$W(j\Omega_1) \approx j\Omega_1 T, \tag{6.27}$$

где

$$T = \frac{2}{k\omega_н}.$$

Составляющая сигнала с частотой $\Omega_2$ практически не проходит вследствие постановки фазочувствительного детектора. Формула (6.27) показывает, что напряжение на выходе схемы представляет собой производную от одной из составляющих входного напряжения, описываемого формулой (6.25).

Для получения суммы сигнала и его производной необходимо применить двойной Т-образный контур с делителем напряжения (фиг. 6.9) и с последующей постановкой фазочувствительного де-

тектора. Передаточная функция данного контура может быть записана в форме

$$W(j\Omega_1) = k_1(1 + j\Omega_1 T'), \qquad (6.28)$$

где

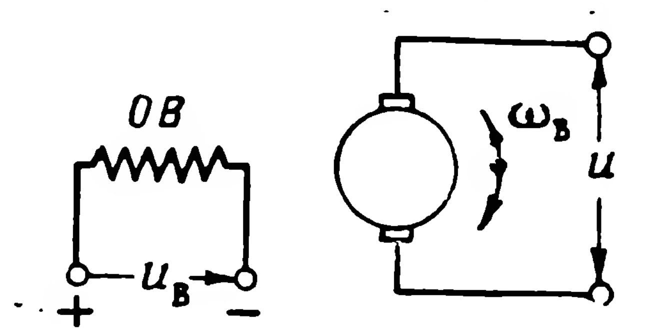
$$T' = \frac{1-k_1}{k_1} T;$$

$k_1$ — коэффициент ослабления.

При $k_1 \ll 1$

$$T' \cong \frac{1}{k_1} T = \frac{1}{k_1} \frac{2}{k\omega_н}.$$

Если управляющий сигнал имеет механическую природу (например, вращательное движение), то производная от этого сигнала достаточно просто получается с помощью тахогенератора переменного или постоянного тока. Тахогенератор представляет собой генератор постоянного или переменного тока с независимым возбуждением. Схема тахогенератора постоянного тока с обмоткой возбуждения приведена на фиг. 6. 10. Поток возбуждения остается постоянным и выходное напряжение $u$, снимаемое со щеток тахогенератора, пропорционально скорости вращения его вала $\omega_в$. При изменении направления вращения меняется полярность выходного напряжения. Тахогенератор скрепляется с валом, скорость поворота которого должна быть измерена. При пренебрежении переходными процессами в цепи якоря тахогенератора напряжение, снимаемое с его щеток, определяется формулой



Фиг. 6.10. Схема тахогенератора постоянного тока.

$$u = k\omega_в = k\frac{d\alpha}{dt}, \qquad (6.29)$$

где $\alpha$ — угол поворота вала тахогенератора.

Если нужно продифференцировать медленно изменяющийся электрический сигнал, то с помощью следящей системы малой мощности можно его преобразовать в угол поворота вала сервопривода системы, а затем этот вал через повышающий редуктор соединить с тахогенератором.

## 2. Интегрирование сигналов

На фиг. 6.11 приведена схема интегрирующего контура, выходное напряжение которого с определенной точностью пропор-

ционально сумме входного напряжения и его интеграла. Связь между выходным и входным напряжениями контура на фиг. 6.11 определяется следующим дифференциальным уравнением:

$$T_2 \frac{du_2}{dt} + u_2 = T_1 \frac{du_1}{dt} + u_1, \tag{6.30}$$

где

$$T_1 = r_1 c \quad \text{и} \quad T_2 = (r_1 + r_2) c.$$

Интегрируя (6.30) от 0 до $t$ при условии, что при $t=0$ $\dot{u}_1 = u_1 = 0$, получим

$$u_2 = k\left(u_1 + \frac{1}{T_1}\int_0^t u_1 dt\right) - \frac{1}{T_2}\int_0^t u_2 dt, \tag{6.31}$$

где

$$k = \frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$

Фиг. 6.11. Схема интегрирующего контура.

Как следует из выражения (6.31), рассматриваемый контур выполняет свои функции с погрешностью, пропорциональной интегралу от выходной величины. Эта погрешность тем меньше, чем больше $T_2$ по сравнению с $T_1$. Как и в дифференцирующем контуре на фиг. 6.6 погрешность уменьшается при уменьшении коэффициента $k$.

При использовании операционного усилителя, структурная схема которого приведена на фиг. 6.7, можно погрешность интегрирующего контура свести до ничтожной величины. Если в цепь обратной связи такого усилителя включить емкость, то напряжение на выходе с высокой степенью точности определяется выражением

$$u_2 = \int_0^t u_1 dt. \tag{6.32}$$

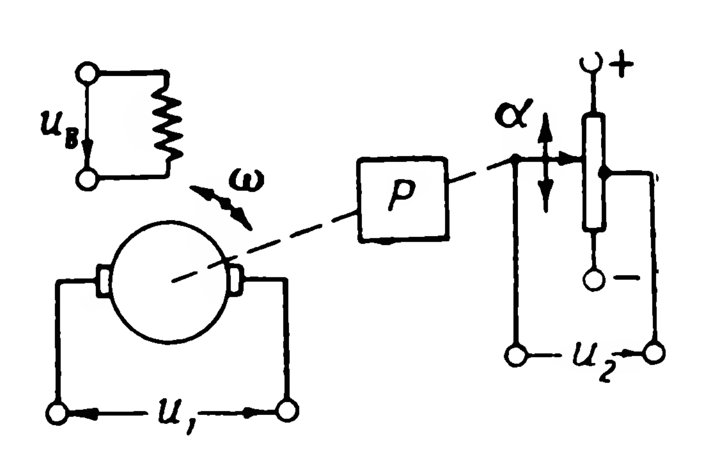
Диапазон работы интегрирующего усилителя ограничивается нелинейностью его характеристики. Если, кроме интеграла от входного сигнала, нужно на выходе получить и сам сигнал, то в цепь обратной связи усилителя должен быть включен дифференцирующий контур, схема которого приведена на фиг. 6.6.

Сигнал переменного тока интегрируется усилителем, охваченным звеном обратной связи, представляющим собой двойной Т-образный контур (см. фиг. 6.8). Эквивалентная комплексная переда-

точная функция такого операционного усилителя с высокой степенью точности может быть представлена в виде

$$W(j\Omega_1) = \frac{1}{j\Omega_1 T}. \qquad (6.33)$$

Для интегрирования медленно изменяющихся сигналов широко используются интегрирующие двигатели постоянного и переменного тока. Скорость вращения таких двигателей в возможно более широком диапазоне должна быть линейной функцией приложенного к ним напряжения сигнала. Для уменьшения зоны нечувствительности интегратора напряжение трогания двигателя должно быть как можно меньше. На фиг. 6.12 приведена принципиальная схема интегрирующего двигателя постоянного тока. Двигатель с независимым возбуждением вращается за счет напряжения сигнала $u_1$, которое должно быть проинтегрировано. Вал двигателя через редуктор перемещает щетку потенциометра, с которого снимается выходное напряжение $u_2$, приблизительно равное интегралу от входного напряжения $u_1$. Дифференциальное уравнение движения двигателя постоянного тока с независимым возбуждением имеет вид



Фиг. 6.12. Схема интегрирующего двигателя постоянного тока.

$$T_м \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{d\alpha}{dt} = k_д u_1, \qquad (6.34)$$

где $T_м$ — электромеханическая постоянная времени;
$k_д$ — коэффициент усиления двигателя;
$\alpha$ — угол поворота вала двигателя.

Если пренебречь постоянной времени двигателя, что допустимо при медленном изменении напряжения сигнала $u_1$, то угол поворота вала двигателя на основании (6.34) определится выражением

$$\alpha = k_д \int_0^t u_1 dt. \qquad (6.35)$$

Так как угол поворота вала двигателя и напряжение пропорциональны друг другу, то окончательно получим

$$u_2 = k \int_0^t u_1 dt. \qquad (6.36)$$

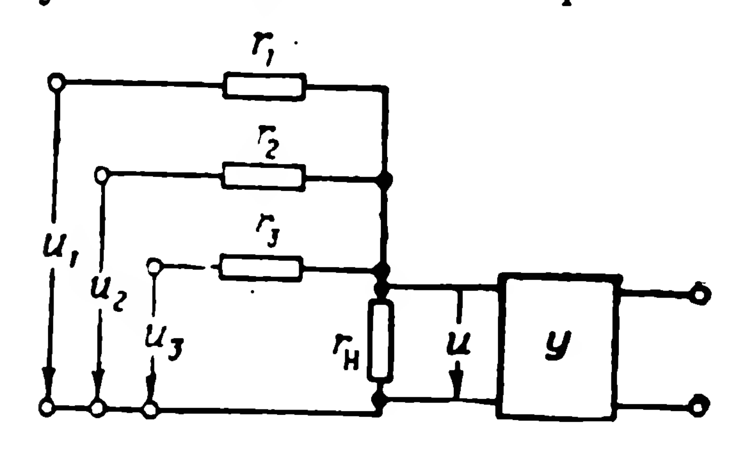
Диапазон работы интегратора с двигателем ограничивается углом поворота щетки выходного потенциометра.

Для интегрирования угловой скорости поворота снаряда относительно центра тяжести используются интегрирующие гироскопы, принцип устройства которых рассмотрен в гл. 4.

В этом параграфе рассмотрены физико-математические основы простейших дифференцирующих и интегрирующих устройств. В реальных системах, особенно при использовании управляющих сигналов в форме постоянного тока, для улучшения динамических свойств этих систем применяются довольно сложные комбинации простейших контуров. Такие комбинации дифференцирующих и интегрирующих контуров получили название корректирующих цепей. Сводка схем и характеристик корректирующих цепей приведены в табл. 2.5.

## § 6.4. СУММИРОВАНИЕ СИГНАЛОВ

Как указывалось в § 6.1, сигнал, передаваемый на исполнительный механизм рулевых органов снаряда, обычно является суммой сигналов от различных чувствительных элементов системы управления. Узел системы управления, обеспечивающий суммирование нескольких сигналов, называется сумматором. Эти сигналы в сумматоре складываются алгебраически, причем должна быть обеспечена возможность изменять в широких пределах пропорцию каждого из складываемых сигналов в общей сумме. Типы сумматоров зависят от физической природы сигналов. В электрических системах управления суммирование производится с помощью особых схем, а также магнитных усилителей.



Фиг. 6.13. Схема суммирования на сопротивлениях.

На фиг. 6.13. приведена схема суммирования на сопротивлениях. Схема позволяет суммировать несколько напряжений $u_1, \ldots, u_n$, каждое из которых пропорционально соответствующему сигналу.

Суммарное напряжение выделяется на сопротивлении $r_н$. Сопротивления $r_1, \ldots, r_n$ называются входными. Составив систему уравнений для этой схемы и решив их относительно выходного напряжения $u$, найдем

$$u = \sum_{i=1}^{n} k_i u_i, \qquad (6.37)$$

где

$$k_i = \frac{r_н}{r_i\left[1 + r_н\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}\right]}. \qquad (6.38)$$

Изменяя сопротивления $r_i$, можно получить нужный коэффициент при каждой из составляющих. Недостатком рассмотренной схемы является зависимость порции сигналов $k_i$ от всех сопротивлений схемы [см. формулу (6.38)]. Поэтому изменение любого из этих сопротивлений вызывает изменение всех коэффициентов $k_i$. Этот недостаток может быть практически устранен, если все входные сопротивления взять много больше сопротивления нагрузки. В этом случае $r_н\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i} \ll 1$ и выражение (6.38) могут быть представлены в виде

$$k_i \approx \frac{r_н}{r_i}. \qquad (6.39)$$

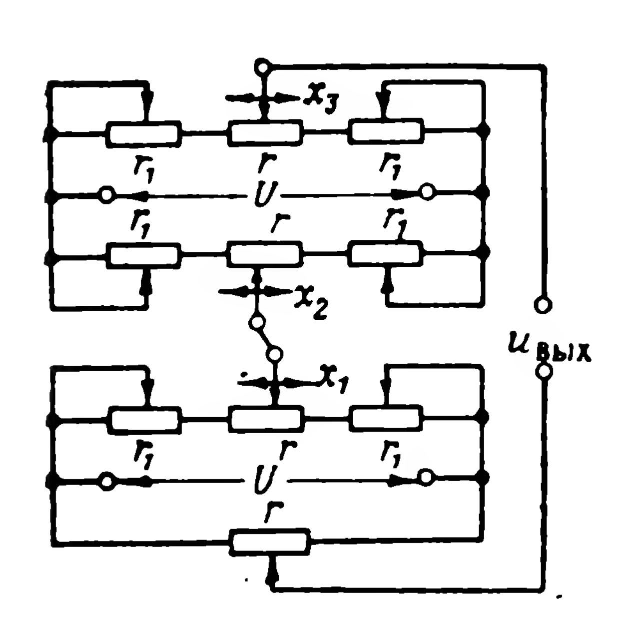
Нужно отметить, что обеспечение условия $r_н\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i} \ll 1$ связано со значительным ослаблением всех складываемых сигналов, а поэтому обычно после такого сумматора следует включить усилитель, как и показано на фиг. 6.13. Рассмотренная схема сложения электрических сигналов пригодна как для постоянного, так и для переменного тока.

При наличии в системе управления магнитного усилителя целесообразно использовать его и в качестве сумматора сигналов управления. В зависимости от количества сигналов, которые нужно суммировать, в магнитном усилителе должно быть предусмотрено такое же количество управляющих обмоток. Достоинством магнитного усилителя является возможность сложения сигналов, снимаемых с чувствительных элементов, имеющих электрическую связь между собой, так как все управляющие обмотки изолированы друг от друга. Недостатком сложения сигналов на магнитном усилителе является присущее этому устройству запаздывание в воспроизведении входных сигналов. Подробнее работа магнитного усилителя будет рассмотрена в следующей главе.

В системах управления снарядами иногда возникает необходимость сложения сигналов, представляющих собой механические перемещения каких-либо элементов датчиков. Датчики положения и угловой скорости снаряда (гироскопы), датчики скоростного напора, интегрирующие двигатели и т. п. дают выходные сигналы

в форме углового или линейного перемещения. Для сложения подобных сигналов применяются различные мостовые схемы.

В качестве примера на фиг. 6.14 приведена мостовая схема с двумя мостами для сложения трех сигналов. При необходимости суммировать большее число сигналов, нужно увеличить число мостов в схеме. Механические перемещения $x_1$, $x_2$ и $x_3$ передаются на щетки трех потенциометров $r$. Четвертый потенциометр со средней точкой служит для фиксации электрического нуля всей схемы. На данной схеме все потенциометры взяты одинаковыми. Реостаты $r_1$ служат для регулирования мостовой схемы. Смещение движков этих реостатов, включенных в цепь данного потенциометра, в одну сторону изменяет положение электрического нуля на потенциометре. Смещение движков реостатов $r_1$ в разные стороны изменяет порции складываемых сигналов. Если схема не требует указанной регулировки в процессе эксплуатации, то порции сигналов могут быть установлены изменением длины потенциометров $r$, а нули смещаются механическим перемещением движков относительно их средней точки и необходимость в реостатах $r_1$ отпадает. Напряжение на выходе схемы равно сумме напряжений, снимаемых каждым из движков относительно средней точки нижнего потенциометра:




Фиг. 6.14. Схема суммирования на мостовых схемах.

$$u_{\text{вых}} = u_1 + u_2 + u_3. \tag{6.40}$$

Каждое из слагаемых напряжений в свою очередь определяется формулой

$$u_i = \frac{rU}{r + 2\alpha_i r_1}\left[\frac{x_i}{l} + 2\frac{r_1}{r}\beta_i\right], \tag{6.41}$$

где $x_i$ — перемещение движка $i$-го потенциометра относительно средней точки;

$l$ — полная линейная или угловая длина потенциометра;

$\alpha_i$ — часть сопротивления реостата $r_1$, введенная в схему при перемещении движков в противоположные стороны;

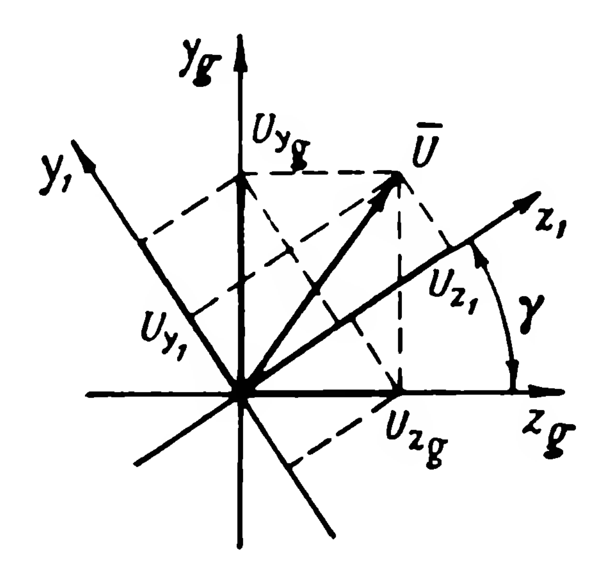
$\beta_i$ — часть сопротивления реостата $r_1$, введенная в схему при перемещении движков в одну сторону.

Коэффициент $\alpha_i$ является существенно положительной величиной, а коэффициент $\beta_i$ в зависимости от направления смещения движков может быть положительным или отрицательным. Формула (6.41) показывает, что, изменяя значение $\alpha_i$, можно в широком диапазоне изменять порцию каждого из сигналов. Ве-

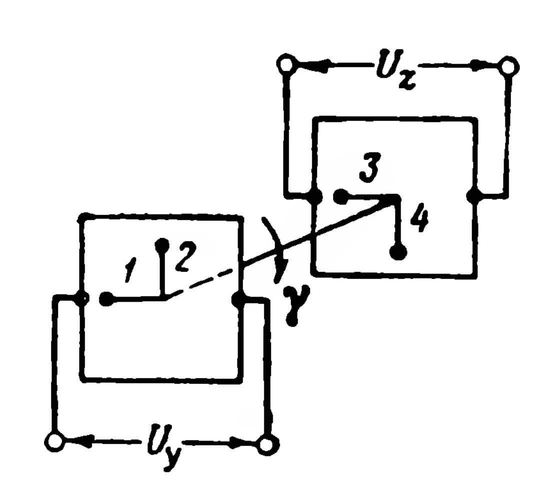
личина и знак смещения нуля потенциометра зависят от коэффициента $\beta_i$. Это смещение определяется напряжением, снимаемым с потенциометра при нахождении его движка в средней точке ($x_i=0$).

## § 6.5. ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ КООРДИНАТ

В некоторых случаях возникает необходимость преобразования сигналов управления, полученных в одной системе координат, в сигналы управления, соответствующие положению снаряда в другой системе координат. В качестве примера могут служить снаряды, наводимые по радиолучу. Сигнал управления, получаю-




Фиг. 6.15. К проекции вектора в двух системах координат.




Фиг. 6.16. Схема преобразователя координат.
*1, 2, 3* и *4* — щетки.

щийся на борту снаряда, определяется положением центра тяжести снаряда относительно системы координат, связанной с радиолокатором пункта управления. При повороте снаряда относительно продольной оси сигналы управления должны изменяться в функции угла крена.

На фиг. 6.15 приведено взаимное расположение координат: $y_g$, $z_g$ — земные оси, связанные с радиолокатором пункта управления и $y_1$, $z_1$ — оси, связанные со снарядом. Угол $\gamma$ — угол крена снаряда. Вектор рассогласования центра тяжести снаряда относительно оси равносигнальной зоны изображен соответствующим ему вектором напряжения управляющего сигнала $\bar{U}$. На снаряде это напряжение измеряется в виде проекций вектора напряжения на оси земной системы координат. Для управления снарядом необходимо перевести их в систему $y_1$, $z_1$. Связь между проекциями вектора в обеих системах определяется соотношениями

$$\left.\begin{aligned} u_{y_1} &= u_{yg}\cos\gamma - u_{zg}\sin\gamma, \\ u_{z_1} &= u_{zg}\cos\gamma + u_{yg}\sin\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (6.42)$$

Для реализации преобразования сигналов, определяемого выражениями (6.42), можно воспользоваться синусно-косинусными потенциометрами (фиг. 6.16). Такие потенциометры чаще всего выполняют в виде керамической пластины, покрытой тонким слоем металла. Для уменьшения трения щеток металлизированная поверхность должна быть очень гладкой. Чтобы выполнить преобразование сигналов по формулам (6.42), необходимо два потенциометра с двумя щетками на каждом. Пластины потенциометров закрепляют на корпусе снаряда, а щетки — на оси рамки позиционного гироскопа. Сигналы $u_{yg}$ и $u_{zg}$, получаемые с чувствительного элемента снаряда, подводятся к потенциометрам, как показано на фиг. 6.16. При повороте снаряда относительно продольной оси на угол крена со средних точек потенциометров и с каждой из щеток снимаются сигналы:

щетка *1* — $U_{yg} \cos \gamma$,
щетка *2* — $U_{yg} \sin \gamma$,
щетка *3* — $U_{zg} \cos \gamma$,
щетка *4* — $U_{zg} \sin \gamma$.

Суммируя эти сигналы, получим преобразованные сигналы управления $u_{y1}$ и $u_{z1}$.

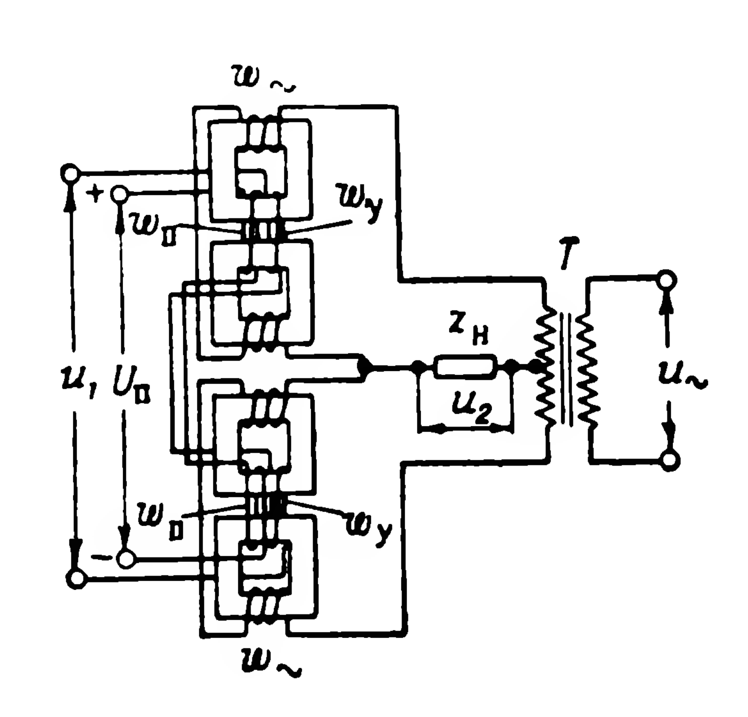
## *Глава VII*

# УСИЛИТЕЛИ И ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ОРГАНЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СНАРЯДАМИ

## § 7.1. МАГНИТНЫЕ УСИЛИТЕЛИ

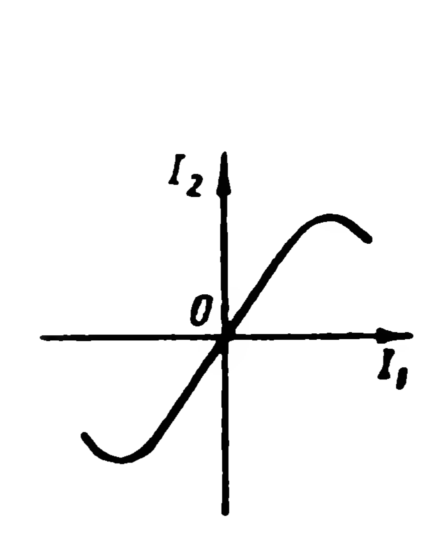
Магнитные усилители вследствие своей высокой надежности находят широкое применение в системах управления снарядами. Входной (управляющий) сигнал вводится в магнитный усилитель в форме постоянного тока, а выходной, усиленный сигнал получается в форме переменного тока. В настоящее время применяют три схемы магнитных усилителей: дифференциальную, мостовую и трансформаторную.

На фиг. 7. 1 приведена схема дифференциального усилителя. Сигнал подводится к управляющим обмоткам $w_у$, охватывающим два сердечника. Эти же сердечники охвачены подмагничивающими (или смещающими) обмотками $w_п$. Подмагничивающие и управляющие обмотки включены так, что их намагничивающие силы при данной полярности управляющего сигнала в одной паре ферромагнитных сердечников складываются, а в другой — вычитаются. Выходной сигнал $u_2$ снимается с сопротивления нагрузки $z_н$, включенного между средней точкой питающего трансформатора $T$ и обмотками переменного тока $w_\sim$ обеих пар сердечников. При $u_1=0$ обе пары сердечников усилителя одинаково подмагничены и индуктивность обмоток переменного тока также одинакова. Токи в этих обмотках равны и напряжение на сопротивлении нагрузки равно нулю. При $u_1 \neq 0$ в одной паре сердечников подмагничивание усиливается, а во второй уменьшается. Через сопротивление нагрузки потечет ток. При изменении знака входного напряжения $u_1$ фаза выходного напряжения $u_2$ изменится на 180°.

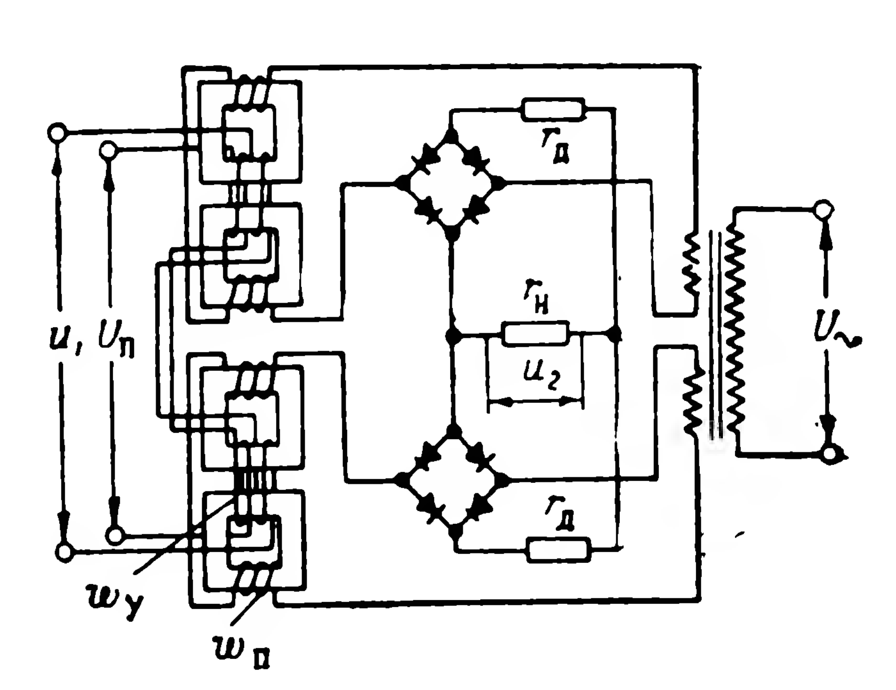


Фиг. 7.1. Схема дифференциального магнитного усилителя.

На фиг. 7.2. приведена характеристика магнитного усилителя, представляющая собой зависимость тока нагрузки от тока управления. Токи подмагничивания выбираются так, чтобы характеристика усилителя имела бы наибольшую крутизну. Эта крутизна определяет коэффициент усиления по току $k_i = dI_2/dI_1$. В тех случаях, когда элемент системы управления, получающий сигнал с выхода магнитного усилителя, должен питаться постоянным током, применяется схема с выпрямлением, представленная на фиг. 7.3. Недостатком этой схемы является наличие добавочных




Фиг. 7.2. Характеристика магнитного усилителя.




Фиг. 7.3. Схема дифференциального магнитного усилителя с выходом на постоянном токе.

сопротивлений $r_д$, снижающих коэффициент усиления по мощности. Эти сопротивления в схеме на фиг. 7.3 необходимы, так как при их отсутствии выпрямляющие мостики сильно шунтируют сопротивление нагрузки и в нем будет протекать лишь малая часть выпрямленного тока. Для исключения недостатка схемы на фиг. 7.3, связанного с наличием сопротивлений $r_д$, нужно, чтобы элемент, питаемый от усилителя, имел две одинаковые и изолированные обмотки. Тогда вычитание выходных токов можно заменить вычитанием магнитных потоков в питаемом элементе и необходимость в сопротивлениях $r_д$ отпадет.

Дифференциальная схема магнитного усилителя наиболее удобна для введения положительной обратной связи по току, в результате чего увеличивается коэффициент усиления. Для осуществления обратной связи надо выпрямить переменный ток нагрузки и пропустить его через обмотку обратной связи $w_{о.с}$, наматываемую на те же сердечники, что и управляющая. Этот ток дополнительно подмагничивает сердечник, в результате чего при меньшем значении тока управления получается то же самое значение тока нагрузки.

Рассмотрим динамические свойства магнитного усилителя. Так как число витков и, следовательно, индуктивность обмотки пере-

менного тока малы, то можно считать, что ток на выходе усилителя изменяется пропорционально току управления практически без запаздывания. Ток же управления $i_1$ из-за большой индуктивности обмотки управления всегда отстает в своем изменении по отношению к напряжению $u_1$. Связь между током обмотки управления и напряжением сигнала определяется уравнением

$$L_у \frac{di_1}{dt} + r_у i_1 = u_1, \qquad (7.1)$$

где $L_у$, $r_у$ — индуктивность и сопротивление обмотки управления.

Току $i_1$ пропорционален выходной ток $I_2$, а следовательно, и выходное напряжение

$$u_2 = I_2 r_н = k_i r_н i_1. \qquad (7.2)$$

Подставляя в уравнение (7.1) значение тока $i_1$ из (7.2), получим

$$T \frac{du_2}{dt} + u_2 = k u_1, \qquad (7.3)$$

где $T = \frac{L_у}{r_у}$ — постоянная времени магнитного усилителя

$$k = r_н k_i \frac{1}{r_у}.$$

Решение уравнения (7.3) при нулевых начальных условиях и $u_1 = \text{const}$ имеет вид

$$u_2 = k u_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right). \qquad (7.4)$$

Таким образом, при появлении на входе усилителя скачка напряжения $u_1$ выходное напряжение $u_2$ изменяется по экспоненциальному закону с постоянной времени $T$. Постоянная времени может быть выражена через коэффициент усиления по мощности

$$T = \frac{k_W}{4f}, \qquad (7.5)$$

где $k_W$ — коэффициент усиления по мощности;

$f$ — частота переменного тока в *гц*.

Выражение (7.5) показывает, что при заданном коэффициенте усиления по мощности постоянная времени магнитного усилителя и, следовательно, запаздывание, вносимое им в процесс передачи сигналов, могут быть уменьшены только за счет увеличения частоты питающего переменного тока. Магнитный усилитель мо-

жет иметь несколько обмоток управления. Простота суммирования сигналов путем размещения нескольких управляющих обмоток является одним из основных преимуществ магнитного усилителя по сравнению с электронными усилителями.

## § 7.2. ЭЛЕКТРОННЫЕ И ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЕ УСИЛИТЕЛИ

### 1. Электронные усилители

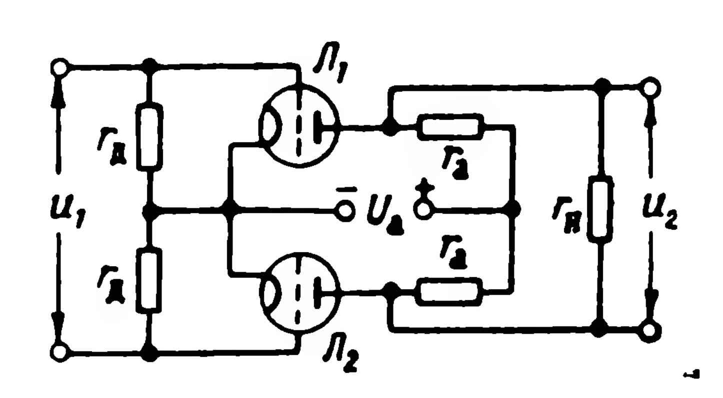
Электронные усилители, применяемые в схемах управления, так же как и магнитные усилители, рассмотренные выше, должны иметь нечетную характеристику зависимости выходного напряжения от входного. Этому требованию удовлетворяют так называемые балансные (двухтактные) схемы. Примером таких схем может служить мостовая схема усилителя постоянного тока, приведенная на фиг. 7.4. Лампы $Л_1$ и $Л_2$ и сопротивления $r_a$ составляют мост, в одну из диагоналей которого включен источник анодного напряжения $U_a$, а в другую — сопротивление нагрузки $r_н$. Если параметры ламп одинаковы, а напряжение на входе равно нулю, то токи ламп равны и напряжение на выходе также равно нулю. При появлении напряжения входа сетка одной лампы оказывается под положительным, а другая под отрицательным потенциалами. Токи ламп станут различны, равновесие моста нарушается и появится ток в нагрузке. При изменении полярности напряжения входа изменяется и полярность напряжения на выходе.

Балансные схемы обладают повышенной стабильностью в отношении «дрейфа» нуля. «Дрейф» нуля усилителя возникает за счет изменения напряжения анодного питания, тока накала, параметров ламп при изменении температуры и т. п. В балансной схеме «дрейф» от внешних причин, действующих на обе лампы одинаково, будет скомпенсирован, так как выходное напряжение определяется разностью анодных токов ламп. Из-за отличия характеристик ламп друг от друга внешние причины будут все-таки вызывать некоторый «дрейф» нуля. «Дрейф» нуля усилителя эквивалентен ложному сигналу на входе усилителя и является серьезным недостатком усилителей постоянного тока. Для его уменьшения можно использовать отрицательную обратную связь, хотя это приводит к снижению коэффициента усиления.

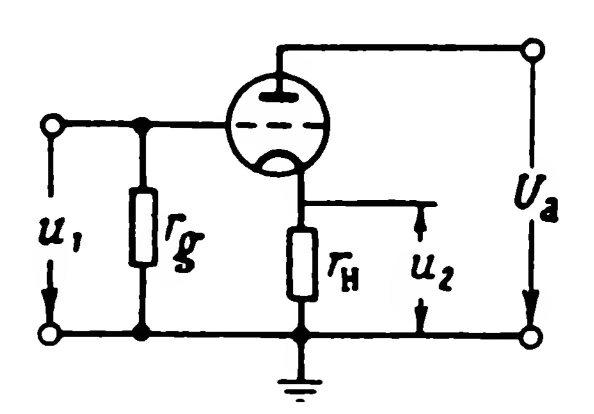
Примером усилителя с глубокой обратной связью является катодный повторитель, в котором сопротивление нагрузки включается в цепь катода (фиг. 7.5). Коэффициент усиления по напряжению катодных повторителей всегда меньше единицы, а усиление по току и мощности может быть сделано довольно большим. Поэтому они в основном используются как стабильные усилители мощности. Характеристика катодного повторителя, приведенного

на фиг. 7.5, является четной. Для получения нечетной характеристики применяют балансную схему катодного повторителя.

Для усиления напряжения переменного тока, фаза которого изменяется на 180° при изменении знака управляющего сигнала, используются фазочувствительные электронные усилители переменного тока. С выхода усилителя снимается напряжение постоянного тока, величина которого пропорциональна величине входного напряжения переменного тока, а полярность определяется фазой входного напряжения.

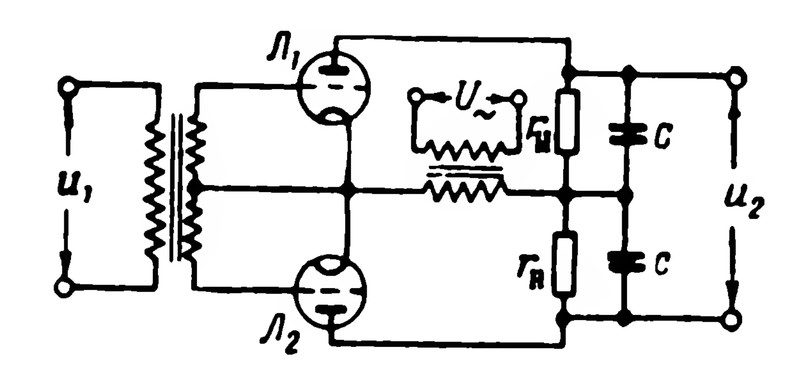



Фиг. 7.4. Мостовая схема усилителя постоянного тока.

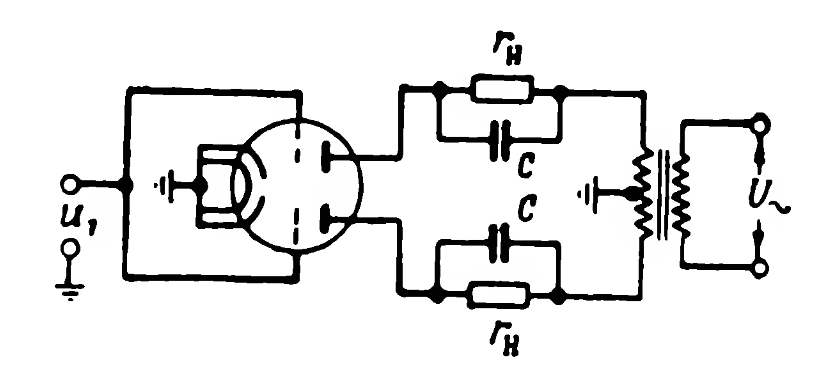



Фиг. 7.5. Схема катодного повторителя.

На фиг. 7.6 приведена схема фазочувствительного усилителя. При отсутствии входного сигнала ($u_1=0$) в анодных цепях ламп протекают пульсирующие токи, средние значения которых равны.




Фиг. 7.6. Схема фазочувствительного усилителя с питанием анодов в фазе.




Фиг. 7.7. Схема фазочувствительного усилителя с питанием анодов в противофазе.

Токи протекают только при положительном напряжении на анодах ламп. Вследствие равенства средних значений анодных токов среднее значение напряжения на сопротивлении нагрузки равно нулю. Фазы напряжений на сетках ламп противоположны. Если фаза входного сигнала на сетке одной из ламп совпадает с фазой напряжения анода, то сеточное напряжение другой лампы будет находиться в противофазе с анодным напряжением. Поэтому среднее значение тока первой лампы возрастает, а второй — уменьшится, появится разность средних значений анодных токов и выходное напряжение будет пропорционально их разности. При увеличении входного напряжения разность токов увеличится, а следовательно, увеличится и напряжение на выходе. Входной сигнал,

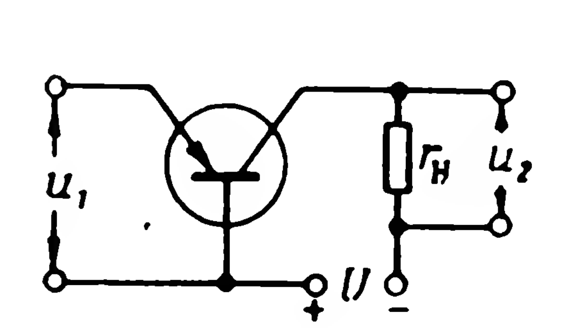
подаваемый на фазочувствительный усилитель, должен быть получен в схеме, имеющей тот же источник питания, что и усилитель. Только в этом случае будут соблюдаться необходимые соотношения фаз сеток и анодов ламп.

На фиг. 7.7 приведена другая схема фазочувствительного усилителя. В отличие от схемы, изображенной на фиг. 7.6, в ней фазы напряжений на сетках обеих ламп одинаковы, а фазы напряжений на анодах противоположны. Принцип действия такого усилителя будет таким же, как и в схеме, представленной на фиг. 7.6.

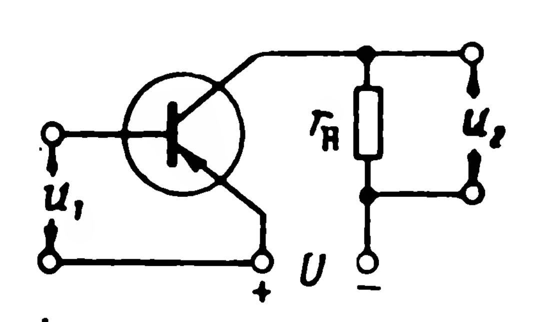
Динамические свойства электронных усилителей очень высоки и в системе управления снарядом они могут считаться безынерционными элементами.

## 2. Усилители на полупроводниках

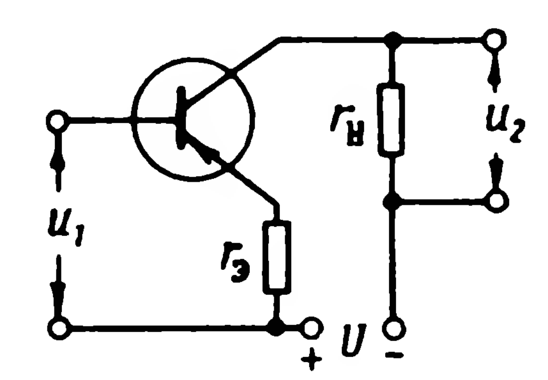
Полупроводниковые триоды могут включаться в усилительные схемы низкой частоты тремя различными способами с точки зрения места введения входного и снятия выходного напряжения. На фиг. 7.8 приведена схема усилителя с общей базой. Такие уси-



Фиг. 7.8. Схема усилителя с общей базой.



Фиг. 7.9. Схема усилителя с общим эмиттером.

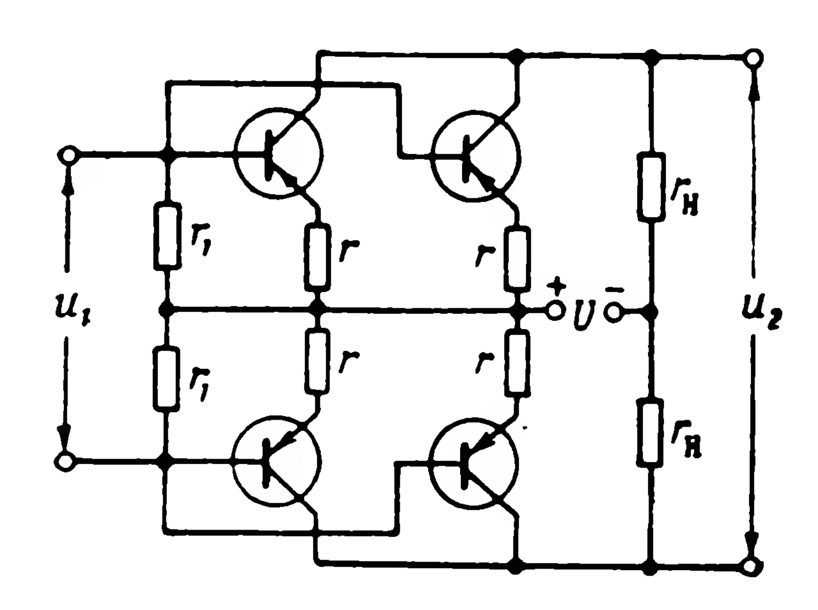


Фиг. 7.10. Схема усилителя с общим коллектором.

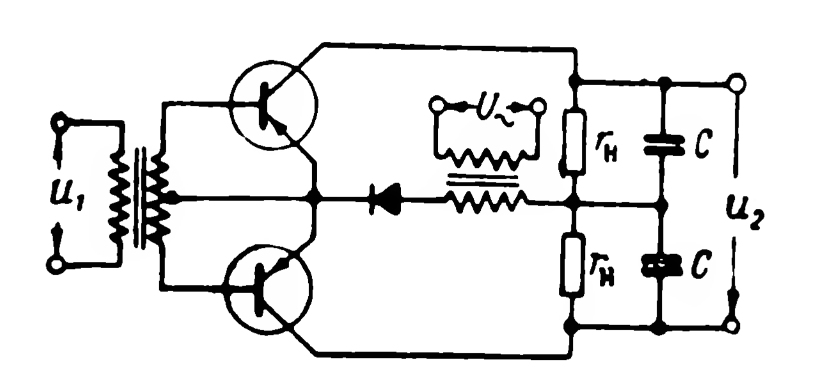
лители обладают входным сопротивлением, много меньшим выходного. Они имеют коэффициент усиления по току, равный единице, но большой коэффициент усиления по напряжению. Включение по схеме с общим эмиттером (фиг. 7.9) более выгодно, так как в этом случае усиление по току и по напряжению примерно одинаково и достаточно велико. Достоинством схемы является повышение входного сопротивления и снижение выходного сопротивления. Схема с общим коллектором (фиг. 7.10) аналогична схеме катодного повторителя. Усиление схемы по напряжению несколько меньше единицы. Входное сопротивление сильно зависит от сопротивления $r_э$ в цепи эмиттера и может меняться от сотен ом до долей ома. Выходное сопротивление каскада зависит от внутреннего сопротивления источника сигнала. Достоинством схемы является малая зависимость коэффициента усиления от коле-

баний напряжения источников питания и изменения параметров триода.

«Дрейф» нуля у кристаллических усилителей больше, чем у ламповых. Для стабилизации параметров усилителей вводят отрицательные связи, в результате чего снижается коэффициент усиления. На фиг. 7.11 приведена схема мостового усилителя. Схема фазочувствительного усилителя на кристаллических триодах приведена на фиг. 7.12. Напряжение сигнала поступает на базы в




Фиг. 7.11. Мостовая схема усилителя на кристаллических триодах.




Фиг. 7.12. Схема фазочувствительного усилителя на кристаллических триодах.

противофазе, а коллекторы питаются в фазе. Включение выпрямителя позволяет исключить прохождение прямого тока через триод. При отсутствии входного сигнала токи в сопротивлениях нагрузки равны нулю. Если напряжение на входе не равно нулю, то на одном триоде напряжение базы находится в фазе с питающим напряжением, а на другом — в противофазе. При этом в цепи первого коллектора появятся импульсы тока, а через другой коллектор ток не пойдет. Среднее значение тока будет пропорционально величине напряжения на входе. При изменении фазы входного напряжения на 180° ток пойдет через второй коллектор, что обусловит изменение полярности выходного напряжения.

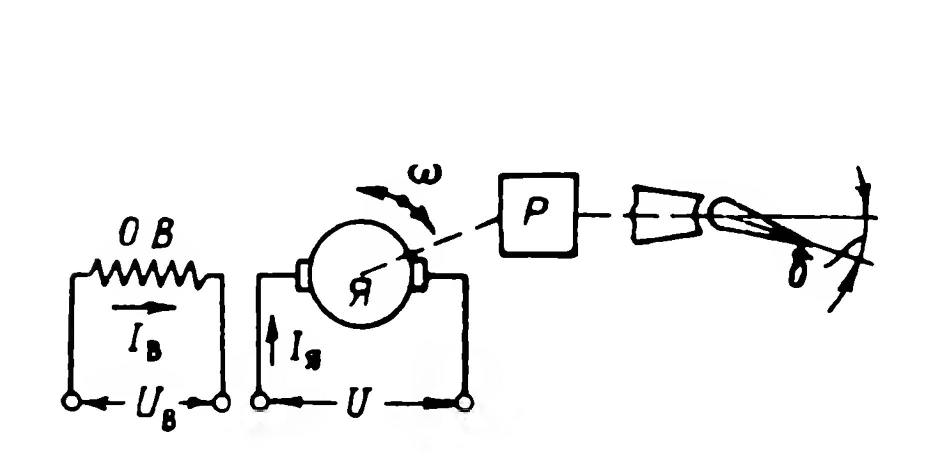
## § 7.3. ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ С ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯМИ

После требуемого преобразования управляющих сигналов и усиления их по мощности эти сигналы воздействуют на исполнительные механизмы бортовой системы управления снаряда. Исполнительные механизмы обеспечивают перемещение органов управления. На снарядах обычно используются три вида исполнительных механизмов: с электро-, гидро- и пневмодвигателями. В последнее время появились исполнительные механизмы, работающие на пороховых газах. В настоящем параграфе рассматриваются исполнительные механизмы всех типов, кроме пороховых.

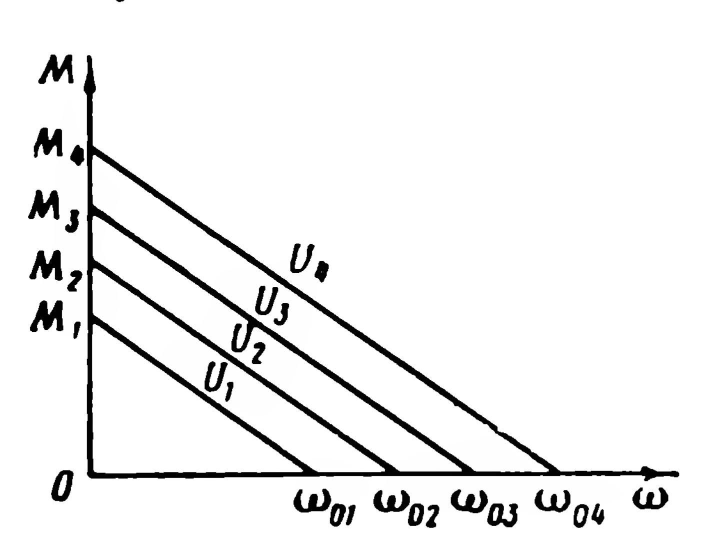
Для целей привода рулевых органов применяются электродвигатели постоянного тока с независимым возбуждением и двухфазные асинхронные двигатели переменного тока. Применение электродвигателей удобно как с точки зрения подвода энергии к ним, так и с точки зрения эксплуатации системы управления снарядом.

## 1. Исполнительный механизм с двигателем постоянного тока независимого возбуждения

Принципиальная схема исполнительного механизма приведена на фиг. 7.13. Якорь двигателя *Я* через редуктор *Р* приводит в движение рулевой орган. В обмотке возбуждения *ОВ* течет по-




Фиг. 7.13. Принципиальная схема исполнительного механизма с двигателем постоянного тока.




Фиг. 7.14. Внешние характеристики двигателя постоянного тока с независимым возбуждением

стоянный по величине ток $I_в$. Управление скоростью вращения осуществляется изменением напряжения $U$, подводимого к якорю *Я* двигателя от какого-либо усилителя. Статические характеристики двигателя определяются его внешней характеристикой, т. е. зависимостью вращающего момента от скорости вращения. Семейство таких характеристик для различных значений приложенного к якорю напряжения приведено на фиг. 7.14. Эти характеристики не учитывают влияния реакции якоря, а поэтому носят приближенный характер.

Рассмотрим динамические характеристики привода с двигателем независимого возбуждения. На основании второго закона Ньютона уравнение движения якоря двигателя должно быть записано в форме

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_д + M_н, \tag{7.6}$$

где $J$ — момент инерции подвижных частей;
$M_д$ — момент, развиваемый двигателем;
$M_н$ — момент нагрузки.

Основной составляющей момента инерции является момент инерций якоря, так как момент инерции остальных подвижных частей (руля) приводится к валу двигателя с коэффициентом, обратно пропорциональным квадрату передаточного числа редуктора, которое обычно колеблется в пределах 200—1000. Момент нагрузки складывается из момента трения в редукторе, демпфирующего и шарнирного моментов руля. Для уменьшения шарнирного момента подвеску руля выполняют таким образом, чтобы центр давления аэродинамических сил, действующих на руль, проходил как можно ближе к оси вращения. Демпфирующий момент и момент трения обычно бывают меньше шарнирного момента. Исходя из этих соображений, для упрощения дальнейшего изложения моментом нагрузки в уравнении (7.6) будем пренебрегать. Вращающий момент $M_д$, развиваемый двигателем с независимым возбуждением, определяется выражением

$$M_д = k\Phi I_я, \tag{7.7}$$

где $\Phi$ — магнитный поток обмотки возбуждения;
$I_я$ — ток якоря.

Для выяснения зависимости тока якоря $I_я$ от управляющего напряжения $U$ и параметров движения рассмотрим уравнение второго закона Кирхгофа для цепи якоря двигателя, написанное без учета небольшой по величине индуктивности якоря:

$$I_я r_я + E = U, \tag{7.8}$$

где $r_я$ — сопротивление обмотки якоря;
$E$ — противо-эдс якоря, обусловленная его вращением в магнитном поле обмотки возбуждения.

Противо-эдс якоря определяется формулой

$$E = c\omega\Phi, \tag{7.9}$$

где $\omega$ — скорость вращения якоря;
$c$ — коэффициент, определяемый конструктивными параметрами двигателя.

Подставляя на основании (7.8) и (7.9) значения $I_я$ и $E$ в формулу (7.7), получим

$$M_д = \frac{k_i}{r_я} U - \frac{k_i k_E}{r_я} \omega, \tag{7.10}$$

где

$$k_i = k\Phi \quad и \quad k_E = c\Phi.$$

Уравнение (7.10) может быть записано и в другой форме:

$$M_д = M_к - \frac{M_к}{\omega_0} \omega, \tag{7.11}$$

где

$M_к = \frac{k_i U}{r_я}$ — пусковой момент, развиваемый двигателем при неподвижном якоре;

$\omega_0 = \frac{U}{k_E}$ — скорость идеального холостого хода, т. е. скорость двигателя при отсутствии каких-либо нагрузочных моментов.

Уравнение (7.11) является аналитическим выражением семейства внешних характеристик, приведенных на фиг. 7.14. Подставляя значение $M_д$ из формулы (7.11) в формулу (7.6), положив $M_п = 0$ и выполнив элементарные преобразования, найдем уравнение движения якоря двигателя

$$T_д \frac{d\omega}{dt} + \omega = k_д U, \tag{7.12}$$

где

$T_д = \frac{J \omega_0}{M_к}$ — постоянная времени двигателя.

$k_д = \frac{1}{k_E}$ — коэффициент усиления двигателя.

Для двигателей небольшой мощности значение постоянной времени составляет несколько сотых долей секунды.

Выходной величиной исполнительного механизма является угол поворота рулевого органа. Связь между скоростями вращения якоря двигателя и руля очевидна:

$$\omega = i \frac{d\delta}{dt}, \tag{7.13}$$

где $i$ — передаточное отношение редуктора.

Подставляя значение $\omega$, определяемое соотношением (7.13), в формулу (7.12), получим дифференциальное уравнение всего привода

$$T_п \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{d\delta}{dt} = k_п U, \tag{7.14}$$

где $T_п = T_д$ — постоянная времени привода;

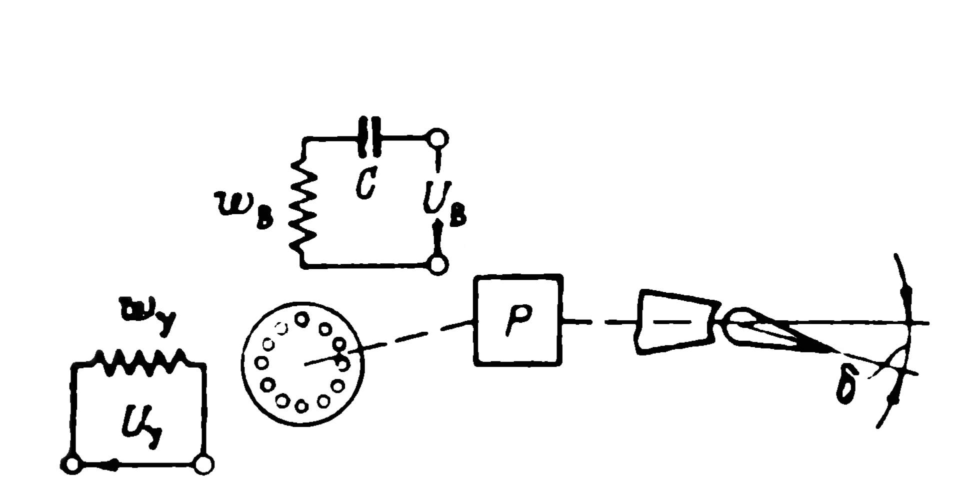
$k_п = \frac{k_д}{i}$ — коэффициент усиления привода.

На основании уравнения (7.14) находим передаточную функцию привода

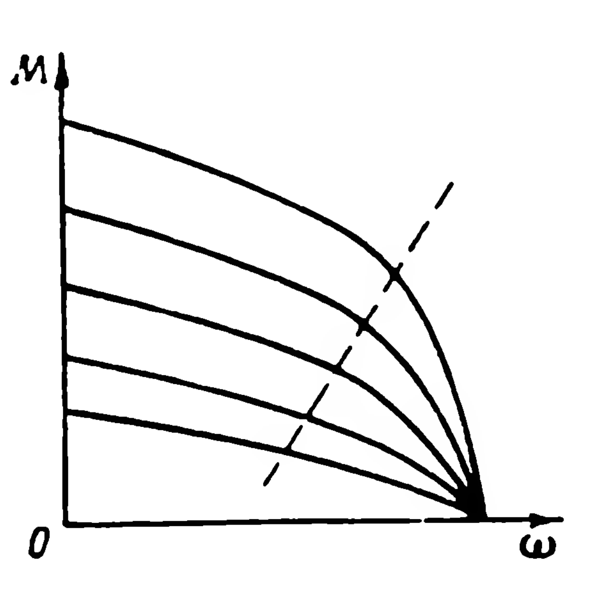
$$W_п(p) = \frac{k_п}{(T_п p + 1) p}. \tag{7.15}$$

## 2. Исполнительный механизм с двухфазным асинхронным двигателем переменного тока

В качестве привода в системах управления находят применение двухфазные асинхронные двигатели небольшой мощности. Конструктивно такие двигатели выполняются с короткозамкнутым или с полым тонкостенным ротором. Принципиальная схема




Фиг. 7.15. Принципиальная схема исполнительного механизма с двухфазным асинхронным двигателем.




Фиг. 7.16. Внешние характеристики двухфазного асинхронного двигателя.

исполнительного механизма с двухфазным двигателем приведена на фиг. 7.15. На статоре двигателя размещены две обмотки — возбуждения и управляющая. Обмотка возбуждения питается от фазосдвигающей схемы или через конденсатор *с* непосредственно от сети переменного тока. К управляющей обмотке $w_у$ подводится напряжение управления. Величина этого напряжения и знак его фазы изменяются соответственно величине и знаку сигнала управления. Таким образом, токи в обеих обмотках сдвинуты относительно друг друга по фазе на 90°. Кроме того, оси обмоток в пространстве также расположены перпендикулярно. При этих условиях обмотки статора создают вращающееся магнитное поле. Это поле наводит токи в короткозамкнутой обмотке или в полом роторе. Взаимодействие поля наведенных токов с вращающимся полем создает вращающий момент двигателя. Изменение фазы переменного тока управляющей обмотки на 180° приводит к перемене направления вращения двигателя.

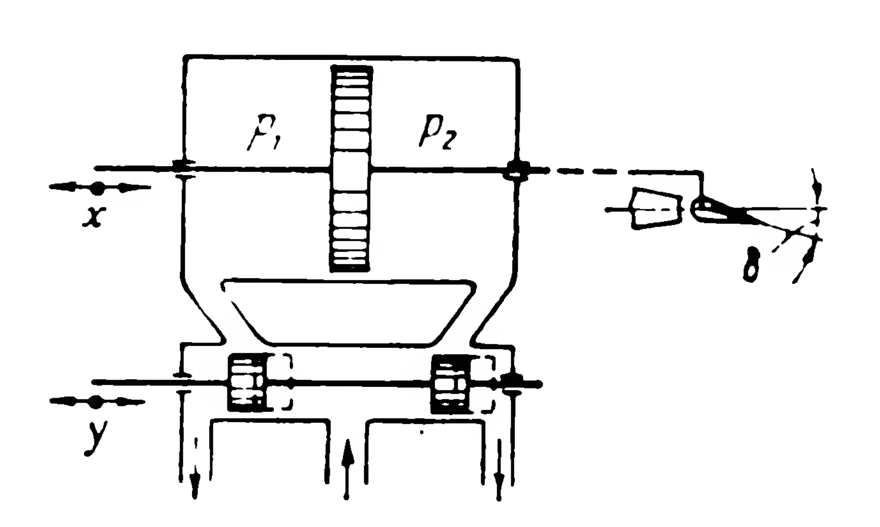
На фиг. 7.16 представлено семейство внешних характеристик двухфазного двигателя при различных значениях управляющего напряжения $U_у$. В достаточно большом диапазоне угловых скоростей зависимость момента и скорости вращения линейна, как и для двигателя постоянного тока.

Уравнение исполнительного механизма при тех же допущениях (малые моменты нагрузки и трения) будет, очевидно, иметь тот же вид, что и уравнение (7.14) механизма с двигателем постоянного тока.

## § 7.4. ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ С ГИДРОДВИГАТЕЛЯМИ

Гидравлические двигатели применяются в системах управления самолетами и снарядами. Одним из преимуществ гидравлического привода можно назвать значительно большие усилия на единицу подвижных масс, развиваемые гидродвигателями в сравнении с электродвигателями. Последнее обстоятельство в свою очередь обусловливает малую инерционность (высокое быстродействие гидродвигателей).

Конструкции гидравлических двигателей разнообразны, но чаще всего применяются двигатели поршневого типа с золотниковым распределителем. На фиг. 7.17 приведена принципиальная схема исполнительного механизма с гидравлическим двигателем. Рабочая жидкость нагнетается насосом в центральный канал золотниковой коробки и при смещении золотника из среднего положения поступает в соответствующую полость рабочего цилиндра. Вторая полость рабочего цилиндра при этом через один из боковых каналов золотниковой гильзы соединяется со сливным баком. При возникновении перепада давлений между полостями цилиндра поршень начинает перемещаться, поворачивая руль снаряда.




Фиг. 7.17. Принципиальная схема исполнительного механизма с гидродвигателем.

Составим уравнения движения поршня. Пусть золотник переместился из нейтрального положения на расстояние $y$ вправо. Тогда жидкость через образовавшуюся щель будет поступать в полость справа от поршня, а из полости слева от поршня будет вытекать. Объемные расходы $Q_1$ и $Q_2$ жидкости через входное и выходное отверстия золотника в единицу времени определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \xi b y \sqrt{p_1 - p_0}\,; \\ Q_2 &= \xi b y \sqrt{p_0 - p_2}\,, \end{aligned}\right\} \qquad (7.16)$$

где $\xi$ — коэффициент расхода;
$b$ — ширина окна на входе и на выходе *;
$p_1$ и $p_2$ — давление масла на входе и на выходе;
$p_0$ — давление масла в полостях цилиндра;
$y$ — перемещение золотника.

* Форма окна золотника принята прямоугольной. Ширина буртика золотника равна ширине окна.

Условие неразрывности потока жидкости позволяет написать равенство

$$Q_1 = Q_2 = Q. \tag{7.17}$$

Из равенства расходов $Q_1$ и $Q_2$ вытекает равенство правых частей уравнений (7. 16):

$$p_1 - p_0 = p_0 - p_2 \text{ или } p_0 = \frac{p_1 + p_2}{2}. \tag{7.18}$$

Подставив значение $p_0$ в первое из уравнений (7.16), получим

$$Q = \xi b y \sqrt{\frac{p_1 - p_2}{2}}. \tag{7.19}$$

Объемный расход в единицу времени через окно золотника равен объемному расходу в полости рабочего цилиндра при перемещении поршня. Это равенство выражается следующей очевидной формулой:

$$Q = S\frac{dx}{dt}, \tag{7.20}$$

где $S$ — площадь поршня;
$x$ — перемещение поршня.

Подставляя в формулу (7. 20) значение расхода в единицу времени из (7. 19), получим окончательное выражение характеристики гидродвигателя:

$$\frac{dx}{dt} = k_{д} y, \tag{7.21}$$

где $k_{д} = \frac{\xi b \sqrt{p_1 - p_2}}{\sqrt{2}\, S}$ — коэффициент усиления гидродвигателя.

Угловое перемещение рулевого органа отличается от линейного перемещения поршня только передаточным числом $i$, зависящим от геометрических соотношений в системе преобразования этих движений. Поэтому уравнение для всего гидропривода имеет вид

$$\frac{d\delta}{dt} = k_{п} y, \tag{7.22}$$

где

$$k_{п} = \frac{k_{д}}{i}.$$

Уравнение (7. 22) является аналитическим выражением статической характеристики гидропривода. Эта характеристика с учетом ограничения хода золотника шириной окна приведена на фиг. 7. 18 (пунктир). При полном открытии окон золотника устанавливается постоянная (максимально возможная) скорость движения поршня. Реальная характеристика имеет «мертвую зону», так как буртики золотника выполняются несколько шире окон. Эта характеристика показана на фиг. 7. 18 сплошной линией. Такая конструкция обусловлена сложностью наладки золотника при равных размерах окон и буртиков. В некоторых случаях буртики золотника выполняются у́же окон. При этом «мертвая зона» отсутствует, но все время расходуется жидкость.

Передаточная функция гидропривода на основании уравнения (7. 22) имеет вид

$$W_{п}(p) = \frac{k_{п}}{p}. \qquad (7.23)$$

Заметим, что при выводе уравнения (7. 22) были сделаны следующие допущения: не учитывалась инерция жидкости и всех подвижных частей, соединенных с поршнем, а также внешние силы, приложенные к штоку — шарнирный момент и силы трения.

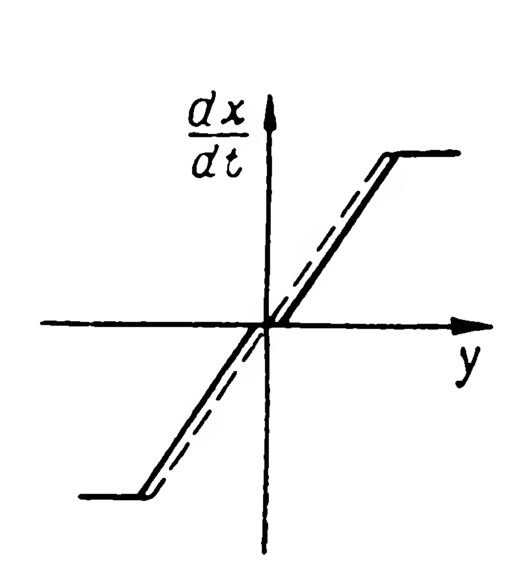
Если учесть инерцию подвижных частей, то поршень не будет приобретать скорость мгновенно при появлении отклонения золотника, как это следует из уравнения (7. 22). Скорость будет возникать с некоторым запаздыванием, и уравнение и передаточная функция гидропривода приобретут такую же форму, как для привода с электродвигателем [(см. формулы (7. 14) и (7.15)]. Однако постоянная времени $T_{п}$ у гидропривода очень мала и обычно ею пренебрегают.

## § 7.5. ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ С ПНЕВМОДВИГАТЕЛЯМИ

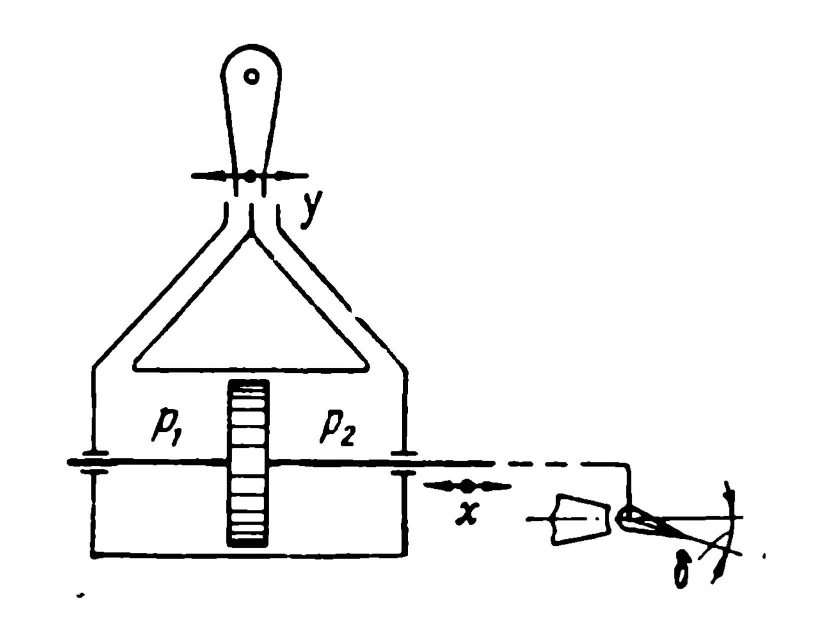
Пневматический двигатель широко применяется в системах управления снарядов. Использование сжатого газа в качестве источника энергии очень удобно в системах управления снарядов, у которых время полета до цели невелико. Сжатый газ находится в баллонах под большим давлением и при включении системы управления, будучи пропущен через понижающий давление редуктор, используется для привода органов управления снаряда.

Конструктивно пневмодвигатели выполняются в двух вариантах: с золотниковым газораспределением и со струйной трубкой. Принципиальная схема исполнительного механизма с пневмодвигателем, имеющим золотниковое газораспределение, аналогична схеме механизма с гидродвигателем, приведенной на фиг. 7.17. Отклонение у золотника вызывает появление разности давлений на рабочий поршень и перемещение последнего.

Схема пневмодвигателя со стройной трубкой изображена на фиг. 7. 19. В среднем положении струйной трубки давление с обеих сторон на рабочий поршень одинаково и он находится в покое. Перемещение конца струйной трубки на величину $y$ нарушает равенство давлений на рабочий поршень и он приходит в движение. Сравнивая эти две конструкции пневмодвигателей, можно отметить, что управление струйной трубкой требует меньших усилий,




Фиг. 7.18. Статическая характеристика гидродвигателя.




Фиг. 7.19. Принципиальная схема исполнительного механизма с пневмодвигателем со струйной трубкой.

чем управление золотником, поскольку между струйной и приемными трубками имеется зазор и сухое трение отсутствует. С другой стороны, расход газа в двигателе со струйной трубкой получается значительно больше, чем в двигателе с золотником, так как в течение всей работы двигателя большая часть газа вытекает через зазор в атмосферу. В двигателе с золотником расход газа ограничен объемом, который выталкивается из полости цилиндра, соединенной с атмосферой, за счет перемещения поршня.

Рабочие процессы, протекающие в пневмодвигателях, осложняются влиянием сжимаемости газа, резкими изменениями характера истечения газа через малые отверстия при изменении давления в объемах, соединяющихся через эти отверстия, и т. п. Поэтому детальный расчет пневмодвигателей связан с большими трудностями. Ниже приводятся упрощенные уравнения движения пневмодвигателя. Несмотря на конструктивное различие двух вариантов пневмодвигателей (см. фиг. 7. 17 и 7.19), их движение может быть описано аналогичными уравнениями. При выводе дифференциальных уравнений пневмодвигателей обычно делаются следующие допущения:

1) давление воздуха на входе в золотник или струйную трубку постоянно;

2) коэффициенты расхода газа постоянны.

При этих допущениях уравнение подвижных частей пневмодвигателя может быть записано в следующей форме:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = S\Delta p - k_т \frac{dx}{dt} - k_н x, \qquad (7.24)$$

где $m$ — масса поршня и штока, а также приведенная масса всех присоединенных к штоку подвижных частей;
$x$ — перемещение поршня;
$S$ — площадь поршня;
$\Delta p$ — перепад давления в полостях цилиндра;
$k_т$ — коэффициент, характеризующий силы вязкого трения;
$k_н$ — коэффициент, характеризующий нагрузку от аэродинамических сил, действующих на руль (шарнирный момент).

Уравнение перепада давления на поршне имеет вид

$$T \frac{d\Delta p}{dt} + \Delta p = k_1 y - k_2 \frac{dx}{dt}, \qquad (7.25)$$

где $T$ — постоянная времени;
$k_1$ — коэффициент передачи;
$k_2$ — коэффициент, характеризующий изменение удельного веса газа при перемещении поршня.

Постоянная времени $T$ и коэффициент передачи являются функциями давления, утечек и удельного веса газа. При расчетах принимается среднее значение этих параметров. Исключая из уравнений (7.24) и (7.25) перепад давления $\Delta p$, получим уравнение пневмодвигателя

$$\frac{mT}{S} \frac{d^3x}{dt^3} + \left(\frac{m}{S} + \frac{k_т}{S} T\right) \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k_т}{S} + \frac{k_н}{S} T + k_2\right) \frac{dx}{dt} + \frac{k_н}{S} x = k_1 y. \qquad (7.26)$$

Уравнение (7.26) может быть использовано для учета динамических свойств пневмодвигателя, включенного в какую-либо замкнутую систему с высокими динамическими свойствами. С точки же зрения использования пневмопривода для управления рулевым органом снаряда, где процессы протекают сравнительно медленно, если рассматривать общий контур управления, формулу (7.26) можно дополнительно упростить. Эти упрощения сводятся к пренебрежению первым и последним членами левой части уравнения. Коэффициент $mT/S$ — мал и может быть принят равным нулю. Нагрузка аэродинамическими силами также может

быть сделана достаточно малой путем соответствующего выбора положения оси подвеса руля. Поэтому коэффициент $k_н/S$ также может быть сделан малым и принят равным нулю.

В результате выражение (7.26) приобретает вид

$$T_д \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = k_д y, \quad (7.27)$$

где

$T_д = \dfrac{m + k_т T}{k_т + k_2 S}$ — постоянная времени двигателя;

$k_д = \dfrac{k_1 S}{k_т + k_2 S}$ — коэффициент усиления двигателя.

Так как угол поворота руля и линейное перемещение поршня связаны между собой передаточным отношением $i$, то на основании (7.27) можно написать уравнение движения всего исполнительного механизма

$$T_п \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{d\delta}{dt} = k_п y, \quad (7.28)$$

где

$T_п = T_д$ — постоянная времени привода;

$k_п = \dfrac{k_д}{i}$ — коэффициент усиления привода.

На основании уравнения (7.28) получим передаточную функцию пневмопривода

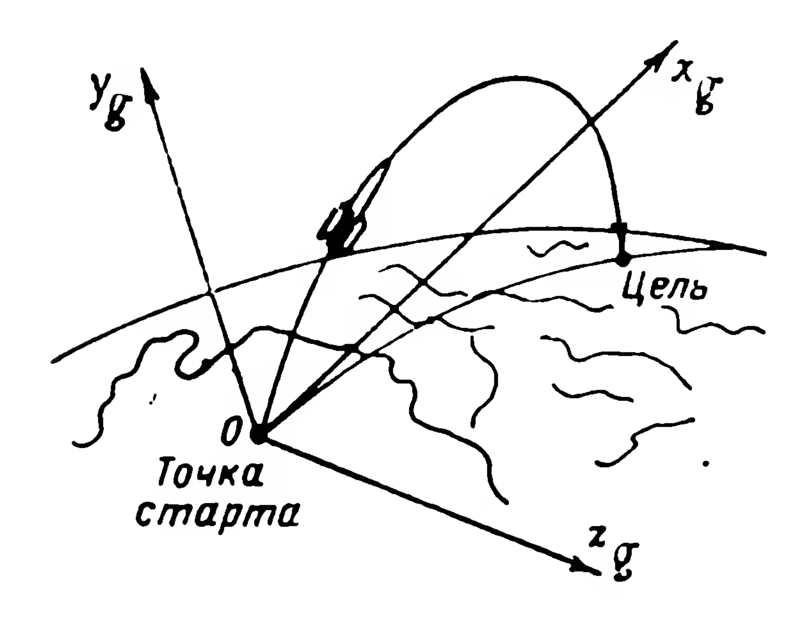
$$W_п(p) = \frac{k_п}{(T_п p + 1)p}. \quad (7.29)$$

# Глава VIII

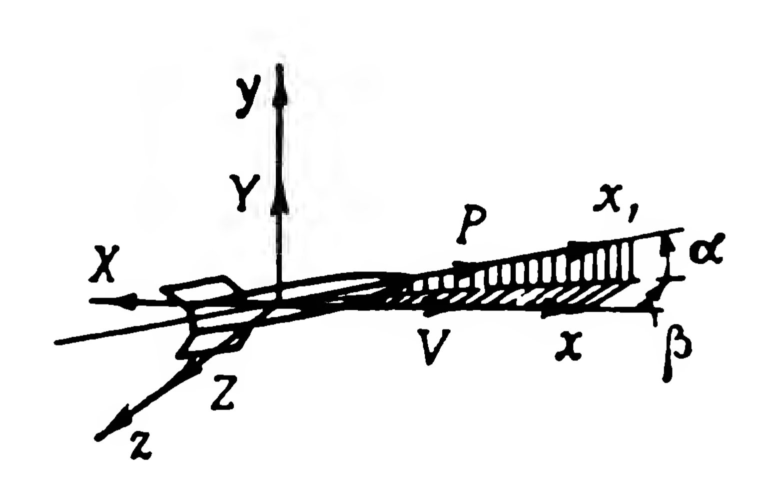
# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА

## § 8.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Движение снаряда принято описывать с помощью уравнений, записанных в определенной системе координат. В аэродинамике применяется несколько систем координатных осей, выбираемых так, чтобы упростить решение рассматриваемой задачи. Ниже приводятся определения систем координатных осей, принятых в аэродинамике и используемых в настоящей книге.




Фиг. 8.1. Земные оси координат.




Фиг. 8.2. Поточные оси координат.

### 1. Система земных осей

Система земных осей $x_g$, $y_g$, $z_g$ (фиг. 8.1) жестко связана с землей. Ось $y_g$ направлена вертикально вверх, а оси $x_g$ и $z_g$ расположены произвольно в горизонтальной плоскости, образуя правую систему координат. При анализе движения снаряда за начало координат земной системы целесообразно принять точку старта, а ось $x_g$ расположить в вертикальной плоскости, проходящей через эту точку и цель.

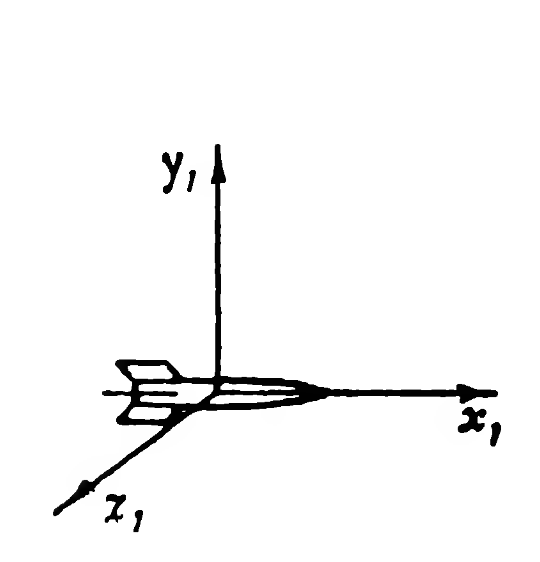
### 2. Система поточных осей

Начало системы поточных (скоростных) осей располагается в центре тяжести движущегося тела (снаряда). Ось $x$ (силы лобового сопротивления) совпадает с направлением скорости по-

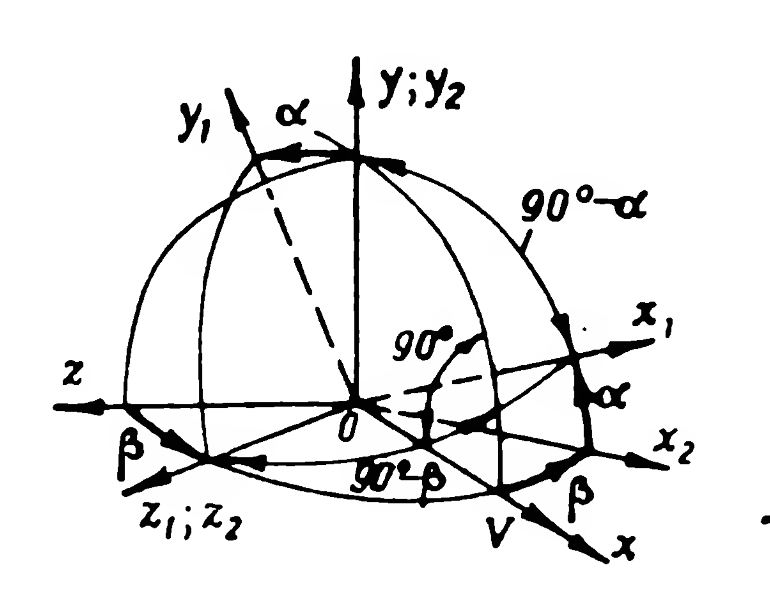
лета (фиг. 8.2). Ось $y$ (подъемной силы) лежит в плоскости симметрии снаряда и повернута против часовой стрелки на угол 90° относительно оси $x$. Ось $z$ (боковой силы) перпендикулярна плоскости $xoy$ и направлена вправо (если смотреть по направлению полета), образуя с осями $x$ и $y$ правую систему координат. На фиг. 8.2 приведены составляющие полной аэродинамической силы $R$, действующей на снаряд в полете, по осям координат: сила лобового сопротивления $X$, подъемная сила (при положительном угле атаки $\alpha$) $Y$ и боковая сила (при положительном угле скольжения $\beta$) $Z$.

### 3. Система связанных осей

Эта система осей, как следует из ее названия, жестко связана с движущимся телом (снарядом). Начало системы располагается в центре тяжести снаряда (фиг. 8.3). Ось $x_1$ (продольная ось)




Фиг. 8.3. Связанные оси координат.




Фиг. 8.4. Углы между поточной, полусвязанной и связанной системами координат.

лежит в плоскости симметрии снаряда, направлена от хвоста к носу и параллельна его оси или хорде крыла. Ось $y_1$ (нормальная ось) лежит в плоскости симметрии снаряда и повернута против часовой стрелки на угол 90° относительно оси $x_1$. Ось $z_1$ (поперечная ось) перпендикулярна плоскости $x_1oy_1$ и направлена вправо (если смотреть по направлению полета).

### 4. Система полусвязанных осей

При экспериментальном определении аэродинамических коэффициентов часто используется полусвязанная система аэродинамических осей. Применение этой системы обусловлено конструкцией весов, с помощью которых при продувке модели в трубе получают значения аэродинамических коэффициентов. Полусвязанные оси

*Таблица 8.1*

**Косинусы углов между земными и связанными осями координат**

| | $x_1$ | $y_1$ | $z_1$ |
|---|---|---|---|
| $x_g$ | $\cos\psi\cos\vartheta$ | $-\cos\gamma\cos\psi\sin\vartheta + \sin\gamma\sin\psi$ | $\cos\gamma\sin\psi + \sin\gamma\cos\psi\sin\vartheta$ |
| $y_g$ | $\sin\vartheta$ | $\cos\gamma\cos\vartheta$ | $-\sin\gamma\cos\vartheta$ |
| $z_g$ | $-\sin\psi\cos\vartheta$ | $\sin\gamma\cos\psi + \cos\gamma\sin\psi\sin\vartheta$ | $\cos\gamma\cos\psi - \sin\gamma\sin\psi\sin\vartheta$ |

*Таблица 8.2*

**Косинусы углов между связанными и поточными осями координат**

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\cos\alpha\cos\beta$ | $\sin\alpha$ | $-\cos\alpha\sin\beta$ |
| $y_1$ | $-\sin\alpha\cos\beta$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha\sin\beta$ |
| $z_1$ | $\sin\beta$ | $0$ | $\cos\beta$ |

*Таблица 8.3*

**Косинусы углов между земными и полусвязанными осями координат**

| | $x_2$ | $y_2$ | $z_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_g$ | $\cos\theta\cos\psi$ | $-\cos\gamma\cos\psi\sin\theta + \sin\gamma\sin\psi$ | $\sin\gamma\sin\theta\cos\psi + \cos\gamma\sin\psi$ |
| $y_g$ | $\sin\theta$ | $\cos\gamma\cos\theta$ | $-\sin\gamma\cos\theta$ |
| $z_g$ | $-\cos\theta\sin\psi$ | $\sin\gamma\cos\psi + \cos\gamma\sin\psi\sin\theta$ | $\cos\gamma\cos\psi - \sin\gamma\sin\psi\sin\theta$ |

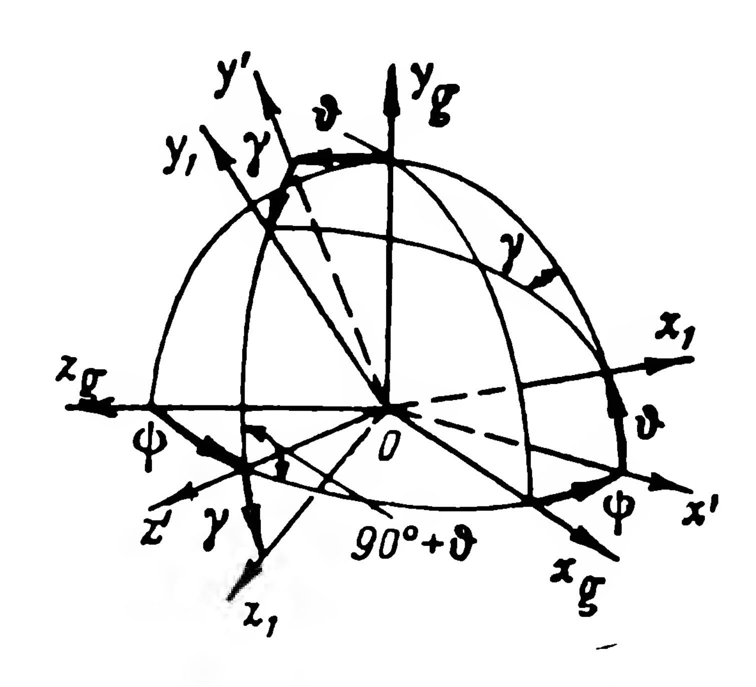
*Таблица 8.4*

**Косинусы углов между связанными и полусвязанными осями координат**

| | $x_2$ | $y_2$ | $z_2$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $0$ |
| $y_1$ | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $0$ |
| $z_1$ | $0$ | $0$ | $1$ |

отличаются от поточных тем, что ось $x_2$ направлена не по скорости полета, а по проекции скорости на плоскость симметрии снаряда. Таким образом, полусвязанные оси могут быть получены из поточных поворотом вокруг оси подъемной силы на угол скольжения $\beta$.

На фиг. 8.4 мы видим этот переход и взаимное положение осей, а также положение связанных осей $x_1$, $y_1$, $z_1$. На этой же фигуре показано, что ось полусвязанной системы $y_2$ совпадает с осью подъемной силы $y$, а ось $z_2$ — с поперечной осью связанной системы $z_1$. Этим и объясняется название системы осей $x_2$, $y_2$ $z_2$. Угол $x_1ox_2$, т. е. угол, образованный связанной осью $x_1$ с проекцией скорости на плоскость симметрии снаряда, есть угол атаки $\alpha$. Угол $zoz_1$ или угол, образованный вектором скорости и плоскостью симметрии снаряда, есть угол скольжения $\beta$. Положительные направления углов $\alpha$ и $\beta$ также указаны на фиг. 8.4. Они соответствуют общему правилу для определения положительных углов поворота системы $x_1$, $y_1$, $z_1$ относительно системы $x$, $y$, $z$, принятому для правых систем координат.




Фиг. 8.5. Углы между связанной и земной системами координат.

На фиг. 8.5 показаны углы, образующиеся между связанной и земной системами координат. Для удобства начала координат обеих систем совмещены. Угол $\vartheta$, образуемый осью $x_1$ с горизонтальной плоскостью $x_goz_g$, называется углом тангажа. Угол $\psi$, образуемый проекцией оси $x_1$ на горизонтальную плоскость $x_goz_g$, с осью $x_g$, называется углом рыскания (углом пути). Угол $\gamma$, образуемый осью $z_1$ и горизонтальной плоскостью $x_goz_g$, называется углом крена. Положительные направления этих углов даны на фиг. 8.5

В табл. 8.1—8.4 приведены направляющие косинусы для перехода от одной системы координат к другой.

## § 8.2. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА КАК ТВЕРДОГО ТЕЛА

В общей постановке задача о движении даже неуправляемого снаряда очень сложна. Для упрощения этой задачи приходится использовать целый ряд допущений. Первым из таких допущений является пренебрежение упругими деформациями конструкции снаряда, в результате чего последний может рассматриваться как твердое тело.

Движение твердого тела переменной массы можно определить, используя теоремы количества движения и моментов количества движения центра тяжести этого тела. Теорема количества движения в этом случае имеет вид

$$m\frac{d\overline{V}}{dt} = \overline{R} + \overline{P}, \tag{8. 1}$$

где $m$ — переменная масса тела, которая изменяется за счет сгорания топлива;

$\overline{V}$ — скорость движения центра тяжести[1];

$\overline{R}$ — равнодействующая внешних сил, приведенная к центру тяжести.

$\overline{P} = \overline{U}\frac{dm}{dt}$ — равнодействующая реактивных сил, приведенная к центру тяжести;

$\overline{U}$ — относительная скорость присоединяющейся (отделяющейся) массы (массы топлива).

Теорема моментов количества движения для тела переменной массы записывается в форме

$$\frac{d^*\overline{K}}{dt} = \overline{M} + \overline{N}, \tag{8. 2}$$

где $\overline{K}$ — момент количества движения в относительном движении по отношению к центру тяжести тела;

$\overline{M}$ — момент внешних сил относительно центра инерции;

$\overline{N}$ — момент реактивных сил относительно центра инерции.

Знак «звездочка» у производной указывает на то, что при дифференцировании момента количества движения массу тела следует считать постоянной.

Уравнения (8.1) и (8.2) справедливы в «неподвижной» системе координат. Неподвижность системы координат есть понятие условное, так как всегда необходимо оговаривать, относительно какой другой системы отсчета неподвижна использованная в данной задаче система координат. Для большинства рассматриваемых в настоящей книге задач за «неподвижные» будем считать земные оси координат. В тех задачах, где необходимо учесть влияние движения Земли на полет снаряда, это обстоятельство будет оговорено особо.

Силы и моменты, стоящие в правых частях уравнений (8.1) и (8.2), удобнее задавать в системе координат, связанной не с землей, а со снарядом. Поэтому возникает необходимость преобразовать уравнения (8.1) и (8.2) к одной из таких систем. Переход от неподвижной к системе координат, движущейся с телом, базируется на следующей общей лемме:

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = \frac{d\tilde{a}}{dt} + [\overline{\omega}\,\overline{a}], \tag{8. 3}$$

где $\frac{d\overline{a}}{dt}$ — производная вектора $\overline{a}$ в неподвижной системе координат;

$\frac{d\tilde{a}}{dt}$ — производная вектора $\overline{a}$ в подвижной системе координат;

$\overline{\omega}$ — угловая скорость подвижной системы относительно неподвижной.

---

[1] Строго говоря, $\overline{V}$ есть не скорость движения центра тяжести, а переносная скорость той точки тела, через которую в рассматриваемый момент проходит центр тяжести, не сохраняющий неизменного положения в теле переменной массы; однако относительной скоростью центра тяжести в теле можно пренебречь в сравнении со скоростью переносного движения тела (снаряда).

На основании леммы (8.3) возможен переход от земных («неподвижных») осей к поточным, связанным и полусвязанным. Чтобы в конечном счете получить общепринятую в аэродинамике форму уравнений снаряда, наиболее целесообразно записать уравнения (8.1) и (8.2) в полусвязанной системе координат. Применяя к этим уравнениям лемму (8.3), получим

$$m\frac{d\overline{V}}{dt}=m\frac{d\tilde{\overline{V}}}{dt}+m[\overline{\omega}'\overline{V}]=\overline{R}+\overline{P}, \tag{8.4}$$

$$\frac{d^*\overline{K}}{dt}=\frac{d\tilde{\overline{K}}}{dt}+[\overline{\omega}'\overline{K}]=\overline{M}+\overline{N}, \tag{8.5}$$

где $\overline{\omega'}$ — угловая скорость полусвязанной системы координат относительно земной.

Проектируя векторные уравнения (8.4) и (8.5) на оси полусвязанной системы, получим две системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &m\frac{dV_{x2}}{dt}+m\omega'_{y2}V_{z2}=R_{x2}+P_{x2},\\ &m\left(\omega'_{z2}V_{x2}-\omega'_{x2}V_{z2}\right)=R_{y2}+P_{y2},\\ &m\frac{dV_{z2}}{dt}-m\omega_{y2}V_{x2}=R_{z2}+P_{z2}, \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^*K_{x2}}{dt}+\left(\omega'_{y2}K_{z2}-\omega'_{z2}K_{y2}\right)=M_{x2}+N_{x2},\\ &\frac{d^*K_{y2}}{dt}+\left(\omega'_{z2}K_{x2}-\omega'_{x2}K_{z2}\right)=M_{y2}+N_{y2},\\ &\frac{d^*K_{z2}}{dt}+\left(\omega'_{x2}K_{y2}-\omega'_{y2}K_{x2}\right)=M_{z2}+N_{z2}. \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

Уравнения (8.6) написаны с учетом того, что в полусвязанной системе координат ось $y_2$ перпендикулярна скорости полета $V$ снаряда. Поэтому проекция скорости на эту ось ($V_{y2}$) тождественно равна нулю.

Проекции момента количества движения на оси полусвязанной системы, входящие в уравнения (8.7), для тела переменной массы определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} &K_{x2}=J_{x2}\omega_{x2}-J_{xy2}\omega_{y2},\\ &K_{y2}=J_{y2}\omega_{y2}-J_{xy2}\omega_{x2},\\ &K_{z2}=J_{z2}\omega_{z2}, \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

где $J_{x2}$, $J_{y2}$, $J_{z2}$ — осевые моменты инерции снаряда в полусвязанной системе координат;

$J_{xy2}$ — центробежный момент инерции снаряда;

$\omega_{x2}$, $\omega_{y2}$, $\omega_{z2}$ — проекции угловой скорости снаряда на оси полусвязанной системы.

При выводе формул (8.8) учтено, что снаряд имеет плоскость симметрии, а поэтому центробежные моменты инерции $J_{yz2}$ и $J_{zx2}$ равны 0. Кроме того, необходимо подчеркнуть, что угловая скорость снаряда $\overline{\omega}$ отличается от угловой скорости полусвязанной системы $\omega'$, так как эта система нежестко связана со снарядом и может двигаться (вместе с проекцией вектора скорости на плоскость симметрии) относительно снаряда. Очевидно также, что моменты инерции, входящие в формулы (8.8), не являются постоянными величинами. Изменение этих моментов инерции обусловлено как изменением массы снаряда за счет сгорания топлива, так и подвижностью полусвязанных осей относительно снаряда.

Подставляя значения проекций момента количества движения на оси полусвязанной системы (8.8) в уравнения (8.7) и учитывая, что производные имеют знак «звездочка», получим

$$\left.\begin{aligned}
&J_{x_2}\frac{d^*\omega_{x_2}}{dt}-J_{y_2}\omega_{y_2}\omega'_{z_2}+J_{z_2}\omega'_{y_2}\omega_{z2}+J_{xy_2}\left(\omega_{x_2}\omega'_{z_2}-\frac{d^*\omega_{y_2}}{dt}\right)=M_{x_2}+N_{x_2},\\
&J_{y_2}\frac{d^*\omega_{y_2}}{dt}-J_{z_2}\omega'_{x_2}\omega_{z_2}+J_{x_2}\omega_{x_2}\omega'_{z_2}-J_{xy_2}\left(\omega_{y_2}\omega'_{z_2}+\frac{d^*\omega_{x_2}}{dt}\right)=M_{y_2}+N_{y_2},\\
&J_{z_2}\frac{d^*\omega_{z_2}}{dt}-J_{x_2}\omega_x\omega'_y+J_{y_2}\omega_{y_2}\omega'_{y_2}+J_{xy_2}\left(\omega_{y_2}\omega'_{y_2}-\omega_{x_2}\omega'_{x_2}\right)=M_{z_2}+N_{z_2}.
\end{aligned}\right\}\quad(8.9)$$

Знак «звездочка» у производных проекций угловых скоростей на оси полусвязанной системы указывает на то, что производные вычислены в предположении, что оси $x_2$, $y_2$, $z_2$ занимают неизменное положение в снаряде.

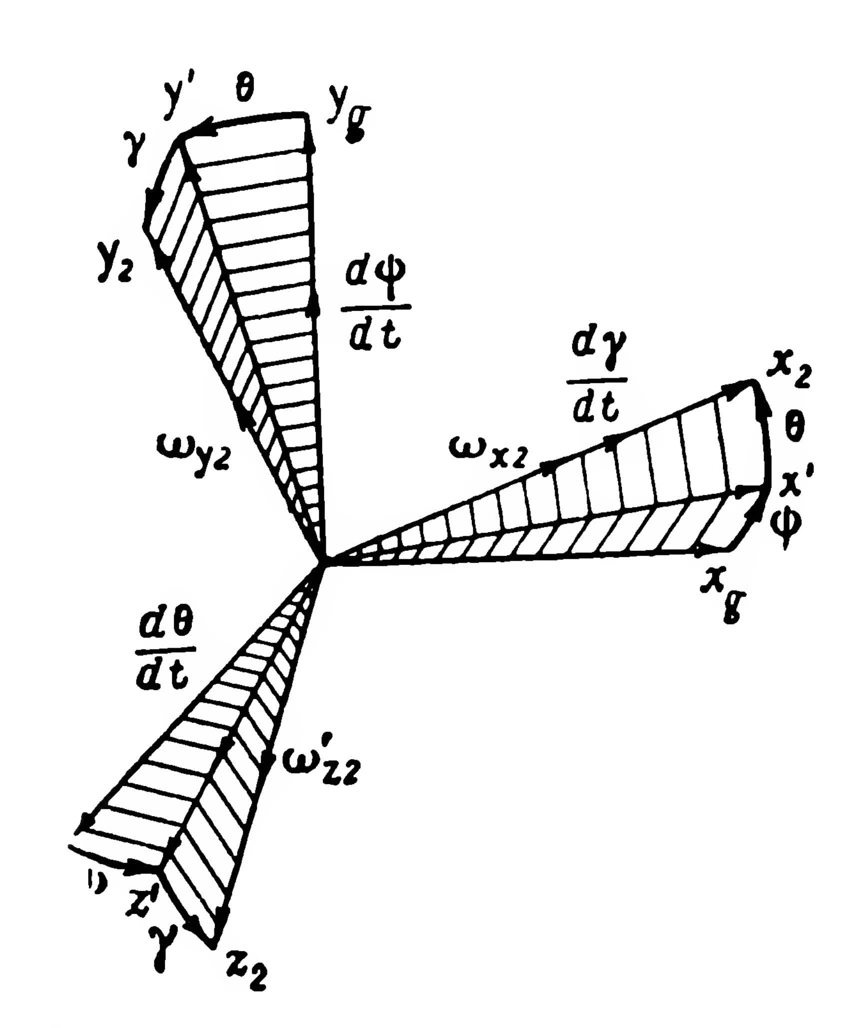
Необходимо указать, что проекции угловой скорости снаряда и полусвязанной системы координат на оси $x_2$ и $y_2$ этой системы равны друг другу. Это объясняется тем, что система $x_2$, $y_2$, $z_2$ может вращаться в снаряде только относительно оси $z_2$. Лишь проекции относительно этой оси ($\omega_{z2}$ и $\omega'_{z2}$) принципиально отличаются друг от друга. Учитывая это, можно уравнения (8.6) и (8.9) переписать в более простой форме:

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{dV_{x2}}{dt}+m\omega_{y2}V_{z2}=R_{x2}+P_{x2},\\
&m\left(\omega'_{z2}V_{x2}-\omega_{x2}V_{z2}\right)=R_{y2}+P_{y2},\\
&m\frac{dV_{z2}}{dt}-m\omega_{y2}V_{x2}=R_{z2}+P_{z2},
\end{aligned}\right\}\quad(8.10)$$

$$\left.\begin{aligned}
&J_{x2}\frac{d^*\omega_{x2}}{dt}-J_{y2}\omega_{y2}\omega'_{z2}+J_{z2}\omega_{z2}\omega_{y2}+J_{xy2}\left(\omega_{x2}\omega'_{z2}-\frac{d^*\omega_{y2}}{dt}\right)=M_{x2}+N_{x2},\\
&J_{y2}\frac{d^*\omega_{y2}}{dt}-J_{z2}\omega_{x2}\omega_{z2}+J_{x2}\omega_{x2}\omega'_{z2}-J_{xy2}\left(\omega_{y2}\omega'_{z2}+\frac{d^*\omega_{x2}}{dt}\right)=M_{y2}+N_{y2},\\
&J_{z2}\frac{d^*\omega_{z2}}{dt}-J_{x2}\omega_{x2}\omega_{y2}+J_{y2}\omega_{y2}\omega_{x2}+J_{xy2}\left(\omega^2_{y2}-\omega^2_{x2}\right)=M_{z2}+N_{z2}.
\end{aligned}\right\}\quad(8.11)$$

Для определения линейных координат центра тяжести снаряда в неподвижных осях, а также для определения в этих осях угловых координат полусвязанной системы нужно составить еще шесть кинематических уравнений. На основании табл. 8.3 связь между проекциями скорости полета в неподвижных и полусвязанных осях имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_g}{dt} &= V_{x2}\cos\theta\cos\psi + V_{z2}(\sin\gamma\sin\theta\cos\psi + \cos\gamma\sin\psi),\\ \frac{dy_g}{dt} &= V_{x2}\sin\theta - V_{z2}\sin\gamma\cos\theta,\\ \frac{dz_g}{dt} &= -V_{x2}\cos\theta\sin\psi + V_{z2}(\cos\gamma\cos\psi - \sin\gamma\sin\theta\sin\psi). \end{aligned}\right\} \qquad (8.12)$$




Фиг. 8.6. Геометрические соотношения для угловых скоростей.

На фиг. 8.6 показаны составляющие вектора угловой скорости полусвязанной системы координат $\bar{\omega}'$ в полусвязанных осях и в виде производных углов Эйлера. На основании геометрических соотношений получим кинематические уравнения, связывающие эти составляющие:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_{x2} - \omega_{y2}\,\mathrm{tg}\,\theta\cos\gamma + \omega'_{z2}\,\mathrm{tg}\,\theta\sin\gamma,\\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\omega_{y2}\cos\gamma - \omega'_{z2}\sin\gamma}{\cos\theta},\\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega_{y2}\sin\gamma + \omega'_{z2}\cos\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (8.13)$$

К полученным уравнениям необходимо добавить следующие кинематические соотношения, используемые ниже:

$$\vartheta = \theta + \alpha; \; \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{y2} \sin\gamma + \omega_{z2} \cos\gamma. \tag{8.14}$$

Система уравнений, в которую входят уравнения (8.10) — (8.14), является полной системой, описывающей движение снаряда. Она в принципе может быть решена, если будут определены силы и моменты, действующие на снаряд в полете.

## § 8.3. ПРИВЕДЕНИЕ ОБЩИХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА К БОЛЕЕ ПРОСТОМУ ВИДУ

Полученная в предыдущем параграфе система уравнений (8.10) — (8.14) является сложной нелинейной системой дифференциальных уравнений с переменными (т. е. зависящими от времени) коэффициентами, не поддающейся анализу в общем виде. Эти уравнения усложняются еще и тем, что силы и моменты, действующие на снаряд и входящие в правые части уравнений (8.10) и (8.11), в свою очередь являются нелинейными функциями параметров движения снаряда (угловых и линейных координат снаряда и производных этих координат). Хотя система уравнений (8.10) — (8.14) и может быть для конкретных числовых значений параметров снаряда решена на современных вычислительных машинах, однако, для целей исследования движения управляемых снарядов и выбора параметров систем управления такой путь следует признать малопригодным. Решение при конкретных значениях параметров системы управления не позволяет выбрать эти параметры оптимальными, так как не дает возможности установить четкую связь между изменением этих параметров и характером движения снаряда. Поэтому наиболее рациональным методом, позволяющим получить достаточно простое, хотя и приближенное аналитическое описание движения снаряда, является упрощение рассматриваемой задачи. Следуя общепринятому в аэродинамике самолетов методу, для упрощения решаемой задачи разделим действительное движение снаряда на два изолированных — продольное и боковое. К продольному движению относится движение центра тяжести снаряда в вертикальной плоскости $x_g o y_g$ и вращательное движение относительно оси $z_2$. К боковому движению относится движение центра тяжести в наклонной плоскости $x_2 o z_g$ и вращательные движения относительно осей $x_2$ и $y_2$.

Разделение движения снаряда на продольное и боковое базируется на допущении, что параметры, определяющие продольное движение $\left(\frac{dx_g}{dt}, \; \frac{dy_g}{dt}, \; V_{x2}, \; \theta, \; \vartheta, \; \omega_{z2}, \; \omega'_{z2}\right)$, считаются постоянными

величинами в уравнениях бокового движения, а параметры, определяющие боковое движение $\left(\frac{dz_g}{dt}, V_{z2}, \gamma, \psi, \omega_{x2}, \omega_{y2}\right)$, считаются постоянными в уравнениях продольного движения. В результате этого допущения общая система уравнений (8.10)—(8.14) разделится на две системы, описывающие изолированные продольное и боковое движения. Заметим, что при движении снаряда строго в вертикальной плоскости такой подход не является приближенным, так как в этом случае параметры бокового движения действительно остаются постоянными и равными нулю. Для бокового движения снаряда указанный подход всегда вносит определенную погрешность, так как при этом движении параметры продольного движения в принципе несколько изменяются, что не учитывается изолированными уравнениями бокового движения. Эта погрешность будет тем меньше, чем меньше изменение параметров продольного движения за время, в течение которого исследуется боковое движение снаряда. Однако и после разделения движения на продольное и боковое уравнения продолжают оставаться чрезвычайно сложными. Существует два основных способа для дальнейшего упрощения рассматриваемой задачи. Первый способ, называемый методом линеаризации, или методом малых отклонений, заключается в следующем. Движение снаряда делим на возмущенное и невозмущенное. За невозмущенное движение в принципе может быть выбран любой интересующий нас режим полета. Пусть на снаряд, режим движения которого был невозмущенным, подействует возмущение (отклонение руля, изменение тяги двигателя, порыв ветра). Возмущенным называется любое движение, которое получается после того, как невозмущенное движение изменится под действием возмущения. Отклонения параметров возмущенного движения от их значений при невозмущенном режиме считаем малыми. Разлагая в ряд по степеням отклонений все нелинейные функции, входящие в исходные нелинейные уравнения, отбрасываем все члены ряда, которые имеют порядок малости выше первого. Полученные уравнения, называемые уравнениями первого приближения или уравнениями в отклонениях (вариациях), являются линейными. Некоторые коэффициенты этих уравнений в общем случае могут зависеть от времени.

Описанный метод линеаризации имеет основное практическое значение, когда невозмущенный режим является прямолинейным и равномерным полетом. В этом случае проведение линеаризации очень несложно, и только для такого невозмущенного режима этот метод и будет использоваться в настоящей книге. Он является естественным математическим приемом для анализа движения тех снарядов, у которых имеется режим прямолинейного и равномерного полета. К таким снарядам могут быть отнесены многие типы снарядов, у которых маршевый двигатель работает на всей или

на большей части траектории полета. Существует, однако, большой класс снарядов, которые за все время полета не имеют участка с постоянной скоростью полета. К таким снарядам относятся все снаряды, имеющие только стартовые двигатели или маршевые двигатели, работающие на небольшом участке траектории. Кроме того, движение при разгоне после старта для всех снарядов не может быть описано с помощью линеаризованных уравнений по той же причине — в этом случае отсутствует невозмущенный режим в форме прямолинейного и равномерного движения.

Если нельзя применить линеаризацию исходных уравнений движения снаряда, то для их упрощения используется второй способ, который назовем методом группировки. Он не является таким математически строгим, как способ линеаризации, но тем не менее во многих случаях дает вполне удовлетворительные результаты. Для пояснения метода группировки заметим, что движение снаряда описывается параметрами, среди которых встречаются быстро и медленно изменяющиеся функции времени. К быстро изменяющимся функциям можно отнести характеристики движения снаряда относительно центра тяжести, к медленно изменяющимся — характеристики движения центра тяжести снаряда. Идея метода состоит в такой группировке уравнений движения и их некотором упрощении, чтобы группу уравнений для медленно меняющихся функций можно было проинтегрировать отдельно от группы уравнений для быстро меняющихся функций. Полученные в результате интегрирования уравнений для медленных движений функции времени подставляются в группу уравнений для быстрых движений, которые за счет этого обычно из нелинейных превращаются в линейные уравнения с переменными коэффициентами.

Далее в этом параграфе излагается лишь метод линеаризации уравнений продольного и бокового движения. Метод группировки будет изложен в следующих параграфах.

Для линеаризации нелинейных уравнений (8.10)—(8.14) в качестве невозмущенного режима выберем режим прямолинейного и равномерного полета, когда сумма сил и моментов, действующих на снаряд, равна нулю. Считаем также, что ось $x_g$ земной системы координат в этом режиме совпадает с направлением полета снаряда. В этом случае параметры, определяющие движение снаряда в невозмущенном режиме, имеют следующие значения:

$$(V_{x2})_0 = V_e; \quad (V_{z2})_0 = 0; \quad \left(\frac{dx_g}{dt}\right)_0 = V_e \cos\theta_e; \quad \left(\frac{dy_g}{dt}\right)_0 = V_e \sin\theta_e;$$

$$\left(\frac{dz_g}{dt}\right)_0 = 0; \quad (\omega_{x2})_0 = (\omega_{y2})_0 = (\omega_{z2})_0 = (\omega'_{z2})_0 = 0;$$

$$(\psi)_0 = (\gamma)_0 = 0; \quad (\vartheta)_0 = \vartheta_e; \quad (\theta)_0 = \theta_e.$$

Если подставить эти параметры в систему уравнений (8.10)—(8.14), то последние превратятся в алгебраические уравнения, из которых могут быть определены числовые значения параметров невозмущенного полета.

Дадим теперь всем параметрам небольшие приращения, которые будем обозначать знаком $\Delta$ в том случае, если значение параметра при невозмущенном режиме отлично от нуля. Если же оно равно нулю, то отклонение будем обозначать тем же символом, что и параметр. Подставив значения параметров с приращениями в уравнения (8.10)—(8.14) и учитывая сделанное выше замечание относительно пренебрежения связью между продольным и боковым движениями снаряда, получим две системы уравнений для приращений (уравнения первого приближения).

Система уравнений продольного движения:

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{d\Delta V}{dt} = \Delta R_{x2} + \Delta P_{x2}; \quad \frac{d\Delta x_g}{dt} = (V_e + \Delta V)\cos\theta_e - V_e \sin\theta_e \Delta\theta;\\
&mV_e\frac{d\Delta\theta}{dt} = \Delta R_{y2} + \Delta P_{y2}; \quad \frac{d\Delta y_g}{dt} = (V_e + \Delta V)\sin\theta_e + V_e\cos\theta_e\Delta\theta;\\
&J_{z2}\frac{d\omega_{z2}}{dt} = \Delta M_{z2} + \Delta N_{z2}; \quad \frac{d\Delta\vartheta}{dt} = \omega_{z2};\\
&\Delta\vartheta = \Delta\theta + \Delta\alpha.
\end{aligned}\right\} \quad (8.15)$$

Система уравнений бокового движения [1]

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{dV_{z2}}{dt} - m\omega_{y2}V_e = \Delta R_{z2} + \Delta P_{z2}; \quad \frac{dz_g}{dt} = -V_e\psi + V_{z2};\\
&J_{x2}\frac{d\omega_{x2}}{dt} - J_{xy2}\frac{d\omega_{y2}}{dt} = \Delta M_{x2} + \Delta N_{x2}; \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega_{x2};\\
&J_{y2}\frac{d\omega_{y2}}{dt} - J_{xy2}\frac{d\omega_{x2}}{dt} = \Delta M_{y2} + \Delta N_{y2}; \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega_{y2}.
\end{aligned}\right\} \quad (8.16)$$

В результате разделения движения на продольное и боковое потерялся смысл использования полусвязанной системы координат как самостоятельной системы. Для некоторых составляющих движения снаряда полусвязанная система стала идентична с поточной, для других — со связанной системой. Действительно, оси $x$ и $y$ поточной и $x_2$ и $y_2$ полусвязанной систем, определяющие про-

[1] В уравнениях (8.16) и везде далее знак «звездочка» для удобства опущен

дольное движение центра тяжести снаряда, отличаются только тем, что ось $x$ расположена по вектору скорости, а ось $x_2$ — по проекции вектора скорости на плоскость симметрии снаряда. Так как влияние боковых параметров на продольное движение не учитывается, то при исследовании этого движения предполагается, что угол скольжения (параметр бокового движения) равен нулю. В этом случае вектор скорости расположен в плоскости симметрии снаряда и совпадает со своей проекцией на эту плоскость. Следовательно, для продольного движения оси $x_2$ и $y_2$ полусвязанной системы идентичны осям $x$ и $y$ поточной системы, в которой и будем в дальнейшем считать выведенными первые два уравнения системы (8.15).

Третье уравнение системы (8.15) и первые три уравнения (8.16) оказались записанными в связанной системе координат. Это очевидно относительно третьего уравнения системы (8.15), поскольку оси $z_1$ и $z_2$ совпадают по своему положению в теле снаряда (см. фиг. 8.4). Что касается уравнений системы (8.16), то при рассмотрении только бокового движения оси $x_2$, $y_2$, $z_2$ становятся связанными со снарядом.

Подвижность полусвязанной системы обусловлена лишь изменением в полете угла атаки снаряда. При рассмотрении изолированного бокового движения угол атаки как параметр продольного движения не входит в эту систему уравнений, а поэтому полусвязанные оси из подвижных превращаются в неподвижные, т. е. связанные со снарядом оси. Теперь отличие осей $x_1$, $y_1$, $z_1$ от осей $x_2$, $y_2$, $z_2$ состоит лишь в наличии угла атаки между осями $x_1$ и $x_2$, а также $y_1$ и $y_2$. Учитывая наличие этого угла, можно полусвязанные оси $x_2$, $y_2$, $z_2$ для бокового движения заменить на связанные оси $x_1$, $y_1$, $z_1$, изменив соответственно обозначения моментов инерции и угловых скоростей снаряда. Такую же замену оси $z_2$ на $z_1$ произведем для первого уравнения системы (8.16). При этом учтем, что в результате поворота осей на угол $\alpha_e$ в первом уравнении (8.16) появится член $mV_{y1}\omega_{x1}$, который в полусвязанной системе координат был равен нулю вследствие тождества $V_{y2}\equiv 0$. Составляющие скорости по осям $y_1$ и $z_1$ удобнее учитывать через углы атаки и скольжения в соответствии с формулами

$$V_{y1} = -V_e \cos\beta_e \sin\alpha_e \approx -V_e\alpha_e,$$

$$V_{z1} = V_e \sin\beta \approx V_e\beta.$$

Для упрощения уравнений пренебрежем также центробежным моментом $J_{xy}$, который обычно имеет незначительную величину. В результате указанных преобразований системы уравнений (8.15) и (8.16) могут быть записаны в несколько иной форме.

Система уравнений продольного движения:

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{d\Delta V}{dt}=\Delta R_x+\Delta P_x; \quad \frac{d\Delta x_g}{dt}=(V_e+\Delta V)\cos\theta_e-V_e\sin\theta_e\Delta\theta;\\
&mV_e\frac{d\Delta\theta}{dt}=\Delta R_y+\Delta P_y; \quad \frac{d\Delta y_g}{dt}=(V_e+\Delta V)\sin\theta_e+V_e\cos\theta_e\Delta\theta;\\
&J_z\frac{d\omega_z}{dt}=\Delta M_z+\Delta N_z; \quad \frac{d\Delta\vartheta}{dt}=\omega_z;\\
&\Delta\vartheta=\Delta\theta+\Delta\alpha.
\end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

Система уравнений бокового движения:

$$\left.\begin{aligned}
&mV_e\frac{d\beta}{dt}-mV_e\alpha_e\omega_x-mV_e\omega_y=\Delta R_z+\Delta P_z; \quad \frac{dz_g}{dt}=V_e(\beta-\psi);\\
&J_x\frac{d\omega_x}{dt}=\Delta M_x+\Delta N_x; \quad \frac{d\gamma}{dt}=\omega_x;\\
&J_y\frac{d\omega_y}{dt}=\Delta M_y+\Delta N_y; \quad \frac{d\psi}{dt}=\omega_y.
\end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

Теперь индексы при соответствующих параметрах указывают только на выбор определенной оси в данной системе. В них нет указания на выбор той или иной системы, поскольку этот вопрос выше уже был решен однозначно и относительно каждого из уравнений (8.17) и (8.18) известно, в какой системе координат оно составлено.

Перейдем к анализу правых частей уравнений для проекций сил и моментов, входящих в системы (8.17) и (8.18), чтобы получить окончательную форму этих уравнений.

## § 8.4. УРАВНЕНИЯ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ ЛИНЕАРИЗАЦИИ, И ИХ АНАЛИЗ

Для получения уравнений продольного движения необходимо найти аналитические выражения для приращений сил и момента, входящих в систему уравнений (8.17).

На фиг. 8.7 показаны силы и моменты, действующие на снаряд в продольном движении.

Рассматриваемые силы и моменты являются нелинейными функциями ряда аргументов:

$$X=X(\alpha, V, M, \rho);$$

$$Y=Y(\alpha, V, M, \rho);$$

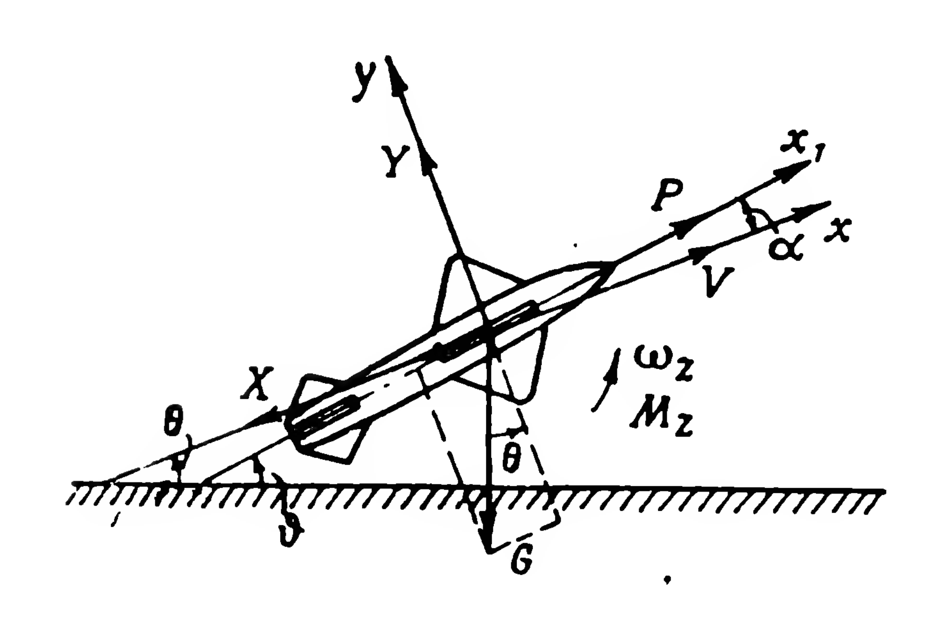
$$M_z = M_z\left(\delta_в, \alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\vartheta}{dt}, \quad V, M, \rho\right),$$

где $M = V_e/a_e$ ($a_e$ — скорость звука на высоте полета);
$\rho$ — плотность воздуха;
$\delta_д$ — угол поворота органа управления тягой двигателя;
$p$ — давление воздуха;
$T$ — абсолютная температура воздуха;
$\delta_в$ — угол отклонения руля высоты.

Проекции сил на оси поточной системы $x$ и $y$ определяются на основании фиг. 8.7 следующими выражениями:

$$R_x + P_x = -X - G\sin\theta + P\cos\alpha; \tag{8.19}$$

$$R_y + P_y = Y - G\cos\theta + P\sin\alpha. \tag{8.20}$$




Фиг. 8.7. Силы и момент, действующие на снаряд в продольном движении.

$x$, $y$ — оси поточной системы координат, $\vartheta$ — угол тангажа снаряда, $\theta$ — угол наклона траектории снаряда, $\alpha$ — угол атаки в предположении, что продольная ось и хорда крыла совпадают по направлению. $P$ — сила тяги двигателя; считаем, что она проходит через центр тяжести снаряда; поэтому момент реактивных сил $N$ тождественно равен нулю; $X$ — сила лобового сопротивления, направленная против вектора скорости; $Y$ — подъемная сила, направленная перпендикулярно вектору скорости; $G$ — вес снаряда; $M_z$ — момент аэродинамических сил относительно поперечной оси $z_1$.

Исходный невозмущенный режим движения снаряда в вертикальной плоскости (прямолинейный полет с постоянной скоростью) может быть получен, если все силы и моменты, действующие на снаряд, равны нулю. Следовательно, для этого режима справедлива система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &-X_e - G\sin\theta_e + P_e\cos\alpha_e = 0,\\ &Y_e - G\cos\theta_e + P_e\sin\alpha_e = 0,\\ &M_z(\delta_{в\,e}, \alpha_e, 0, 0, V_e, M_e, \rho_e) = 0,\\ &\vartheta_e = \theta_e + \alpha_e. \end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

В системе уравнений (8.21) две величины сила тяги $P_e$ и угол отклонения руля высоты $\delta_в$ зависят от положения органов управ-

ления двигателем и рулем. Поэтому эти две величины входят в уравнения движения снаряда как функции времени, которые либо должны быть известны, либо связываются известными зависимостями с параметрами полета. Эти зависимости характеризуют работу системы управления снаряда. В уравнениях (8.21), описывающих невозмущенный режим, эти величины должны быть постоянны и известны.

Если тяга и угол отклонения руля известны, то в системе уравнений (8.21) останутся четыре неизвестных параметра полета * $V_e$, $\theta_e$, $\vartheta_e$ и $\alpha_e$, которые характеризуют невозмущенное движение и могут быть в принципе определены путем решения этой системы.

Дадим теперь этим параметрам, а также и высоте полета небольшие приращения и разложим нелинейные функции $X$, $Y$, $P$ и $M_z$ в ряды по степеням этих приращений. Ограничиваясь линейным приближением (т. е. пренебрегая всеми членами этих рядов, в которых приращения входят в степени выше первой) и учитывая уравнения (8.21), получим следующие выражения для приращений сил и моментов в продольном движении:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta R_x + \Delta P_x = -X^V\Delta V - X^M\Delta M - X^\alpha\Delta\alpha - X^\rho\rho^y\Delta y_g - \\
&- G\cos\theta_e\Delta\theta + P^M\cos\alpha_e\Delta M - P_e\sin\alpha_e\Delta\alpha + P^\rho\cos\alpha_e\rho^y\Delta y_g + \\
&+ P^T\cos\alpha_e T^y\Delta y_g + P^\delta\cos\alpha_e\,\Delta\delta_д, \\
&\Delta R_y + \Delta P_y = Y^V\Delta V + Y^M\Delta M + Y^\alpha\Delta\alpha + Y^\rho\rho^y\Delta y_g + G\sin\theta_e\Delta\theta + \\
&+ P^M\sin\alpha_e\Delta M + P_e\cos\alpha_e\Delta\alpha + P^\rho\sin\alpha_e\rho^y\Delta y_g + \\
&+ P^T\sin\alpha_e T^y\Delta y_g + P^\delta\sin\alpha_e\Delta\delta_д, \\
&\Delta M_z = M_z^\delta\Delta\delta_в + M_z^\alpha\Delta\alpha + M_z^{\dot\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + M_z^{\dot\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} + M_z^V\Delta V + \\
&+ M_z^M\Delta M + M_z^\rho\rho^y\Delta y_g.
\end{aligned}\right\} \quad (8.22)$$

Запись различных величин с индексом сверху есть сокращенное обозначение частной производной от этой величины по параметру, определяемому данным индексом. Например, $X^V = \partial X/\partial V$, $X^\alpha = \partial X/\partial\alpha$ и т. д.

Рассмотрим кратко способы определения отдельных состав-

* Если рассматривать горизонтальный полет снаряда или не учитывать зависимость плотности воздуха $\rho$ от высоты; если учесть это изменение, то к указанным уравнениям нужно добавить выражения, связывающие высоту полета $y_g$ с углом $\theta_e$ и скоростью полета $V_e$, а также плотность воздуха с высотой; ниже это будет сделано.

ляющих, входящих в полученные выражения для сил и моментов. Зависимость силы лобового сопротивления $X$, подъемной силы $Y$ и момента $M_z$ от скорости $V$ и плотности воздуха $\rho$ вытекает непосредственно из следующих формул:

$$X = c_x S \frac{\rho V^2}{2}, \tag{8.23}$$

$$Y = c_y S \frac{\rho V^2}{2}, \tag{8.24}$$

$$M_z = m_z S b_A \frac{\rho V^2}{2}, \tag{8.25}$$

где $c_x = c_x(M, \alpha)$ — коэффициент силы лобового сопротивления;

$c_y = c_y(M, \alpha)$ — коэффициент подъемной силы;

$m_z = m_z\left(\delta_в, \alpha, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt}, M\right)$ — коэффициент момента $M_z$;

$S$ — площадь крыльев снаряда или любая другая, но определенная площадь (например, площадь миделя корпуса снаряда);

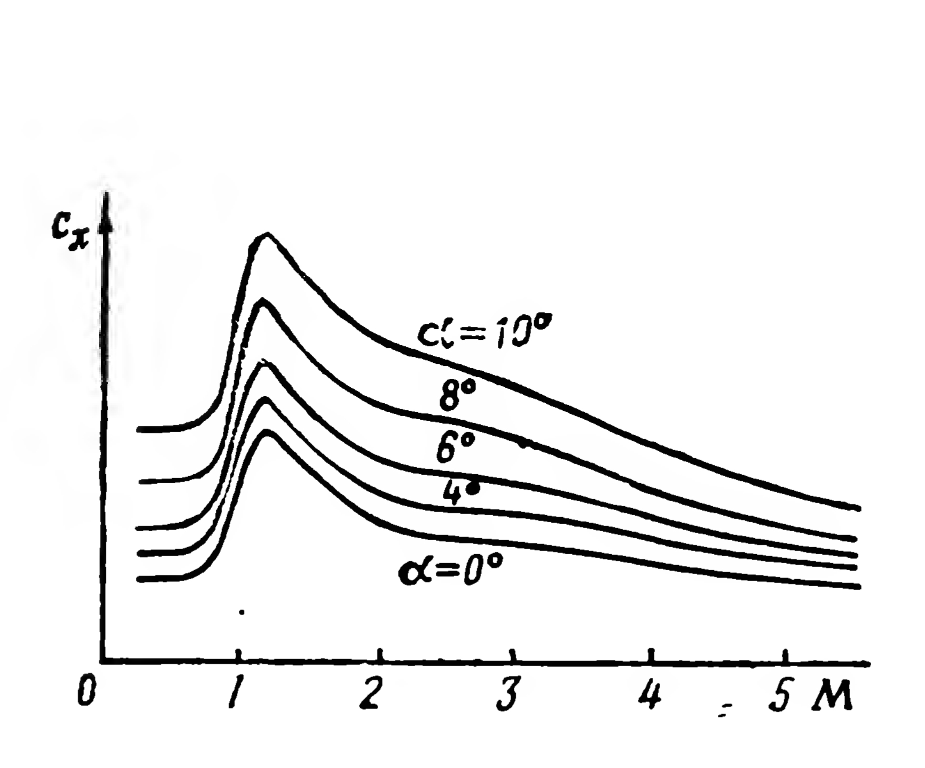
$b_A$ — средняя аэродинамическая хорда.

Таким образом, частные производные от сил и момента по $V$ и $\rho$ могут быть получены непосредственным дифференцированием выражений (8.23)—(8.25). Заметим, что частные производные $M_z^V = m_{ze} S b_A \rho_e V_e$ и $M_z^\rho = m_{ze} S b_A \frac{V_e^2}{2}$ равны нулю, так как равен нулю коэффициент момента $m_{ze}$, соответствующий невозмущенному прямолинейному полету, для которого $M_z = 0$. Частные производные от сил и моментов по углу атаки $\alpha$ и числу $M$ полета находятся графически по характеристикам снаряда, примерный вид которых приведен на фиг. 8.8, 8.9 и 8.10. Также в виде характеристик или аналитических выражений задаются и другие необходимые зависимости для снаряда —$m_z = m_z\left(\delta_в, \frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\vartheta}{dt}\right)$ и для двигателя $P = P(\delta_д, M, p, T)$. Производные от плотности $\rho$, давления $p$ и абсолютной температуры $T$ воздуха определяются на основании данных об изменении параметров атмосферы по высоте, приведенных в табл. 8.5. В качестве базовых величин в этой таблице приняты следующие: $\rho_0 = 1{,}22554$ *кг·м*$^{-3}$, $p_0 = 760$ *мм рт. ст.*, $T_0 = 288$ °C.

Для наглядности на фиг. 8.11 приведены графики $\rho/\rho_0$ и $p/p_0$ в функции высоты, построенные на основании данных табл. 8.5.

Поясним физический смысл отдельных составляющих приращения момента $\Delta M_z$. Момент $M_z^\delta \Delta\delta_в$ есть управляющий момент,

создаваемый рулем высоты снаряда. Момент $M_z^\alpha \Delta\alpha$ носит название момента статической устойчивости. Этот момент возникает за счет несовпадения аэродинамического фокуса снаряда с его центром



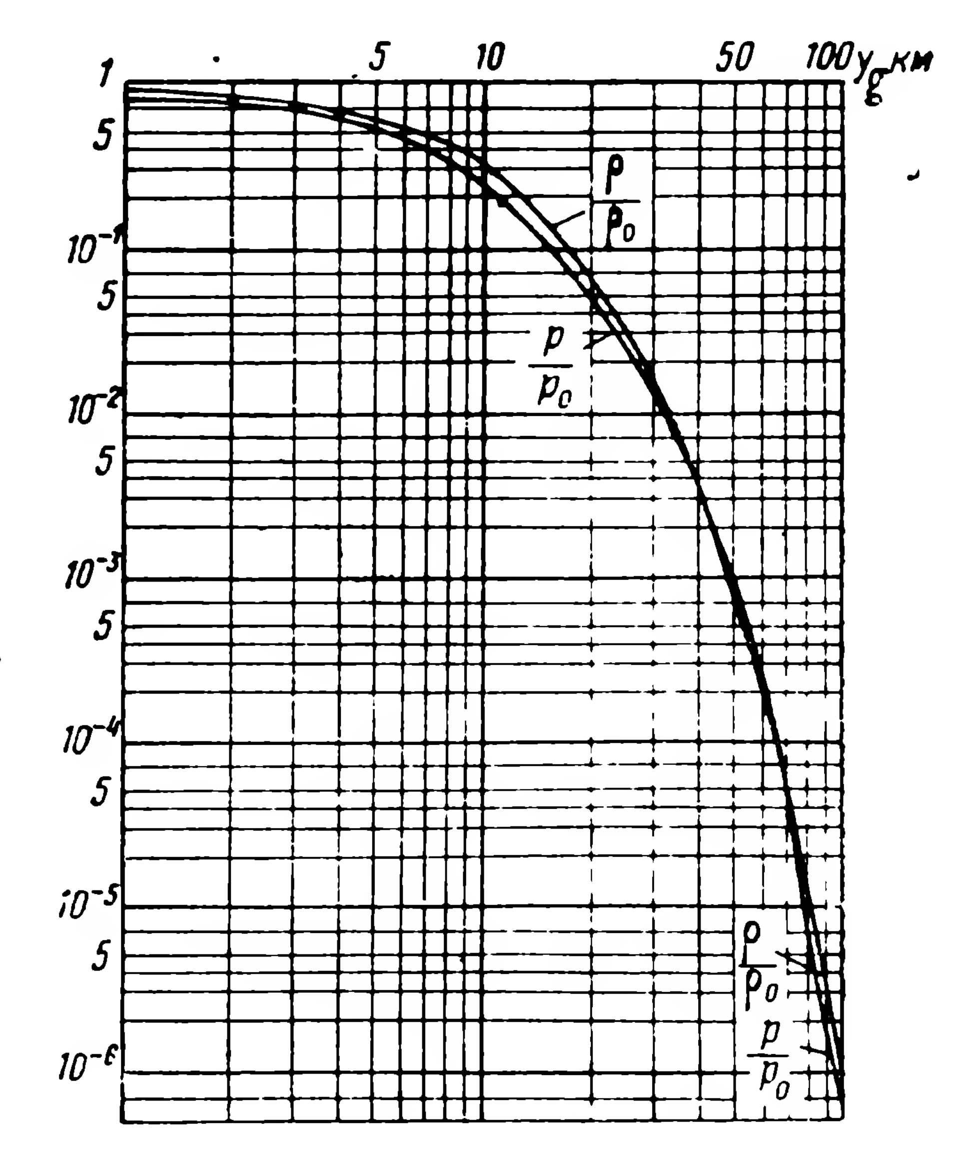

Фиг. 8.8. Зависимость коэффициента силы лобового сопротивления от числа M.

Фиг. 8.9. Зависимость коэффициента подъемной силы от числа M.

тяжести. Он определяет так называемую «статическую устойчивость», т. е. устойчивость по отношению к возмущению угла атаки у снаряда, рассматриваемую без других составляющих момента $M_z$ при возмущенном движении.

Если аэродинамическая сила приложена позади центра тяжести, то $M_z^\alpha \Delta\alpha < 0$ и снаряд является статически устойчивым. При увеличении угла атаки аэродинамическая сила также возрастет и создаст момент, уменьшающий угол

Фиг. 8.10. Зависимость коэффициента момента $m_z$ от числа M.




Фиг. 8.11. Зависимость давления и плотности воздуха от высоты.

Таблица 8.5

**Изменение параметров атмосферы по высоте***

| Высота *км* | $\frac{p}{p_0}$ | $\frac{\rho}{\rho_0}$ | $\sqrt{\frac{T_0}{T}}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,0 | 1,0 | 1,0 |
| 1 | 0,885 | 0,902 | 1,01 |
| 2 | 0,78 | 0,813 | 1,021 |
| 5 | 0,527 | 0,586 | 1,054 |
| 10 | 0,258 | 0,323 | 1,118 |
| 15 | 0,118 | 0,152 | 1,133 |
| 20 | $0{,}543\cdot10^{-1}$ | $0{,}697\cdot10^{-1}$ | 1,133 |
| 25 | $0{,}251\cdot10^{-1}$ | $0{,}316\cdot10^{-1}$ | 1,121 |
| 30 | $0{,}118\cdot10^{-1}$ | $0{,}145\cdot10^{-1}$ | 1,109 |
| 35 | $0{,}653\cdot10^{-2}$ | $0{,}679\cdot10^{-2}$ | 1,098 |
| 40 | $0{,}283\cdot10^{-2}$ | $0{,}302\cdot10^{-2}$ | 1,034 |
| 50 | $0{,}878\cdot10^{-3}$ | $0{,}764\cdot10^{-3}$ | 0,933 |
| 100 | $0{,}580\cdot10^{-6}$ | $0{,}8\cdot10^{-6}$ | 1,176 |

* В. И. Феодосьев и Г. Б. Синярев. Введение в ракетную технику, Оборонгиз, 1961.

атаки. При уменьшении угла атаки картина будет обратной. Если аэродинамическая сила приложена впереди центра тяжести, то снаряд будет статически неустойчив по углу атаки. Наконец, при совпадении точки приложения аэродинамической силы с центром тяжести снаряд статически нейтрален в отношении изменения угла атаки. В реальных условиях изменение угла атаки снаряда всегда вызывает появление не только момента $M_z \Delta\alpha$, но и ряда других моментов, которые в меньшей степени, чем момент $M_z^{\alpha} \Delta\alpha$, но тоже злияют на устойчивость полета снаряда. Поэтому момент «статической устойчивости» есть лишь один из факторов, влияющих на устойчивость и динамические свойства снаряда.

Момент $M_z^{\dot\alpha} \frac{d\Delta\alpha}{dt}$ обусловливается запаздыванием в изменении скоса потока у горизонтального оперения по сравнению с величиной этого скоса потока на крыле. Это запаздывание вызвано временем распространения возмущения от крыла до горизонтального оперения и оно сказывается тем сильнее, чем больше скорость изменения угла атаки. Момент $M_z^{\dot\alpha} \frac{d\Delta\alpha}{dt}$ всегда отрицателен.

Момент $M_z^{\dot\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} = M_z^{\omega_z} \omega_z$ носит название демпфирующего момента.

Демпфирующий момент создается за счет изменения угла атаки при вращении снаряда. Дополнительный угол атаки в какой-либо точке снаряда, обусловленный его вращением относительно центра

тяжести, тем больше, чем больше угловая скорость снаряда $\omega_z$ и расстояние от этой точки до центра тяжести. Поэтому основная часть демпфирующего момента создается изменением угла атаки оперения, поскольку именно оперение имеет значительное плечо относительно центра тяжести снаряда.

Момент $M_z^{\text{м}}\Delta M$ вызывается смещением точки приложения аэродинамических сил (аэродинамического фокуса) снаряда при больших скоростях полета, когда начинает сказываться сжимаемость воздуха. Положение этой точки определяется числом М. С возрастанием числа М аэродинамический фокус, как правило, смещается назад, за счет чего возникает отрицательный (вызывающий пикирование) момент. Следовательно, в этом случае $M_z^{\text{м}}\Delta M < 0$. Моменты $M_z^V\Delta V$ и $M_z^{\rho}\rho^y\Delta y_g$ равны нулю, как было показано выше.

Значения приращений сил и момента, определяемые выражениями (8.22), подставим в уравнения (8.17). При этом члены с искомыми параметрами продольного движения перенесем в левые части уравнений и произведем небольшие преобразования, чтобы придать этим уравнениям более удобный вид для дальнейшего использования. В результате получим линеаризованные уравнения продольного движения снаряда

$$\left.\begin{aligned}
&a_\theta\Delta\theta + a_\alpha\Delta\alpha + \frac{d\Delta V}{dt} + a_V\Delta V + a_y\Delta y_g = a_\delta\Delta\delta_{\text{д}};\\
&\frac{d\Delta\theta}{dt} - b_\theta\Delta\theta - b_\alpha\Delta\alpha - b_V\Delta V + b_y\Delta y_g = b_\delta\Delta\delta_{\text{д}};\\
&\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + c_{\dot\vartheta}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\dot\alpha}\frac{d\Delta\alpha}{dt} + c_\alpha\Delta\alpha + c_V\Delta V = c_\delta\Delta\delta_{\text{в}},\\
&\frac{d\Delta x_g}{dt} = (V_e + \Delta V)\cos\theta_e - V_e\sin\theta_e\Delta\theta;\\
&\frac{d\Delta y_g}{dt} = (V_e + \Delta V)\sin\theta_e + V_e\cos\theta_e\Delta\theta; \quad \Delta\alpha + \Delta\theta = \Delta\vartheta.
\end{aligned}\right\} \tag{8.26}$$

Коэффициенты, входящие в уравнения (8.26), имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned}
&a_\theta = g\cos\theta_e;\\
&a_\alpha = \frac{V_e}{2\tau_e}\left(c_x^\alpha - c_{ye}' + \frac{2G\cos\theta_e}{S\rho_e V_e^2}\right);\\
&a_V = \frac{1}{\tau_e}\left(c_{xe} + c_x^{\text{М}}\frac{M_e}{2} - \frac{P^{\text{М}}\cos a_e}{S\rho_e V_e a_e}\right);
\end{aligned}\right\}$$

$$a_y = \frac{V_e}{2\tau_e \rho_e}\left(c_{xe}\rho^y - \frac{2P^p \cos\alpha_e p^y}{SV_e^2} - \frac{2P^T \cos\alpha_e T^y}{SV_e^2}\right);$$

$$a_\delta = \frac{P^\delta}{m}\cos\alpha_e;$$

$$b_\theta = \frac{g\sin\theta_e}{V_e};$$

$$b_\alpha = \frac{1}{2\tau_e}\left(c_y^\alpha + c_{xe} + \frac{2G\sin\theta_e}{S\rho_e V_e^2}\right);$$

$$b_V = \frac{1}{\tau_e V_e}\left(c_{ye} + c_y^M \frac{M_e}{2} + \frac{P^M \sin\alpha_e}{S\rho_e V_e a_e}\right);$$

$$b_y = -\frac{1}{2\tau_e \rho_e}\left(c_{ye}\rho^y + \frac{2P^p \sin\alpha_e p^y}{SV_e^2} + \frac{2P^T \sin\alpha_e T^y}{SV_e^2}\right);$$

$$b_\delta = \frac{P^\delta \sin\alpha_e}{mV_e}; \qquad (8.27)$$

$$c_{\dot\vartheta} = -\frac{m_z^{\omega_z}}{J_z} b_A S \frac{\rho_e V_e^2}{2} = -\frac{m_z^{\bar\omega_z}}{2\tau_e \bar r_z^2};$$

$$c_{\dot\alpha} = -\frac{m_z^{\dot\alpha}}{J_z} b_A S \frac{\rho_e V_e^2}{2} = -\frac{m_z^{\dot{\bar\alpha}}}{2\tau_e \bar r_z^2};$$

$$c_\alpha = -\frac{m_z^\alpha \mu_п}{2\tau_e^2 \bar r_z^2}; \quad c_V = -\frac{m_z^M M_e \mu_п}{2V_e \tau_e^2 \bar r_z^2}; \quad c_\delta = \frac{m_z^\delta \mu_п}{2\tau_e^2 \bar r_z^2};$$

$$\tau_e = \frac{m}{S\rho_e V_e}; \quad \mu_п = \frac{m}{\rho_e b_A S}; \quad \bar\omega_z = \frac{b_A}{V_e}\omega_z;$$

$$\bar r_z^2 = \frac{J_z}{b_A^2 m}; \quad \dot{\bar\alpha} = \frac{b_A}{V_e}\frac{d\Delta\alpha}{dt}.$$

Коэффициент $\mu_п$ называется относительной плотностью снаряда в продольном движении, а коэффициент $\bar r_z$ — относительным радиусом инерции; черточки над $\omega_z$ и $d\Delta\alpha/dt$ указывают на безразмерную форму этих величин. Все частные производные, входящие в формулы (8.27) для коэффициентов уравнений продольного движения снаряда, вычисляются при значении аргумента, соответствующем невозмущенному режиму.

В уравнениях (8.26) углы выражены в радианах, расстояния — в метрах, скорость — в метрах в секунду. Иногда бывает целесообразно выразить углы в градусах. Для этого достаточно изменить следующие коэффициенты: $\overset{\circ}{a}_\theta = a_\theta/57{,}3$; $\overset{\circ}{a}_\alpha = a_\alpha/57{,}3$; $\overset{\circ}{a}_\delta = a_\delta/57{,}3$; $\overset{\circ}{b}_V = 57{,}3 b_V$; $\overset{\circ}{b}_y = 57{,}3 b_y$; $\overset{\circ}{c}_V = 57{,}3 c_V$. Остальные коэффициенты уравнений (8.26) при переходе от радиан к градусам не изменяются. Уравнение для вертикальной составляющей скорости снаряда при переходе к градусам должно быть записано в форме

$$\frac{d\Delta y_g}{dt} = \frac{V_e}{57{,}3}\Delta\theta^\circ.$$

Система уравнений линейного приближения (8.26) получена с учетом большого числа факторов, влияющих на движение снаряда. При этом не принималось во внимание то обстоятельство, что роль некоторых из этих факторов очень мала и, следовательно, мал соответствующий коэффициент в уравнениях (8.26). Если же это обстоятельство учесть, то поведение снаряда без системы управления, описываемое уравнениями (8.26), может быть охарактеризовано сравнительно просто.

Исследуем устойчивость режима прямолинейного полета с постоянной скоростью, который был принят за невозмущенный при линеаризации исходных уравнений. При этом исследовании два последних уравнения (8.26) выпадают из системы, так как устойчивость полета снаряда без системы управления не зависит от координаты $x_g$ его центра тяжести и мало зависит от координаты $y_g$. Коэффициенты $a_y$ и $b_y$ малы по сравнению с другими коэффициентами первых двух уравнений, а поэтому для упрощения задачи положим их равными нулю. В результате для анализа устойчивости прямолинейного и равномерного движения снаряда без системы управления остаются уравнения

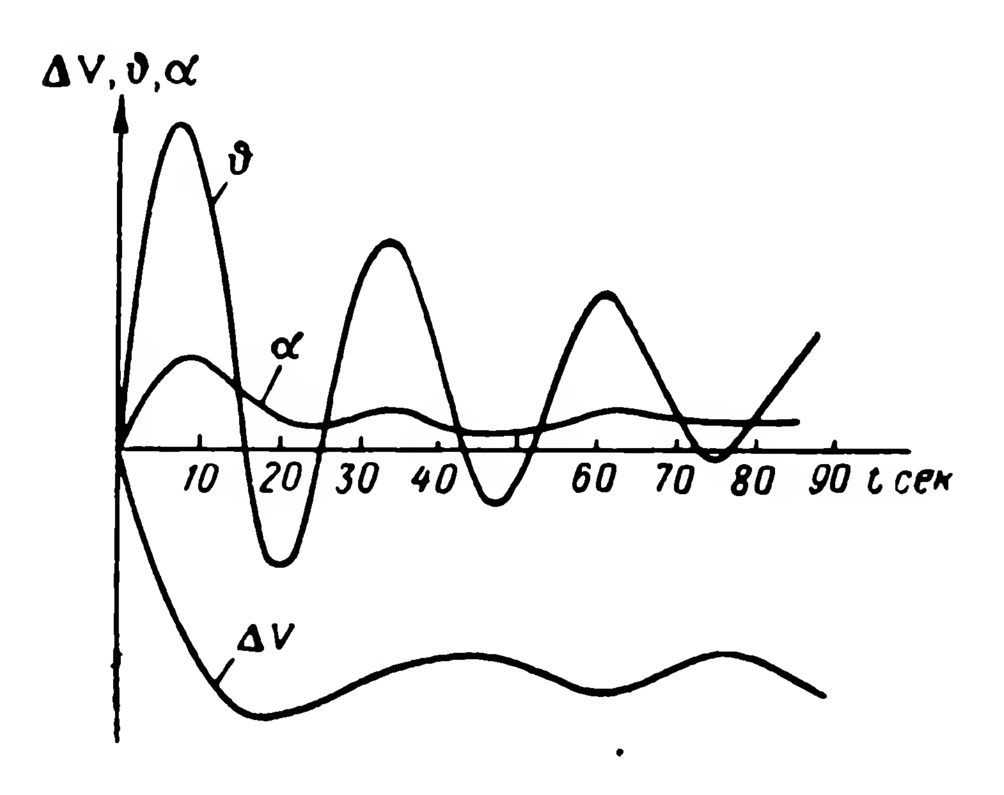
$$\left.\begin{aligned}
&a_\theta\Delta\theta + a_\alpha\Delta\alpha + \frac{d\Delta V}{dt} + a_V\Delta V = a_\delta\Delta\delta_д,\\
&\frac{d\Delta\theta}{dt} - b_\theta\Delta\theta - b_\alpha\Delta\alpha - b_V\Delta V = b_\delta\Delta\delta_д,\\
&\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + c_{\dot\vartheta}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\dot\alpha}\frac{d\Delta\alpha}{dt} + c_\alpha\Delta\alpha + c_V\Delta V = c_\delta\Delta\delta_в,\\
&\Delta\theta + \Delta\alpha = \Delta\vartheta.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.28)$$

Характеристический полином для системы уравнений (8.28) имеет вид

$$A(p) = p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4, \qquad (8.29)$$

$$
\left.\begin{aligned}
\text{где } a_1 &= a_V + b_\alpha - b_\theta + c_{\dot\vartheta} + c_{\dot\alpha};\\
a_2 &= c_1 + b_\alpha c_{\dot\vartheta} + c_\alpha + (c_{\dot\vartheta} + c_{\dot\alpha})(a_V - b_\theta);\\
a_3 &= c_\alpha (a_V - b_\theta) + c_{\dot\vartheta} c_3 + (c_{\dot\vartheta} + c_{\dot\alpha}) c_2 - a_\alpha c_V;\\
a_4 &= c_\alpha c_2 - c_V c_4;\\
c_1 &= c_2 + c_3;\\
c_2 &= a_\theta b_V - a_V b_\theta;\\
c_3 &= a_V b_\alpha - a_\alpha b_V;\\
c_4 &= a_\theta b_\alpha - a_\alpha b_\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.30)
$$

Полином $A(p)$ обычно состоит из пары больших и пары малых корней. Большие корни определяются в основном коэффициентами $a_1$ и $a_2$, а малые — коэффициентами $a_3$ и $a_4$. Большие корни полинома $A(p)$ характеризуют короткопериодическое движение снаряда, т. е. движение, связанное с установлением угла атаки $\Delta\alpha$ снаряда после какого-либо возмущения исходного режима. Малые корни характеризуют длиннопериодическое движение снаряда, представляющее собой, как правило, колебания с большим периодом и слабым затуханием приращений скорости снаряда $\Delta V$ и угла наклона траектории $\Delta\theta$ с практически постоянным углом атаки. Длиннопериодическое движение иногда называется фугоидными колебаниями.




Фиг. 8.12. Кривые изменения параметров продольного движения снаряда при отклонении руля высоты.

Основным возмущающим воздействием для управляемых снарядов является отклонение руля. Отклонение руля высоты на какой-либо постоянный угол приводит к изменению всех параметров, входящих в уравнения (8.28). При этом в соответствии с отмеченным выше разделением корней полинома $A(p)$ можно различить два этапа изменения указанных параметров. Первый этап, имеющий продолжительность несколько секунд, есть этап короткопериодического движения. За время этого этапа быстро изменяются углы $\Delta\theta$, $\Delta\vartheta$ и $\Delta\alpha$ (фиг. 8.12), причем в конце его устанавливается практически постоянный угол атаки. Второй этап имеет продолжительность несколько десятков, а иногда и сотен секунд и соответствует длиннопериодическому движению. Во время второго этапа

медленно изменяются углы $\Delta\theta$, $\Delta\vartheta$ и скорость $\Delta V$. На фиг. 8.12 показан примерный характер изменения параметров продольного движения снаряда при отклонении руля высоты.

Приближенное описание короткопериодического движения снаряда, а также приближенное значение больших корней полинома можно получить, если в системе уравнений (8.28) положить $\Delta V = b_\theta = 0$, т. е. пренебречь изменением скорости полета и считать полет горизонтальным. В результате первое из уравнений этой системы становится изолированным от остальных и эта система приобретает вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Delta\theta}{dt} - b_\alpha\Delta\alpha = 0,\\ &\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + c_{\dot\vartheta}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\dot\alpha}\frac{d\Delta\alpha}{dt} + c_\alpha\Delta\alpha = c_\delta\Delta\delta_в,\\ &\Delta\alpha + \Delta\theta = \Delta\vartheta. \end{aligned}\right\} \qquad (8.31)$$

Характеристический полином для системы (8.31) имеет структуру

$$A_1(p) = p\,[p^2 + a_1 p + a_2], \qquad (8.32)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= b_\alpha + c_{\dot\alpha} + c_{\dot\vartheta};\\ a_2 &= b_\alpha c_{\dot\vartheta} + c_\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (8.33)$$

Нулевой корень этого полинома указывает на нейтральность снаряда (с принятыми допущениями) относительно углов $\Delta\theta$ и $\Delta\vartheta$. Для устойчивости короткопериодического движения снаряда без системы управления необходимо, чтобы коэффициенты $a_1$ и $a_2$ были больше нуля. Коэффициент $a_1$ всегда положителен, так как всегда положительны его составляющие: $b_\alpha$, $c_{\dot\alpha}$ и $c_{\dot\vartheta}$. Коэффициент $a_2$ может стать отрицательным, так как для статически неустойчивого снаряда $c_\alpha < 0$. Значение этого коэффициента довольно сильно зависит от скорости полета, так что снаряд статически устойчивый при нормальной скорости полета может стать статически неустойчивым при малой скорости, т. е. при старте. Снаряд, у которого $a_2 = b_\alpha c_{\dot\vartheta} + c_\alpha < 0$, называется неустойчивым по углу атаки*. В этом случае получение устойчивого движения может быть обеспечено средствами автоматики с помощью системы управления.

Уравнения (8.31) будут ниже широко использоваться при анализе угловых движений снаряда относительно центра тяжести.

Для приближенного описания длиннопериодического движения и отыскания приближенного значения малых корней полино-

* Иногда такие снаряды называют неустойчивыми по перегрузке.

ма $A(p)$ необходимо сделать предположение о мгновенной балансировке снаряда относительно оси $z_1$. Действительно, после окончания короткопериодического движения быстрые изменения углов $\Delta\vartheta$ и $\Delta\alpha$ прекращаются, и членами с производными этих углов в третьем уравнении системы (8.28) можно пренебречь, что эквивалентно допущению о мгновенной балансировке снаряда:

$$c_\alpha \Delta\alpha + c_V \Delta V = c_\delta \Delta\delta_в. \tag{8.34}$$

В результате система уравнений (8.28) упрощается и приобретает следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &a_\theta \Delta\theta + a_\alpha \Delta\alpha + \frac{d\Delta V}{dt} + a_V \Delta V = a_\delta \Delta\delta_д, \\ &\frac{d\Delta\theta}{dt} - b_\theta \Delta\theta - b_\alpha \Delta\alpha - b_V \Delta V = b_\delta \Delta\delta_д, \\ &c_\alpha \Delta\alpha + c_V \Delta V = c_\delta \Delta\delta_в. \end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

Характеристический полином для системы уравнений (8.35):

$$A_2(p) = p^2 + a_1 p + a_2, \tag{8.36}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = a_V - b_\theta - a_\alpha \frac{c_V}{c_\alpha}; \\ &a_2 = c_2 - c_4 \frac{c_V}{c_\alpha}. \end{aligned}\right\} \tag{8.37}$$

Значения коэффициентов $c_2$ и $c_4$ приведены в формулах (8.30). Если один из коэффициентов $a_1$ или $a_2$ окажется отрицательным, то длиннопериодическое движение снаряда без системы управления становится неустойчивым, т. е. любой из параметров этого движения $\Delta V$, $\Delta\theta$ или $\Delta\vartheta$ с увеличением времени неограниченно отклоняется от значения, имевшего место в исходном невозмущенном режиме. Отрицательное значение коэффициенты $a_1$ и $a_2$ могут, очевидно, получить в следующих случаях:

1) при малом или отрицательном значении $c_2$, что приводит к $a_2<0$; такой случай возможен при $c_y^м<0$, так как этот коэффициент входит в формулу для $b_V$;

2) при очень большом значении $c_V$, связанном с большим смещением фокуса аэродинамических сил при изменении скорости полета; в этом случае могут оказаться отрицательными как $a_1$, так и $a_2$;

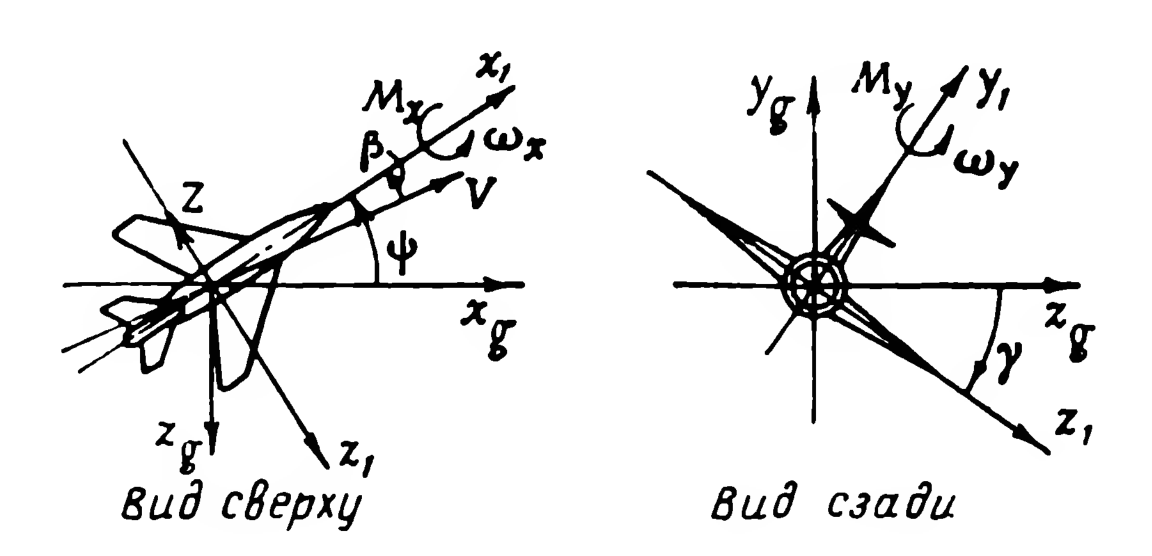
3) при отрицательном значении $a_V$, могущем возникнуть при большом значении производной $P^м$; в этом случае $a_1<0$;

4) при большом значении $b_\theta$, которое растет при увеличении угла наклона траектории $\theta$ при кабрировании; за счет большого значения $b_\theta$ могут стать отрицательными и $a_1$ и $a_2$; при пикировании $b_\theta < 0$ и устойчивость полета снаряда будет увеличиваться. Во всех этих случаях устойчивость движения снаряда может быть обеспечена за счет соответствующего выбора параметров системы управления снарядом.

Уравнения (8.35) будут использоваться при анализе движения центра тяжести снаряда.

## § 8.5. УРАВНЕНИЯ БОКОВОГО ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ ЛИНЕАРИЗАЦИИ, И ИХ АНАЛИЗ

Для получения уравнений бокового движения необходимо найти аналитические выражения для приращения силы и моментов, входящих в систему уравнений (8.18). Вначале рассмотрим уравнения бокового движения для плоскокрылого снаряда, так как именно




Фиг. 8.13. Сила и моменты, действующие на снаряд при боковом движении.

$x_1$, $y_1$, $z_1$ — оси связанной системы координат, $\gamma$ — угол крена. $\psi$ — угол рыскания, $\beta$ — угол скольжения, $Z$ — боковая сила, $M_x$ — момент аэродинамических сил относительно оси $x_1$, $M_y$ — момент аэродинамических сил относительно оси $y_1$.

в этом случае боковое движение более сложно. После решения этой задачи нетрудно найти и уравнения бокового движения для крестокрылого снаряда. На фиг. 8.13 показаны силы * и моменты, действующие на плоскокрылый снаряд в боковом движении.

Сила $Z$ и моменты $M_x$ и $M_y$ определяются формулами

$$Z = c_z S \frac{\rho V^2}{2} + G \sin \gamma; \tag{8.38}$$

* Так как было принято, что сила тяги двигателя проходит через центр тяжести снаряда, то нулю равны и проекции момента этой силы на оси, т. е. $\Delta N_x = \Delta N_y = 0$.

$$M_x = m_x l S \frac{\rho V^2}{2}; \qquad (8.39)$$

$$M_y = m_y l S \frac{\rho V^2}{2}, \qquad (8.40)$$

где $l$—размах крыльев:

$c_z = c_z(\beta, M)$ — коэффициент боковой силы;
$m_x = m_x(\delta_э, \delta_н, \omega_x, \omega_y, \beta, M)$ — коэффициент момента $M_x$;
$m_y = m_y(\delta_э, \delta_н, \omega_x, \omega_y, \beta, M)$ — коэффициент момента $M_y$;
$\delta_н$ — угол отклонения руля направления;
$\delta_э$ – угол отклонения элеронов.

Формулы (8.38) — (8.40) показывают, что рассматриваемые силы и моменты являются нелинейными функциями ряда аргументов *:

$$Z = Z(\beta, \gamma); \quad M_x = M_x(\delta_э, \delta_н, \omega_x, \omega_y, \beta);$$

$$M_y = M_y(\delta_э, \delta_н, \omega_x, \omega_y, \beta).$$

В исходном невозмущенном режиме прямолинейного и равномерного полета все параметры бокового движения и, следовательно, сила $Z$ и моменты $M_x$ и $M_y$ равны нулю. При отклонении от невозмущенного режима приращения силы $\Delta Z$ и моментов $\Delta M_x$ и $\Delta M_y$, как и в случае продольного движения, определяются первыми членами разложения этих функций по степеням своих аргументов:

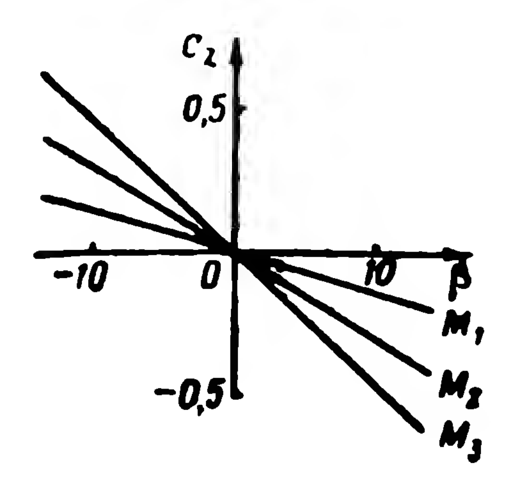
$$\left.\begin{aligned} \Delta Z &= Z^\beta \beta + Z^\gamma \gamma, \\ \Delta M_x &= M_x^{\delta_э}\delta_э + M_x^{\delta_н}\delta_н + M_x^{\omega_x}\omega_x + M_x^{\omega_y}\omega_y + M_x^\beta \beta, \\ \Delta M_y &= M_y^{\delta_э}\delta_э + M_y^{\delta_н}\delta_н + M_y^{\omega_x}\omega_x + M_y^{\omega_y}\omega_y + M_y^\beta \beta. \end{aligned}\right\} \qquad (8.41)$$

Частная производная $Z^\gamma$ определяется непосредственно по формуле (8.38). Для определения частных производных $Z^\beta$, $M_x^{\delta_э}$, $M_x^{\delta_н}$ и т. д. на основании расчетов или продувок снаряда (его модели) в аэродинамической трубе получаются нужные зависимости для коэффициентов $c_z$, $m_x$, $m_y$ от соответствующих величин. Некоторые из этих зависимостей приведены в качестве примера на фиг. 8.14—8.18. Очевидно, что все характеристики должны сниматься при числе М, соответствующем исходному невозмущенному режиму.

Поясним физический смысл отдельных составляющих моментов $\Delta M_x$ и $\Delta M_y$. Моменты $M_x^{\delta_э}\delta_э$ и $M_y^{\delta_н}\delta_н$ являются основными управ-

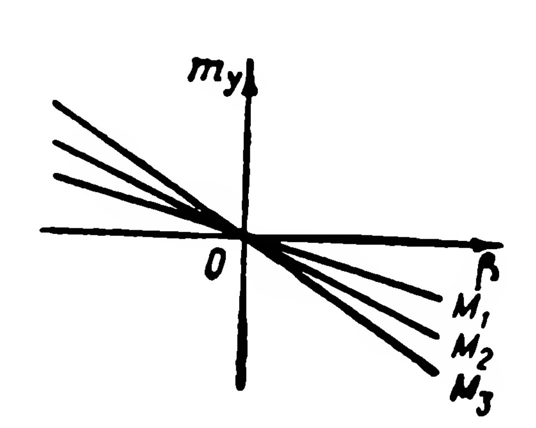
* Из формул (8.38) — (8.40) видно, что сила $Z$ и моменты $M_x$ и $M_y$ зависят и от $\rho$, $V$ и $M$, но так как эти величины относятся к параметрам продольного движения, то при анализе изолированного бокового движения методом линеаризации их влияние учесть нельзя.

ляющими моментами рулевых органов — элеронов и руля направления. Моменты $M_x^{\delta_н}\delta_н$ и $M_y^{\delta_э}\delta_э$ являются паразитными моментами, создающими ненужные воздействия на снаряд при отклонении рулевых органов. Момент $M_x^{\delta_н}\delta_н$ вызывает крен снаряда при отклонении руля направления, а момент $M_y^{\delta_э}\delta_э$ стремится повернуть



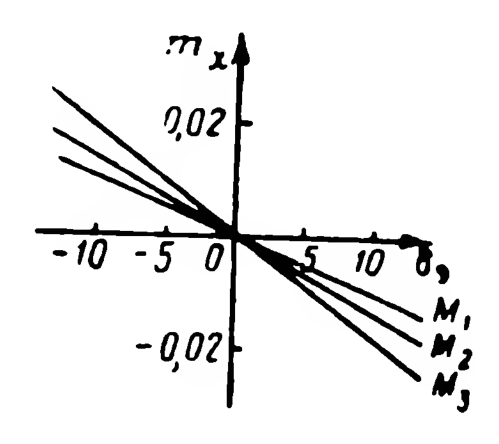

Фиг. 8.14. Зависимость коэффициентов боковой силы от угла скольжения.

Фиг. 8.15. Зависимость коэффициента момента $m_x$ от угла скольжения.

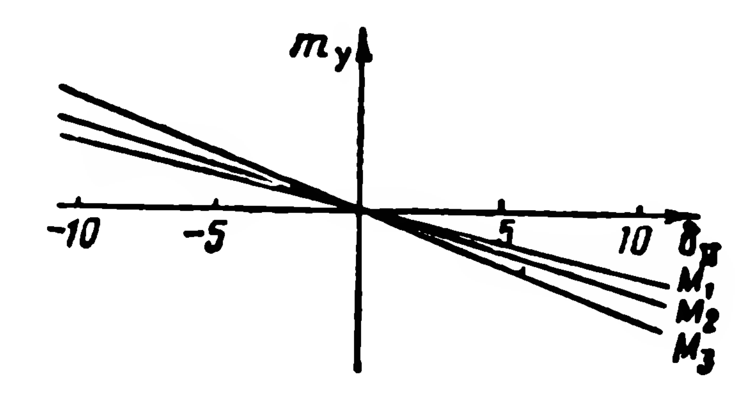



Фиг. 8.16. Зависимость коэффициента момента $m_y$ от угла скольжения.

снаряд относительно нормальной оси $y_1$ при отклонении элеронов. Обычно эти моменты очень невелики и здесь введены лишь для общности изложения. В большинстве задач этими моментами можно пренебречь.




Фиг. 8.17. Зависимость коэффициента момента $m_x$ от угла отклонения элеронов.




Фиг. 8.18. Зависимость коэффициента момента $m_y$ от угла отклонения руля направления.

Демпфирующий поперечный момент $M_x^{\omega_x}\omega_x$ и спиральный заворачивающий момент $M_y^{\omega_x}\omega_x$ появляются при вращении снаряда относительно оси $x_1$, когда одно крыло опускается, а другое поднимается. Угол атаки и подъемная сила на опускающемся крыле увеличиваются, а на поднимающемся — уменьшаются, в результате чего появляется момент $M_x^{\omega_x}\omega_x$, пропорциональный угловой скорости вращения снаряда $\omega_x$ и направленный против этой скорости ($M_x^{\omega_x} < 0$). Изменение лобового сопротивления опускающегося и поднимающегося крыльев приводит к появлению завора-

чивающего момента $M_y^{\omega_x} \omega_x$ вокруг оси $y_1$, пропорционального угловой скорости $\omega_x$. Этот момент на малых углах атаки обычно отрицателен ($M_y^{\omega_x} < 0$), т. е. стремится повернуть снаряд в отрицательном направлении (вправо) относительно оси $y_1$ при положительном направлении (правое крыло опускается) угловой скорости $\omega_x$.

Демпфирующий заворачивающий момент $M_y^{\omega_y} \omega_y$ появляется благодаря изменению угла скольжения при вращении снаряда относительно оси $y_1$. Как и для демпфирующего момента $M_z^{\omega_z} \omega_z$, в продольном движении в образовании момента $M_y^{\omega_y} \omega_y$ основную роль играет оперение — в данном случае вертикальное. Момент $M_y^{\omega_y} \omega_y$ отрицателен ($M_y^{\omega_y} < 0$).

Момент $M_x^{\omega_y} \omega_y$ называется поперечным спиральным моментом. Вращение снаряда относительно оси $y_1$ увеличивает воздушную скорость и, следовательно, подъемную силу на внешнем крыле и уменьшает на внутреннем. В результате появляется момент $M_x^{\omega_y} \omega_y$ вокруг оси $x_1$, пропорциональный угловой скорости $\omega_y$. Этот момент отрицателен ($M_x^{\omega_y} < 0$), т. е. он стремится вызвать крен на левое крыло при положительной (влево) угловой скорости $\omega_y$.

Момент $M_x^{\beta} \beta$ есть момент поперечной статической устойчивости. Он вызывает крен снаряда при появлении угла скольжения. Снаряд обладает поперечной статической устойчивостью при $M_x^{\beta} < 0$. Это означает, что скольжение, возникающее при крене снаряда, создает момент относительно оси $x_1$, стремящийся уменьшить крен.

Момент $M_y^{\beta} \beta$ называется моментом флюгерной устойчивости. Этот момент аналогичен моменту статической устойчивости в продольном движении. Он создается за счет того, что результирующая боковая сила (от фюзеляжа и вертикального оперения, а у крестокрылого и от вертикальных крыльев), появляющаяся при наличии у снаряда угла скольжения, не проходит через центр тяжести. Если точка приложения этой силы находится сзади центра тяжести, то $M_y^{\beta} < 0$ и снаряд флюгерно устойчив. Момент $M_y^{\beta} \beta$ в этом случае стремится уменьшить угол скольжения $\beta$. При крене снаряда возникает скольжение на опущенное крыло. Флюгерно устойчивый снаряд разворачивается в сторону опущенного крыла и уменьшает угол скольжения.

Значения силы и моментов, определяемые выражениями (8.41), подставим в уравнения (8.18). При этом члены с искомыми параметрами бокового движения перенесем в левые части уравнений и приведем эти уравнения к наиболее удобному для дальнейшего использования виду. В результате получим систему урав-

нений, которая в линейном приближении описывает боковое движение:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\beta}{dt}+k_\beta\beta-\frac{d\psi}{dt}-\alpha_e\frac{d\gamma}{dt}-k_\gamma\gamma=0,\\
&\frac{d^2\gamma}{dt^2}+l_{\dot\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+l_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt}+l_\beta\beta=l_{\delta_э}\delta_э+l_{\delta_н}\delta_н,\\
&\frac{d^2\psi}{dt^2}+n_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt}+n_{\dot\gamma}\frac{d\gamma}{dt}+n_\beta\beta=n_{\delta_э}\delta_э+n_{\delta_н}\delta_н,\\
&\frac{dz_g}{dt}=V_e(\beta-\psi),
\end{aligned}\right\}\qquad(8.42)$$

где $\alpha_e$ — значение угла атаки в невозмущенном режиме.

Коэффициенты, входящие в уравнения (8.42), имеют следующее значение:

$$\left.\begin{aligned}
&k_\beta=-\frac{c_z^\beta}{2\tau_e};\quad k_\gamma=\frac{g}{V_e};\quad l_{\dot\gamma}=-\frac{\bar m_x^{\omega_x}}{\tau_e i_x};\quad l_{\dot\psi}=-\frac{\bar m_x^{\omega_y}}{\tau_e i_x};\\
&l_\beta=-\frac{m_x^\beta}{\tau_e^2 i_x}\mu_б;\quad l_{\delta_э}=\frac{m_x^{\delta_э}}{\tau_e^2 i_x}\mu_б;\quad l_{\delta_н}=\frac{m_x^{\delta_н}}{\tau_e^2 i_x}\mu_б;\\
&n_{\dot\psi}=-\frac{\bar m_y^{\omega_y}}{\tau_e i_y};\quad n_{\dot\gamma}=-\frac{\bar m_y^{\omega_x}}{\tau_e i_y};\quad n_\beta=-\frac{m_y^\beta}{\tau_e^2 i_y}\mu_б;\\
&n_{\delta_э}=\frac{m_y^{\delta_э}}{\tau_e^2 i_y}\mu_б;\quad n_{\delta_н}=\frac{m_y^{\delta_н}}{\tau_e^2 i_y}\mu_б;\quad \bar\omega_x=\frac{\omega_x}{2V_e}l;\quad \bar\omega_y=\frac{\omega_y}{2V_e}l;\\
&\mu_б=\frac{2m}{\rho_e S l};\quad \tau_e=\frac{m}{\rho_e S V_e};\quad i_x=\frac{4J_x}{ml^2};\quad i_y=\frac{4J_y}{ml^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(8.43)$$

Коэффициент $\mu_б$ называется относительной плотностью снаряда в боковом движении, а $i_x$ и $i_y$ — коэффициенты момента инерции снаряда относительно осей $x_1$ и $y_1$; черточки над $\omega_x$ и $\omega_y$ указывают на безразмерную форму этих величин. Все частные производные, входящие в формулы (8.43), вычисляются при значении аргумента, соответствующем невозмущенному режиму.

В системе уравнений (8.42) все углы выражены в радианах. Если возникает необходимость измерять углы в градусах, то коэффициенты первых трех уравнений не изменяются, так как в них входят только угловые параметры бокового движения. Последнее уравнение при измерении углов в градусах должно быть записано в форме

$$\frac{dz_g}{dt}=\frac{V_e}{57{,}3}(\beta^\circ-\psi^\circ).$$

Для анализа бокового движения крестокрылого снаряда или снаряда с кольцевым крылом уравнения (8.42) должны быть несколько изменены. Обычно такие снаряды стабилизируются относительно продольной оси в определенном положении. Полагая, что система стабилизации снаряда по крену работает достаточно хорошо, можно считать, что и углы крена и производные этих углов невелики, а поэтому положить их в первом и третьем уравнении системы (8.42) равными нулю. В результате эта система разделяется на две части. В первую входят уравнения, описывающие боковое движение снаряда, стабилизированного по крену:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dt} + k_\beta \beta - \frac{d\psi}{dt} = 0, \\ &\frac{d^2\psi}{dt^2} + n_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} + n_{\dot\beta}\frac{d\beta}{dt} + n_\beta \beta = n_{\delta_н}\delta_н, \\ &\frac{dz_g}{dt} = V_e(\beta - \psi). \end{aligned}\right\} \quad (8.44)$$

Появление во втором уравнении (8.44) члена $n_{\dot\beta}\dfrac{d\beta}{dt}$ связано с учетом скоса потока на оперении. Этот член имеет то же происхождение, что и член $c_{\dot\alpha}\dfrac{d\Delta\alpha}{dt}$ в уравнениях (8.26), т. е. он появляется в результате интерференции между крылом и оперением. В уравнениях бокового движения плоскокрылого снаряда этот член отсутствовал, так как отсутствовали крылья в плоскости $x_1Oy_1$. Значение коэффициента $n_{\dot\beta}$ равно

$$n_{\dot\beta} = -\frac{m_y^{\bar{\dot\beta}}}{\tau_e i_y}, \quad (8.45)$$

где

$$\bar{\dot\beta} = \frac{l}{2V_e}\frac{d\beta}{dt}.$$

Вторая часть состоит из одного уравнения, которое должно использоваться при расчете системы управления или стабилизации крена *:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + l_{\dot\gamma}\frac{d\gamma}{dt} = l_{\delta_э}\delta_э. \quad (8.46)$$

Исследуем устойчивость бокового движения снаряда без системы управления. Уравнения (8.44) бокового движения крестокры-

* В уравнениях (8.44) и (8.46) члены $l_н\delta_н$ и $n_э\delta_э$ отброшены как малые по сравнению с остальными членами соответствующих уравнений.

лого снаряда со стабилизацией угла крена полностью идентичны упрощенным уравнениям (8.31) для горизонтального продольного движения с постоянной скоростью. Третье из уравнений (8.44) при анализе устойчивости не учитывается, так как координата центра тяжести $z_g$ не влияет на устойчивость полета. Характеристический полином для двух первых уравнений системы (8.44) имеет вид

$$A(p) = p(p^2 + a_1 p + a_2), \tag{8.47}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= k_\beta + n_{\dot\beta} + n_{\dot\psi}, \\ a_2 &= k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta. \end{aligned}\right\} \tag{8.48}$$

По структуре и физическому смыслу отдельных членов коэффициенты $a_1$ и $a_2$ полинома (8.47) совпадают с коэффициентами полинома (8.32), которые определяются по формулам (8.33). Поэтому анализ значения коэффициентов (8.33) и выводы относительно устойчивости короткопериодического продольного движения, приведенные в § 8.4, могут быть применены к полиному (8.47) и к устойчивости бокового движения крестокрылого снаряда со стабилизированным углом крена. Нужно лишь иметь в виду, что коэффициенты $b_\alpha$, $c_\alpha$, $c_{\dot\alpha}$ и $c_{\dot\vartheta}$ продольного движения эквивалентны (для крестокрылого снаряда) коэффициентам $k_\beta$, $n_\beta$, $n_{\dot\beta}$ и $n_{\dot\psi}$ бокового движения соответственно.

Уравнения (8.42), описывающие боковое движение плоскокрылого снаряда без системы управления, оказываются несколько сложнее, чем для крестокрылого снаряда. Отбрасывая последнее из уравнений (8.42), как относящееся к движению центра тяжести, получим систему из трех уравнений. Характеристический полином для этой системы имеет вид

$$A_1(p) = p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4, \tag{8.49}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{где } a_1 &= k_\beta + l_{\dot\gamma} + n_{\dot\psi}; \\ a_2 &= l_{\dot\psi} n_{\dot\gamma} + l_{\dot\gamma} n_{\dot\psi} + k_\beta (l_{\dot\gamma} + n_{\dot\psi}) + n_\beta + \alpha_e l_\beta; \\ a_3 &= k_\beta (l_{\dot\gamma} n_{\dot\psi} - n_{\dot\gamma} l_{\dot\psi}) + k_\gamma l_\beta + l_{\dot\gamma} n_\beta - n_{\dot\gamma} l_\beta + \alpha_e (l_\beta n_{\dot\psi} - l_{\dot\psi} n_\beta); \\ a_4 &= k_\gamma (l_\beta n_{\dot\psi} - l_{\dot\psi} n_\beta). \end{aligned}\right\} \tag{8.50}$$

При образовании характеристического полинома (8.49) в качестве неизвестных функций в первых трех уравнениях системы (8.42) были приняты $\gamma$, $\beta$ и $\frac{d\psi}{dt}$, так как снаряд без системы управления нейтрален относительно угла $\psi$.

Коэффициент $a_4$ характеристического полинома (8.49), как правило, является весьма малой положительной или отрицательной величиной. Вследствие этого полином (8.49) имеет один малый

вещественный корень, приблизительно равный $-(a_4/a_3)$. Второй вещественный корень очень большой и приблизительно равен коэффициенту $a_1$, взятому с отрицательным знаком. Этот большой отрицательный корень характеризует интенсивно затухающее движение снаряда по крену, так как основная составляющая $a_1$ — коэффициент демпфирующего момента крена $l_{\dot{\gamma}}$. Остальные два корня обычно бывают комплексными сопряженными с малой вещественной частью. Если малый корень положителен ($a_4<0$), а большой корень и вещественные части комплексных корней отрицательны, то возникает так называемая спиральная неустойчивость бокового движения снаряда. Так как положительный корень мал, то параметры, характеризующие боковое движение ($\gamma$, $\beta$ и $\frac{d\psi}{dt}$), будут медленно нарастать, вследствие чего снаряд будет двигаться по спирали. Если же комплексные корни имеют положительную вещественную часть, то возникает колебательная неустойчивость: снаряд будет переваливаться с крыла на крыло с нарастающими амплитудами колебаний углов крена и скольжения. Все эти недопустимые явления устраняются системой управления снаряда при соответствующем выборе ее параметров.

Снаряды, обладающие полной (или почти полной) аэродинамической симметрией, практически не изменяют своего движения при повороте относительно продольной оси. Поэтому у них нет необходимости стабилизировать крен, и они могут медленно поворачиваться в полете вследствие некоторой неточности в изготовлении планера. Очевидно, что элероны у таких снарядов отсутствуют. При описании бокового движения таких снарядов целесообразно использовать не связанные, а поточные оси, которые связаны с траекторией, а не со снарядом и поэтому не поворачиваются вместе с ним в пространстве.

Движение снарядов, вращающихся вокруг продольной оси с большой скоростью, не может быть разделено на продольное и боковое. На эти снаряды действует еще ряд дополнительных сил, кроме рассмотренных в этой главе. Поэтому к движению таких снарядов нельзя применить полученные здесь системы уравнений. В настоящей книге вращающиеся снаряды не расматриваются.

## § 8.6. УРАВНЕНИЯ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ ГРУППИРОВКИ

Составим уравнения изолированного продольного движения снаряда. Для этого используем фиг. 8.7, где показаны силы и моменты, приложенные к снаряду в этом движении. Уравнения про-

екций сил запишем в поточных осях $x$, $y$, а уравнение моментов — относительно связанной со снарядом оси $z_1$. Эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{dV}{dt} = -X - G\sin\theta + P\cos\alpha, \\ & mV\frac{d\theta}{dt} = Y = G\cos\theta + P\sin\alpha, \\ & J_z\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M_z, \\ & \vartheta = \theta + \alpha, \\ & \frac{dx_g}{dt} = V\cos\theta, \\ & \frac{dy_g}{dt} = V\sin\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (8.51)$$

Подставив в (8.51) значения силы лобового сопротивления $X$, подъемной силы $Y$ и момента $M_z$ на основании формул (8.23)—(8.25) и, перенеся члены с неизвестными функциями в левую часть, получим две группы уравнений

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{dV}{dt} + c_x S\frac{\rho V^2}{2} = -G\sin\theta + P\cos\alpha; \\ & \frac{dx_g}{dt} = V\cos\theta; \quad \frac{dy_g}{dt} = V\sin\theta; \end{aligned}\right\} \qquad (8.52)$$

$$\left.\begin{aligned} & mV\frac{d\theta}{dt} - c_y^{\alpha} S\frac{\rho V^2}{2}\alpha + G\cos\theta - P\sin\alpha = 0; \\ & J_z\frac{d^2\vartheta}{dt} - m_z^{\bar{\omega}_z} S b_A^2\frac{\rho V}{2}\frac{d\vartheta}{dt} - m_z^{\bar{\dot{\alpha}}} S b_A^2\frac{\rho V}{2}\frac{d\alpha}{dt} - \\ & - m_z^{\alpha} S b_A\frac{\rho V^2}{2}\alpha = m_z^{M} S b_A\frac{\rho V^3}{2a} + m_z^{\delta} S b_A\frac{\rho V^2}{2}\delta_{в}, \\ & \vartheta = \theta + \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (8.53)$$

В группу уравнений (8.52) вошли уравнения, члены которых определяются главным образом движением центра тяжести снаряда, т. е. движением значительно более медленным, чем движение относительно центра тяжести. Сделав определенные допущения относительно углов $\theta$ и $\alpha$*, можно из первого уравнения (8.52) определить скорость полета снаряда $V$. Так как это уравнение нелинейное и с переменными коэффициентами (от времени зависят $m$, $c_x$, $\alpha$, $\theta$), то его решение наиболее просто может быть

* Например, приближенное значение этих углов в функции времени, как будет показано ниже, можно найти из траекторий, построенных на основании учета лишь кинематики движения снаряда.

получено численным или графическим способами. Затем из второго и третьего уравнений определяются $x_g$ и $y_g$.

После того как скорость полета определена, ее значение как функция времени подставляется в уравнения (8.53), которые в результате этого превращаются в линейные уравнения с переменными коэффициентами. Оставшиеся в первом уравнении (8.53) нелинейные функции $\cos\theta$ и $\sin\alpha$ путем какого-либо упрощающего предположения сводим к линейным. Например, при полете, близком к горизонтальному, можно положить $\cos\theta \approx 1$; благодаря малости угла атаки можно считать, что $\sin\alpha \approx \alpha$. При необходимости в этих уравнениях можно также учесть зависимость плотности воздуха $\rho$ от высоты как функцию времени, так как зависимость высоты $y_g$ от времени определяется третьим из уравнений (8.52). Связь между высотой и плотностью воздуха задана графически (см. фиг. 8.11). Точно так же на основании режима работы двигателя можно приближенно определить, как изменяется масса снаряда $m$ и момент инерции $J_z$.

Полученная таким образом система линейных уравнений с переменными коэффициентами может быть проанализирована любым из изложенных в § 2.4 методов.

## § 8.7. УРАВНЕНИЯ БОКОВОГО ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА, ПОЛУЧЕННЫЕ МЕТОДОМ ГРУППИРОВКИ

Составим уравнения изолированного бокового движения плоскокрылого снаряда в связанных осях. Для этого используем фиг. 8.13. Полагая, что связанные оси являются главными осями инерции, и пренебрегая как малыми всеми членами, в которые входят параметры продольного движения, получим систему уравнений бокового движения *

$$\left.\begin{aligned} & mV\frac{d\beta}{dt} - mV\frac{d\psi}{dt} = Z, \\ & J_x\frac{d^2\gamma}{dt^2} = M_x, \\ & J_y\frac{d^2\psi}{dt^2} = M_y, \\ & \frac{dz_g}{dt} = V(\sin\beta - \sin\psi). \end{aligned}\right\} \qquad (8.54)$$

Подставив в (8.54) значения боковой силы $Z$ и моментов $M_x$

* Моменты от реактивных сил не учитывались, так как предполагается, что сила тяги проходит через центр тяжести.

и $M_y$ на основании формул (8.41) и перенеся члены с неизвестными функциями в левую часть, получим

$$\left.\begin{aligned}
&mV\frac{d\beta}{dt}-mV\frac{d\psi}{dt}-c_z^{\beta}S\frac{\rho V^2}{2}\beta-G\sin\gamma=0,\\
&J_x\frac{d^2\gamma}{dt^2}-\bar{m}_x^{\omega_x}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho V}{2}\frac{d\gamma}{dt}-\bar{m}_x^{\omega_y}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho V}{2}\frac{d\psi}{dt}-m_x^{\beta}Sl\frac{\rho V^2}{2}\beta=m_x^{\delta}Sl\frac{\rho V^2}{2}\delta_э,\\
&J_y\frac{d^2\psi}{dt^2}-\bar{m}_y^{\omega_y}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho V}{2}\frac{d\psi}{dt}-\bar{m}_y^{\omega_x}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho V}{2}\frac{d\gamma}{dt}-m_y^{\beta}Sl\frac{\rho V^2}{2}\beta=m_y^{\delta}Sl\frac{\rho V^2}{2}\delta_н.\\
&\frac{dz_g}{dt}=V(\sin\beta-\sin\psi).
\end{aligned}\right\}\quad(8.55)$$

В первом уравнении есть одна нелинейная функция $\sin\gamma$. В подавляющем большинстве случаев угол крена плоскокрылых снарядов ограничивается такими значениями, что с достаточной для практики степенью точности можно считать $\sin\gamma\approx\gamma$. В этом случае первое уравнение становится линейным. Таким образом, в системе уравнений (8.55) первые три уравнения являются линейными с переменными коэффициентами, причем зависимости от времени для скорости полета $V$ и в случае необходимости для плотности воздуха $\rho$ и массы снаряда $m$ берутся на основании результатов, полученных при решении уравнений продольного движения. По изменению массы снаряда можно приближенно рассчитать, как зависят от времени полета моменты инерции $J_x$ и $J_y$. Что касается четвертого уравнения (8.55), то оно является изолированным и может быть проинтегрировано после получения из первых трех уравнений функций $\beta(t)$ и $\psi(t)$. Если же через систему управления оно окажется связанным с другими уравнениями, то при исследовании всей системы для получения аналитического решения это уравнение необходимо превратить в линейное путем каких-либо допущений. Наиболее простыми являются обычно близкие к действительности допущения о малости углов $\beta$ и $\psi$, на основании чего можно положить $\sin\beta\approx\beta$ и $\sin\psi\approx\psi$.

Если снаряд крестокрылый и стабилизирован по углу крена, то систему уравнений (8.55) можно разделить на две изолированные группы. В первую группу входят уравнения движения относительно оси $y_1$ и вдоль оси $z_g$:

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{d\beta}{dt}-m\frac{d\psi}{dt}-c_z^{\beta}S\frac{\rho V}{2}\beta=0,\\
&J_y\frac{d^2\psi}{dt^2}-\bar{m}_y^{\omega_y}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho V}{2}\frac{d\psi}{dt}-\bar{m}_y^{\dot\beta}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho V}{2}\frac{d\beta}{dt}-m_y^{\beta}Sl\frac{\rho V^2}{2}\beta=m_y^{\delta}Sl\frac{\rho V^2}{2}\delta_н,\\
&\frac{dz_g}{dt}=V(\sin\beta-\sin\psi).
\end{aligned}\right\}\quad(8.56)$$

Во вторую группу входит уравнение вращения относительно оси $x_1$, используемое при расчете системы стабилизации крена снаряда:

$$J_x \frac{d^2\gamma}{dt^2} - m_x^{\bar{\omega}_x} S \frac{l^2}{2} \frac{\rho V}{2} \frac{d\gamma}{dt} = m_x^{\delta} S l \frac{\rho V^2}{2} \delta_э. \tag{8.57}$$

В § 8.6 и 8.7 методом группировки получены уравнения с переменными коэффициентами, описывающие продольное и боковое движения снаряда, имеющего переменную скорость. Эти уравнения будут использоваться ниже при анализе различных методов выбора параметров систем управления снарядами.

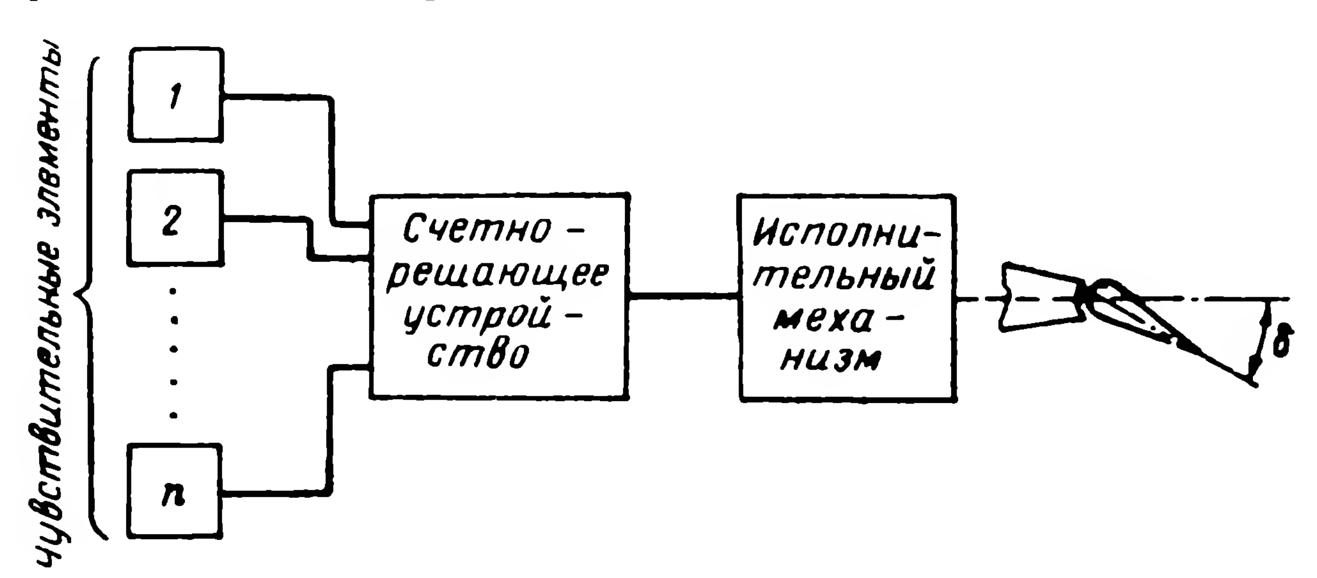
---

## *Глава IX*

# СТРУКТУРА АВТОПИЛОТОВ

## § 9.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Под автопилотом снаряда обычно понимается устройство, которое, получая сигналы от различного рода чувствительных элементов и преобразовывая эти сигналы, управляет рулевыми органами снаряда. Таким образом, автопилот является одним из главных элементов общей системы управления снарядом. В соответствии с приведенным определением на фиг. 9.1 дана общая струк-




Фиг. 9.1. Общая структурная схема автопилота снаряда.

турная схема автопилота. В эту схему входят чувствительные элементы, счетно-решающее устройство и исполнительный механизм.

Чувствительные или измерительные элементы, подающие свои сигналы в счетно-решающее устройство автопилота, измеряют значения тех параметров движения снаряда, которые необходимы для обеспечения принятого метода наведения и требуемых динамических свойств системы управления снарядом. К таким параметрам относятся различные угловые координаты, характеризующие положение снаряда относительно цели и поверхности земли, производные от этих координат, а иногда и линейные координаты центра тяжести снаряда относительно заданной траектории и производные от этих координат. Для измерения некоторых из указанных параметров используется специальная аппаратура, описан-

ная в гл. III—V. Другие параметры измеряются общими для всех снарядов чувствительными элементами, такими, как гироскопы, манометрические приборы, акселерометры и т. п.

Некоторые устройства, относящиеся к чувствительным элементам (см. схему на фиг. 9.1), могут быть очень сложными узлами системы управления снарядом, в состав которых, в свою очередь, входят замкнутые системы автоматического регулирования, следящие системы и счетно-решающие блоки. К таким устройствам следует отнести головки самонаводящихся снарядов, радиолокационные приемники для выработки управляющих сигналов при управлении по лучу, гироинерциальные системы для определения координат автономно управляемых снарядов и многие другие блоки систем управления.

Счетно-решающее устройство автопилота в простейшем случае представляет собой суммирующее устройство, где происходит сложение сигналов, поступающих от чувствительных элементов, в требуемой пропорции. В общем случае в счетно-решающем устройстве могут производиться любые операции с поступающими сигналами. Основные из этих операций описаны в гл. VI. В процессе преобразования сигналов часто возникает необходимость их усиления по напряжению или мощности, что выполняется с помощью усилителей различного типа, рассмотренных в гл. VII. Счетно-решающее устройство формирует управляющий сигнал $u$, подаваемый в исполнительный механизм автопилота. Последний представляет собой устройство, приводящее в движение рулевой орган снаряда *. В качестве приводных устройств на снарядах используются электрические (электромашинные и электромагнитные), пневматические и гидравлические двигатели. Эти виды исполнительных механизмов описаны в гл. VII. Таким образом, все элементы, входящие в схему автопилота снаряда, описаны в предыдущих главах. В настоящей главе будут рассмотрены наиболее распространенные структурные схемы автопилотов.

## § 9.2. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ АВТОПИЛОТОВ

В соответствии с фиг. 9.1 чувствительные элементы и счетно-решающее устройство формируют управляющий сигнал, который должен быть выполнен (отработан) исполнительным механизмом автопилота. Одной из основных форм классификации автопилотов является разделение их по структуре исполнительного механизма. Для пояснения этой классификации рассмотрим структурную схему этого механизма, приведенную на фиг. 9.2. Как следует из этой фигуры, исполнительный механизм в общем случае представляет собой замкнутую систему автоматического управления

* Исполнительный механизм автопилота часто называют рулевой машиной.

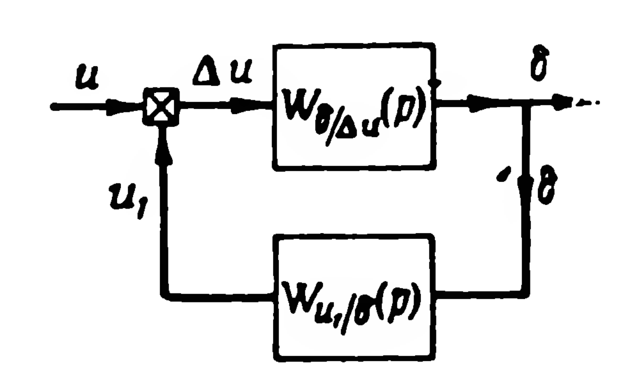
рулевым органом. Приводной двигатель с усилителем мощности, характеризуемый передаточной функцией $W_{\delta/\Delta u}(p)$, поворачивает руль через редуктор или без него, причем угол отклонения руля измеряется каким-либо датчиком. Сигнал с этого датчика по цепи обратной связи с передаточной функцией $W_{u_1\delta}(p)$ поступает на вход системы, где сравнивается с управляющим сигналом $u$. По виду передаточной функции цепи обратной связи $W_{u_1/\delta}(p)$ принято различать автопилоты с жесткой обратной связью, автопилоты со скоростной обратной связью или без обратной связи и, наконец, автопилоты с изодромной обратной связью. Рассмотрим эти типы автопилотов более подробно.

## 1. Автопилот с жесткой обратной связью

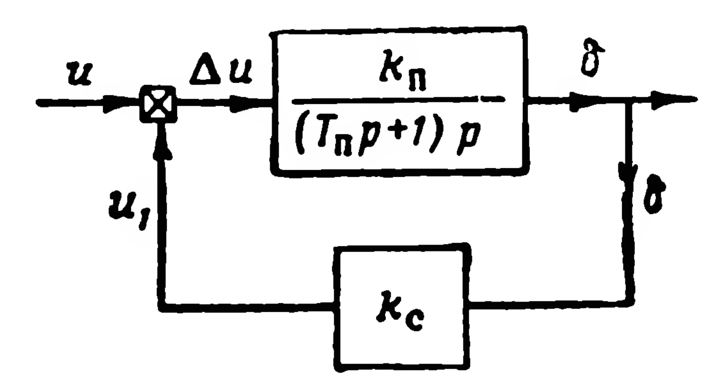
У автопилотов с жесткой обратной связью передаточная функция цепи обратной связи есть постоянная величина, т. е.



$$W_{u_1/\delta}(p) = k_c. \tag{9.1}$$




Фиг. 9.2. Структурная схема исполнительного механизма автопилота.




Фиг. 9.3. Структурная схема исполнительного механизма автопилота с жесткой обратной связью.

Большинство автопилотов в цепях формирования сигналов используют электрические сигналы. В этом случае жесткая обратная связь реализуется в виде какого-либо датчика (потенциометра, сельсина), преобразующего угол отклонения руля в электрическое напряжение.

Передаточные функции приводных устройств (электрического, гидравлического, пневматического) в диапазоне линейного участка их характеристики одинаковы и имеют вид [см. формулы (7.15), (7.23) и (7.29)]

$$W_{\delta/\Delta u}(p) = \frac{k_п}{p(T_п p + 1)}, \tag{9.2}$$

где $k_п$ — коэффициент усиления привода, равный отношению угловой скорости руля к напряжению $\Delta u$ на входе;

$T_п$ — постоянная времени пуска приводного двигателя, характеризующая запаздывание привода.

Структурная схема исполнительного механизма автопилота с жесткой обратной связью приведена на фиг. 9.3. На основании этой структурной схемы получим дифференциальное уравнение, описывающее динамику исполнительного механизма автопилота:

$$\frac{T_п}{k_п k_с} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{1}{k_п k_с} \frac{d\delta}{dt} + \delta = \frac{1}{k_с} u. \tag{9.3}$$

Приводные устройства автопилотов конструктируются так, чтобы постоянная времени пуска $T_п$ была бы как можно меньше, во всяком случае значительно меньше секунды. Эта постоянная делится на произведение коэффициентов $k_п k_с$, которое обычно имеет значение 3—10 1/*сек*. По указанным причинам коэффициент при второй производной оказывается очень малым и этим членом можно пренебречь. В результате получим дифференциальное уравнение первого порядка (уравнение инерционного звена)

$$T_а \frac{d\delta}{dt} + \delta = i_а u, \tag{9.4}$$

где $T_а = 1/k_п k_с$ — постоянная времени исполнительного механизма автопилота;

$i_а = 1/k_с$ — передаточное число (коэффициент усиления) исполнительного механизма автопилота.

Значение постоянной времени $T_а$ у современных автопилотов равно $(0{,}1 \div 0{,}3)$ *сек*, а время регулирования наиболее быстрых движений снаряда по углам крена и тангажа составляет 1,5—3,0 *сек*. Время регулирования угла рыскания, и особенно линейных координат снаряда, значительно больше. Эти данные позволяют при выборе параметров системы управления снаряда (передаточных чисел автопилота по отдельным параметрам, поступающим в счетно-решающее устройство) пренебречь постоянной времени автопилота. В результате этого допущения дифференциальное уравнение автопилота (9.4) превращается в алгебраическое

$$\delta = i_а u. \tag{9.5}$$

Уравнение (9.5) есть уравнение безынерционного или, как его принято называть, идеального автопилота.

Как видно из структурной схемы на фиг. 9.1, управляющий сигнал $u$ в общем случае есть сумма нескольких сигналов. Так, например, при стабилизации угла крена снаряда управляющий сигнал может быть выражен следующим образом:

$$u = k_\gamma \gamma + k_{\dot\gamma} \frac{d\gamma}{dt}, \tag{9.6}$$

где $\gamma$ и $\frac{d\gamma}{dt}$ — угол крена снаряда и его угловая скорость по крену соответственно.

Подставляя это значение $u$ в уравнение (9.5), получим

$$\delta = i_{\gamma}\gamma + i_{\dot{\gamma}} \frac{d\gamma}{dt}, \tag{9.7}$$

где $i_{\gamma} = i_{a}k_{\gamma}$ — передаточное число автопилота по крену;
$i_{\dot{\gamma}} = i_{a}k_{\dot{\gamma}}$ — передаточное число автопилота по угловой скорости крена.

Окончательное уравнение автопилота (9.7) не изменится, если уравнения (9.5) и (9.6) будут записаны в такой форме:

$$\delta = u, \tag{9.8}$$

$$u = i_{\gamma}\gamma + i_{\dot{\gamma}} \frac{d\gamma}{dt}. \tag{9.9}$$

Практически удобнее характеризовать автопилот передаточными числами ($i_{\gamma}$, $i_{\dot{\gamma}}$ и т. п.) по отдельным сигналам, как это сделано в уравнении (9.9), чем учитывать передаточное число исполнительного механизма автопилота $i_{a}$ и порции сигналов ($k_{\gamma}$, $k_{\dot{\gamma}}$ и т. п.), как это сделано в уравнениях (9.5) и (9.6). Поэтому уравнение идеального автопилота будем записывать для удобства в форме (9.8). Как показывает выражение (9.8), у идеального автопилота с жесткой обратной связью угол отклонения руля равен управляющему сигналу.

Необходимо заметить, что пользоваться уравнением идеального автопилота целесообразно лишь при выборе параметров системы управления снаряда, как и указывалось выше. При анализе работы самого исполнительного механизма автопилота следует использовать полное уравнение (9.3). Это особенно важно иметь в виду при исследовании влияния различных нелинейностей в исполнительном механизме (люфт, зона нечувствительности, сухое трение), которые не учитывались при составлении уравнения (9.3), но могут оказать существенное влияние на работоспособность этого механизма. Последнее замечание относится не только к автопилоту с жесткой обратной связью, но и к рассматриваемым ниже схемам автопилотов.

### 2. Автопилот со скоростной обратной связью или без обратной связи

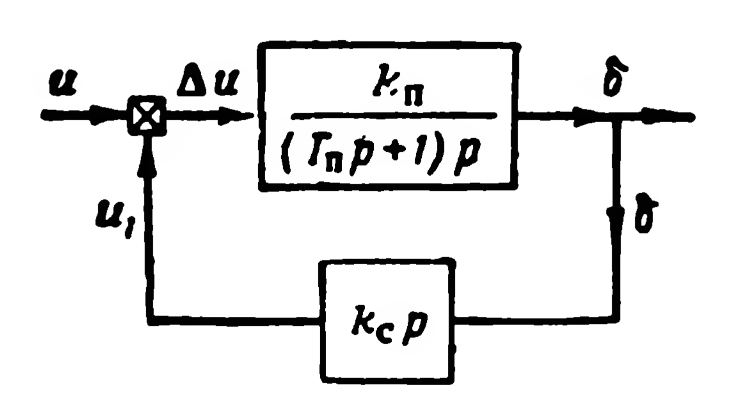
Для образования скоростной обратной связи необходимо получить сигнал, пропорциональный угловой скорости руля, т. е. про-

изводной от угла отклонения руля. В этом случае передаточная функция цепи обратной связи имеет вид

$$W_{u_1\delta}(v) = k_c p. \qquad (9.10)$$

Для получения такого сигнала обычно используется тахогенератор, напряжение которого пропорционально угловой скорости руля.

Структурная схема исполнительного механизма автопилота со скоростной обратной связью приведена на фиг. 9.4. На основании




Фиг. 9.4. Структурная схема исполнительного механизма автопилота со скоростной обратной связью.

этой структурной схемы получим дифференциальное уравнение, описывающее динамику исполнительного механизма автопилота:

$$T_a \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{d\delta}{dt} = i_a u, \qquad (9.11)$$

где

$$\left.\begin{aligned} T_a &= \frac{T_п}{1 + k_п k_c}; \\ i_a &= \frac{k_п}{1 + k_п k_c}. \end{aligned}\right\} \qquad (9.12)$$

Если обратную связь по скорости не вводить ($k_c = 0$), то получим схему исполнительного механизма автопилота без обратной связи, уравнение которого имеет такой же вид, как и уравнение (9.11) автопилота со скоростной связью, но значения постоянной времени и передаточного числа определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned} T_a &= T_п, \\ i_a &= k_п. \end{aligned}\right\} \qquad (9.13)$$

Сравнение выражений (9.12) и (9.13) для постоянной времени и передаточного числа исполнительного механизма автопилотов со скоростной обратной связью и без нее показывает, что введение скоростной связи приводит к уменьшению обеих этих величин в $(1 + k_п k_c)$ раз. Как уже указывалось, значение постоянной времени привода $T_п$ обычно невелико и введение скоростной обратной связи в таких случаях не вызывается необходимостью. Поэтому автопилоты такой схемы чаще выполняются без скоростной обрат-

ной связи. Если в уравнении (9.11) пренебречь из-за малости постоянной времени $T_а$ запаздыванием исполнительного механизма автопилота, то получим уравнение идеального автопилота со скоростной связью или без обратной связи

$$\frac{d\delta}{dt} = i_а u. \tag{9.14}$$

По аналогии с уравнением (9.8) формулу (9.14) также удобнее записать в форме

$$\frac{d\delta}{dt} = u, \tag{9.15}$$

отнеся передаточное число исполнительного механизма автопилота к передаточным числам всего автопилота по отдельным сигналам. Таким образом, уравнение (9.15) показывает, что у идеального автопилота со скоростной или без обратной связи скорость вращения руля равна управляющему сигналу.

### 3. Автопилот с изодромной обратной связью

В чисто механических системах автоматического регулирования (например, в центробежном регуляторе скорости вращения какой-либо машины) для обеспечения астатизма использовалось устройство, называемое изодромом. Схема изодрома приведена на фиг. 9.5. Входной величиной изодрома является перемещение $y$ конца задающего рычага, связанного со штоком поршня, а выходной — перемещение $x$ цилиндра изодрома. При внезапном перемещении конца рычага на $y$ цилиндр с поршнем ведут себя как жестко связанные тела и цилиндр получает перемещение $x$, пропорциональное $y$. Пружина сжимается и за счет разности давлений жидкость по соединительной трубке начинает перетекать из одной полости в другую, пока цилиндр не займет положение равновесия ($x=0$). Передаточная функция изодрома имеет вид

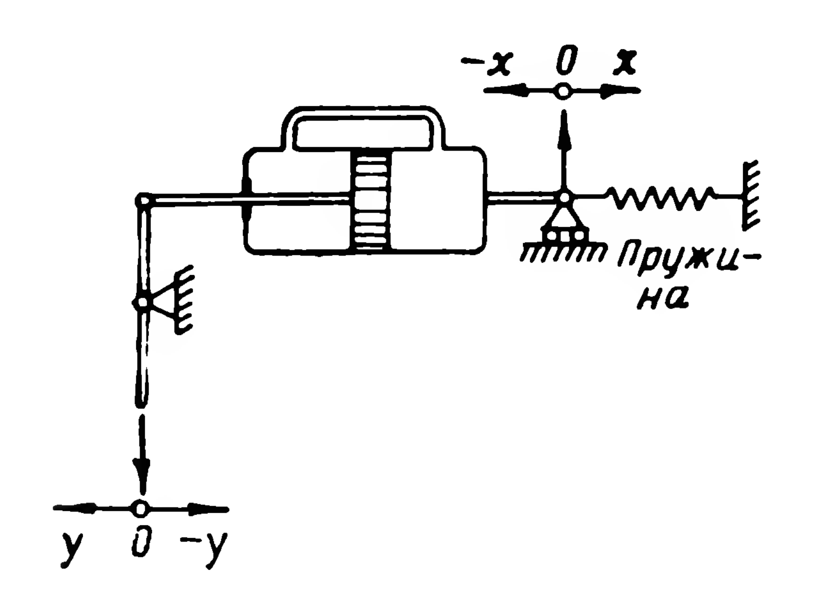
$$W_{x/y}(p) = k_с \frac{T_и p}{T_и p + 1}, \tag{9.16}$$

где $T_и$ — постоянная времени изодрома, зависящая от площади сечения цилиндра и соединительного трубопровода, а также от жесткости пружины;

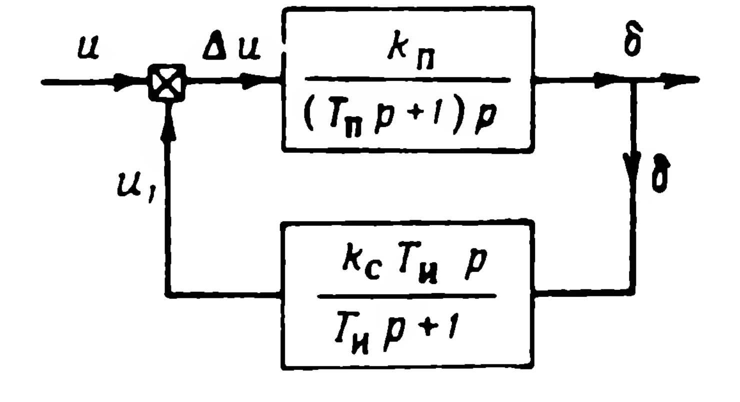
$k_с$ — коэффициент пропорциональности, равный отношению плеч задающего рычага.

Как показано в гл. VI, передаточной функцией, аналогичной выражению (9.16), обладает дифференцирующая цепь $rc$ (см. формулу 1 в табл. 2.5). Поэтому для реализации в автопилоте с элек-

трическими сигналами изодромной обратной связи необходимо перемещение руля преобразовать с помощью потенциометра в напряжение и это напряжение подать на цепь *rc*.




Фиг. 9.5. Схема изодрома.




Фиг. 9.6. Структурная схема исполнительного механизма автопилота с изодромной обратной связью.

Структурная схема исполнительного механизма с изодромной обратной связью приведена на фиг. 9.6. На основании этой структурной схемы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{T_и T_п}{1 + k_п k_c T_и} \cdot \frac{d^3\delta}{dt^3} + \frac{T_и + T_п}{1 + k_п k_c T_и} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{d\delta}{dt} = \frac{k_п T_и}{1 + k_п k_c T_и} \frac{du}{dt} + \frac{k_п}{1 + k_п k_c T_и} u. \qquad (9.17)$$

Так как величина $(1 + k_п k_c T_и)$ обычно гораздо больше единицы, то коэффициенты перед третьей и второй производными от угла отклонения руля оказываются небольшими. Для выбора параметров системы управления можно этими членами в уравнении (9.17) пренебречь, в результате чего получим уравнение идеального автопилота в форме

$$\frac{d\delta}{dt} = i_а T_и \frac{du}{dt} + i_а u,$$

где $i_а = \dfrac{k_п}{1 + k_п k_c T_и}$ — передаточное число исполнительного механизма автопилота.

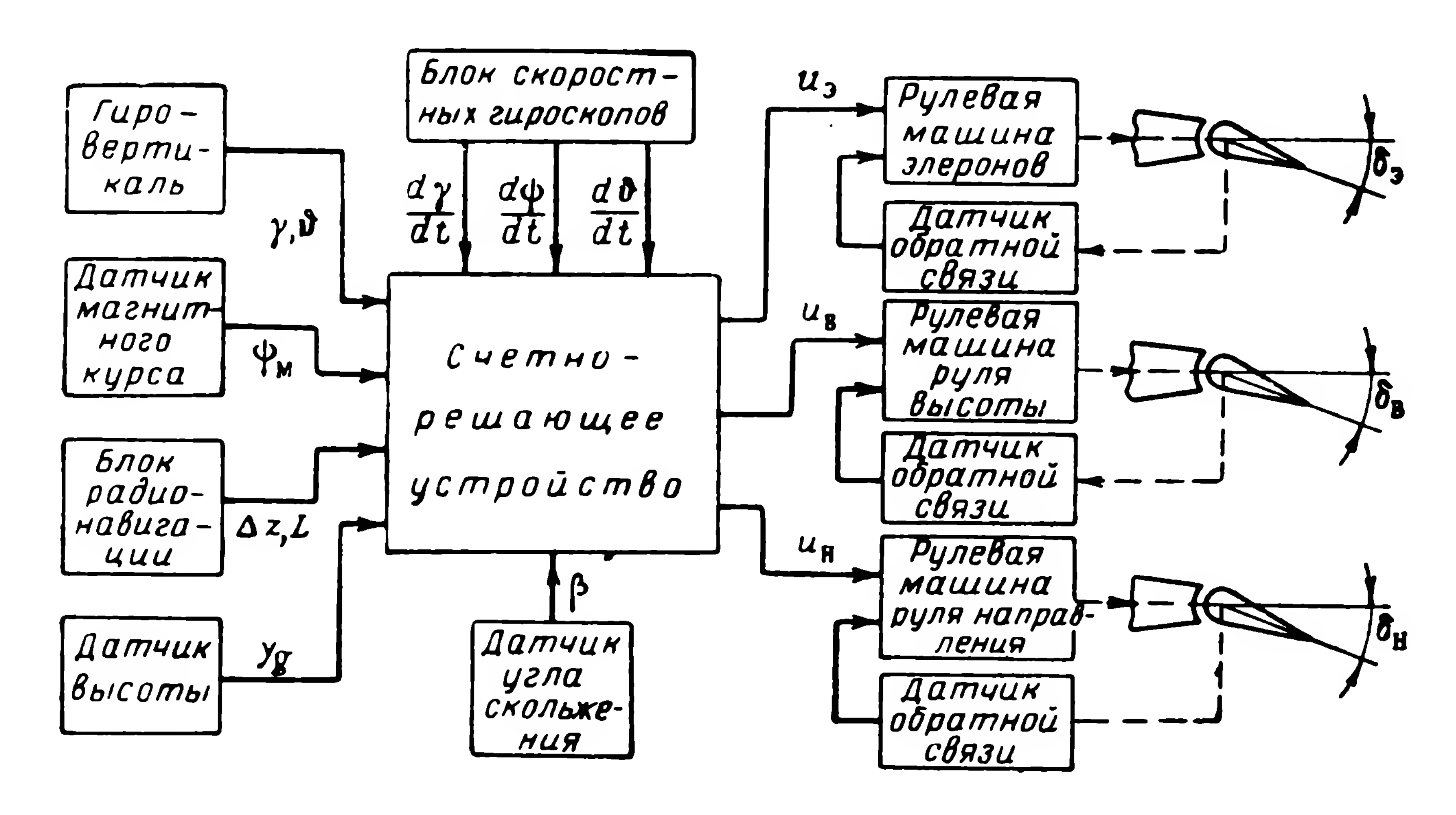
Как и в предыдущих случаях, коэффициент $i_а$ можно отнести к передаточным числам автопилота по отдельным сигналам, в результате чего уравнение идеального автопилота с изодромной обратной связью приобретает вид

$$\frac{d\delta}{dt} = T_и \frac{du}{dt} + u. \qquad (9.19)$$

Уравнение (9.19) показывает, что в этом автопилоте скорость отклонения руля пропорциональна как управляющему сигналу, так и производной от него.

## § 9.3. ПРИМЕРЫ СХЕМ АВТОПИЛОТОВ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ СНАРЯДАМИ

В качестве примера автопилота с жесткой обратной связью рассмотрим автопилот самолета-снаряда, наводимого на цель с помощью радионавигационной системы (гиперболической или круговой, см. § 4.4). На фиг. 9.7 приведена структурная схема такого автопилота *, а на фиг. 9.8 изображены его отдельные блоки и показана их взаимосвязь.

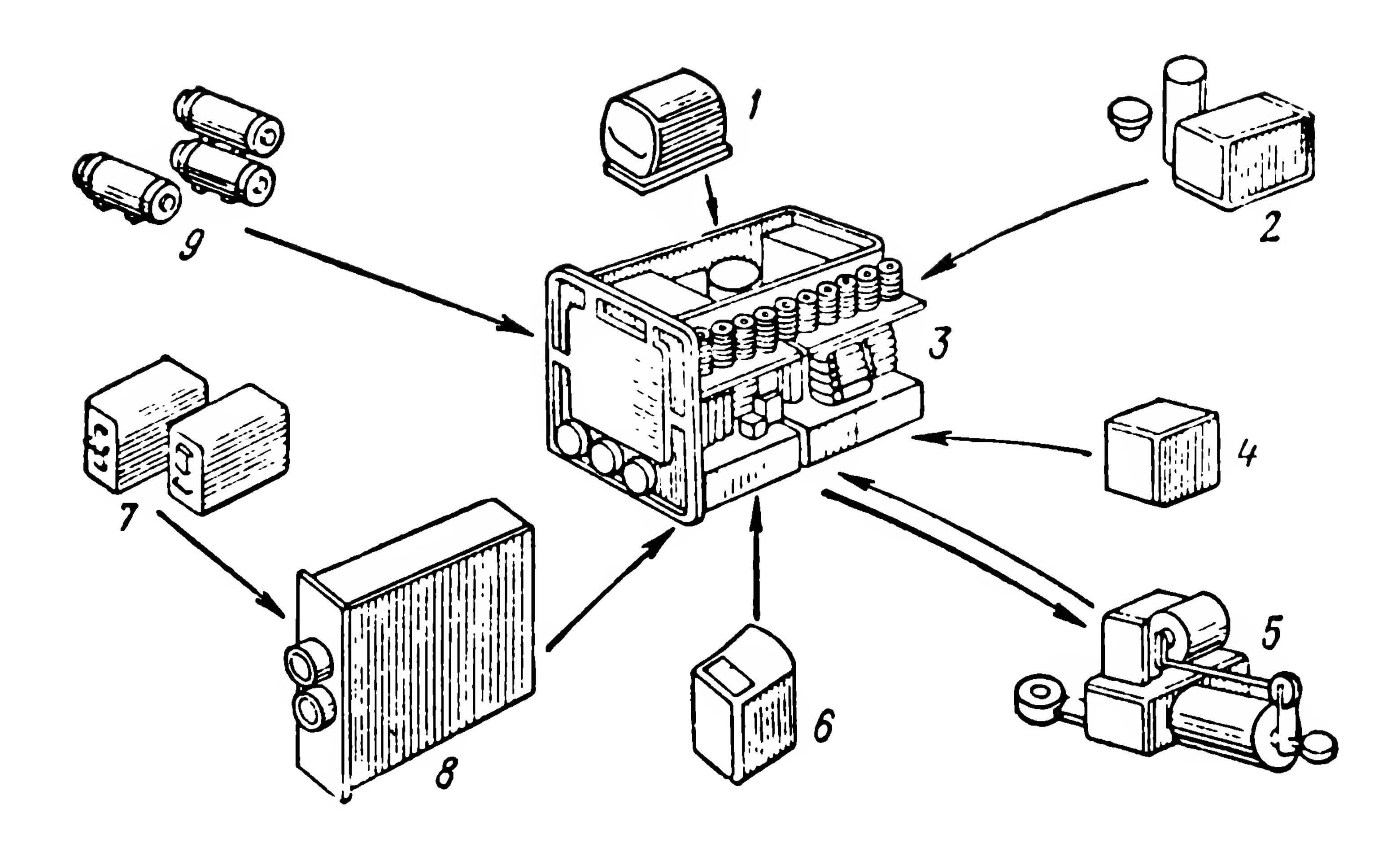



Фиг. 9.7. Структурная схема автопилота с жесткой обратной связью.

В вертикальной плоскости снаряд управляется рулем высоты, а в горизонтальной — с помощью крена, создаваемого элеронами. Руль направления предназначен лишь для устранения скольжения, могущего возникнуть при эволюциях снаряда. Для измерения угла скольжения ($\beta$) предусмотрен специальный датчик. Стабилизация снаряда по углам тангажа ($\vartheta$) и крена ($\gamma$) обеспечивается сигналами гировертикали. Для улучшения динамических характеристик процессов стабилизации по этим параметрам с блока скоростных гироскопов вводятся сигналы по угловым скоростям тангажа ($d\vartheta/dt$) и крена ($d\gamma/dt$). Стабилизация высоты обеспечивается датчиком высоты ($y_g$). Стабилизация снаряда на заданной траектории происходит за счет сигнала бокового отклонения центра тяжести снаряда от этой траектории ($\Delta z$), даваемого блоком радионавигационной системы. Для улучшения динамических характеристик процесса стабилизации на траектории используются сигналы датчика магнитного курса ($\psi_м$) и скоростного гироскопа рыскания ($d\psi/dt$). Блок радионавигационной системы измеряет дальность до цели ($L$) и при достижении нужной дальности посылает сигнал ($\vartheta_з$) на перевод снаряда в пикирование на цель.

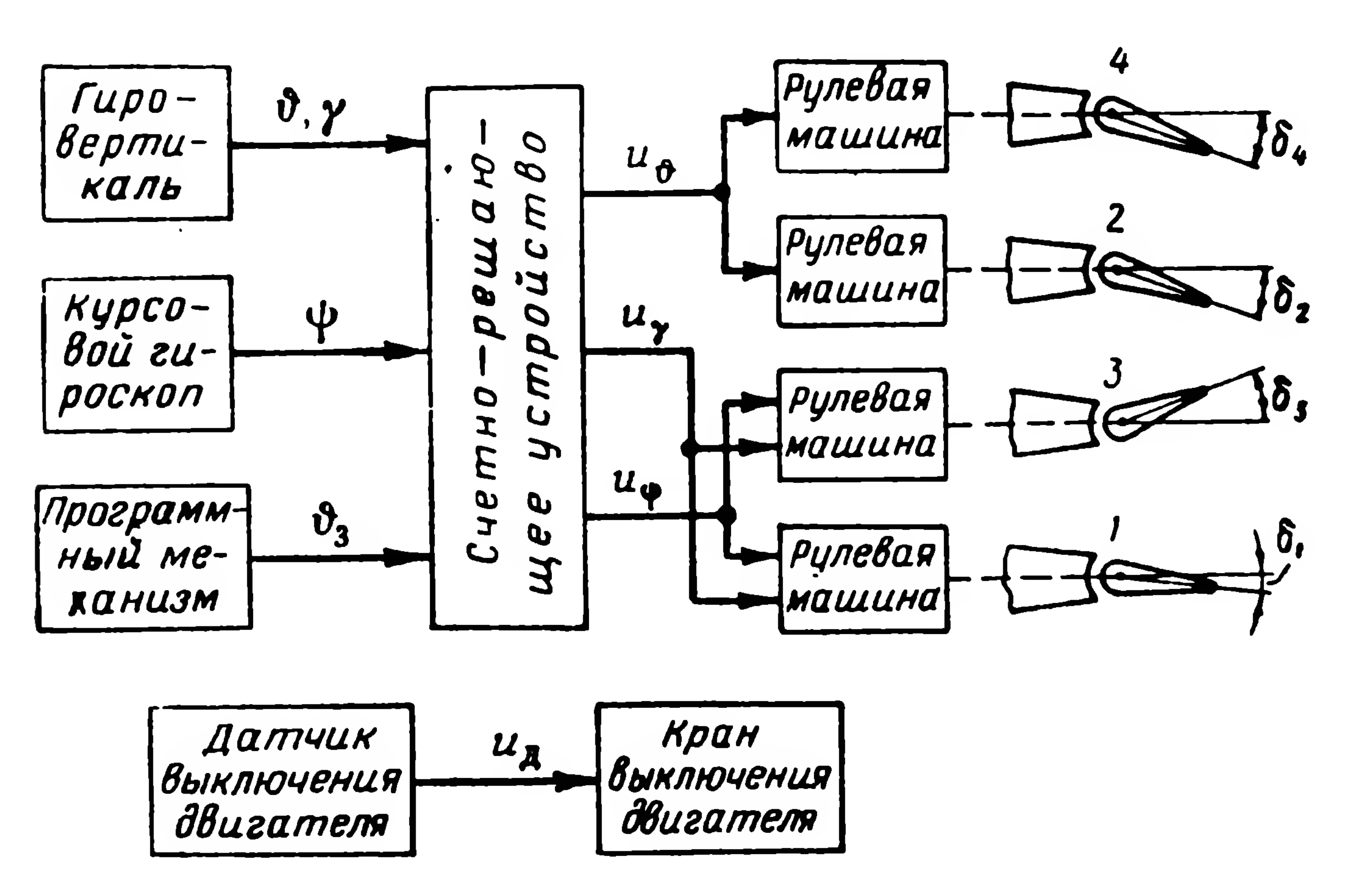
Все эти чувствительные элементы автопилота дают свои сигналы в форме

* Сплошные линии между элементами схемы на фиг. 9.7 соответствуют электрическим связям, а пунктирные — механическим.




Фиг. 9.8. Блоки автопилота с жесткой обратной связью.

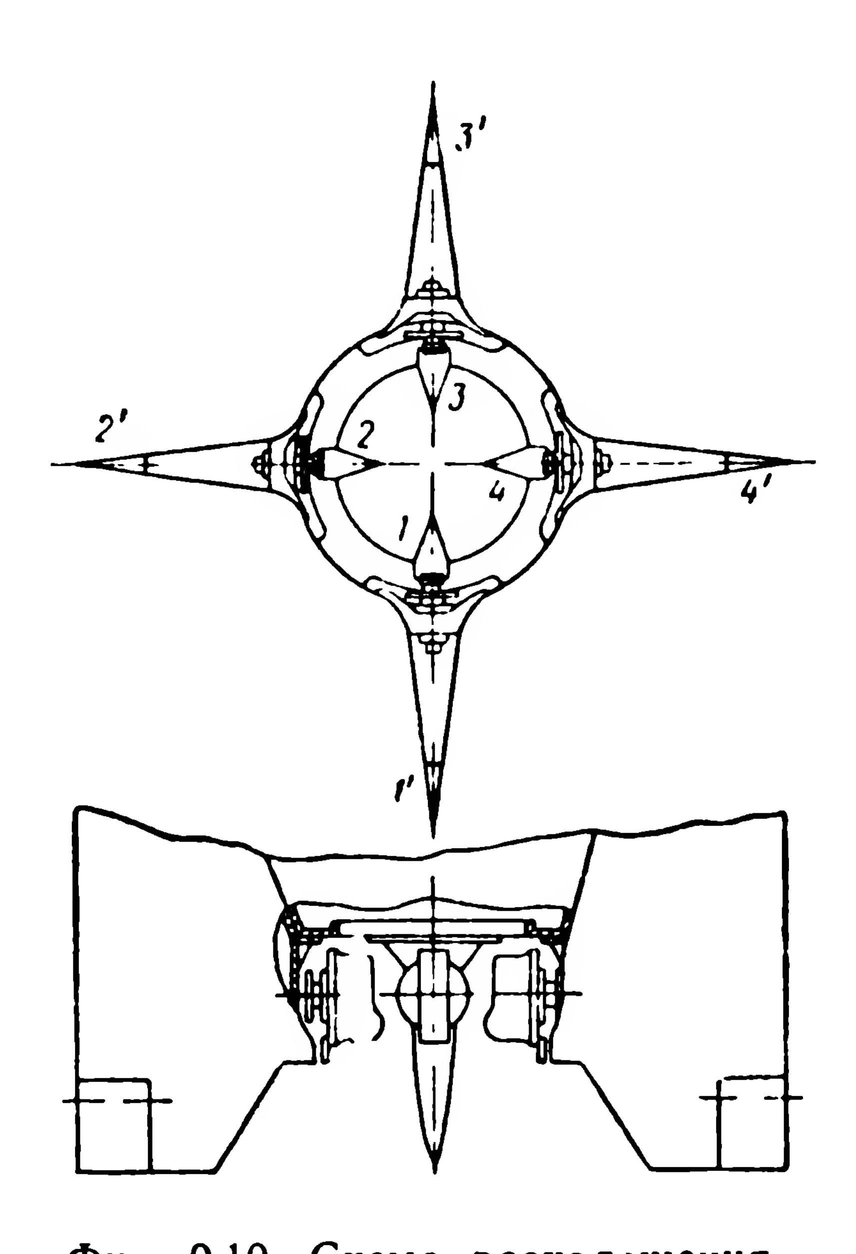
1 — гировертикаль, 2 — аппаратура для получения магнитного курса (датчик, гироскоп, усилитель), 3 — счетно-решающее устройство и усилители мощности, 4 — датчик угла скольжения, 5 — одна из трех гидравлических рулевых машин, 6 — датчик высоты полета, 7 — приемо-передатчик радионавигационной системы, 8 — блок связи автопилота с радионавигационной аппаратурой, 9 — скоростные гироскопы тангажа, рыскания и крена.




Фиг. 9.9. Структурная схема автопилота без обратной связи.

электрического напряжения в счетно-решающее устройство. Здесь эти сигналы обрабатываются, складываются в нужной пропорции и подаются на исполнительные механизмы (рулевые машины) всех трех рулевых органов. За счет жесткой обратной связи угол отклонения соответствующего руля оказывается пропорциональным поданному на вход рулевой машины управляющему сигналу. Отнеся коэффициент пропорциональности к каждой составляющей этого сигнала, получим уравнение автопилота с жесткой обратной связью в форме $\delta = u$. Счетно-решающее устройство обеспечивает выполнение всех эволюций снаряда в горизонтальной плоскости без скольжения и потери высоты, т. е. в режиме правильного виража. Подробный анализ динамики снаряда с автопилотом при различных системах управления представлен в гл. X и XI.

В качестве примера автопилота без обратной связи рассмотрим автопилот баллистической ракеты. Управление ракетой ведется только на активном участке траектории, когда двигатели ракеты развивают тягу, значительно превосходящую ее вес. Так как ракета не имеет крыльев, то управляющая сила, изменяющая траекторию полета, получается за счет поворота корпуса ракеты относительно центра тяжести, в результате чего сила тяги дает составляющую, нормальную к первоначальному направлению полета (см. фиг. 1.8). На фиг. 9.9. приведена структурная схема автопилота баллистической ракеты. Стабилизация ракеты в пространстве достигается за счет сигналов гировертикали (угол тангажа $\vartheta$ и крена $\gamma$) и курсового гироскопа (угол рыскания $\psi$). Для получения нужной формы траектории на активном участке (см. фиг. 1.21) по заранее рассчитанной программе изменяется заданное значение угла тангажа ($\vartheta_з$) ракеты. Для этого предусмотрен специальный программный механизм. Скорость полета ракеты контролируется с земли с помощью радиотехнической системы, использующей эффект Допплера. При достижении ракетой заданного значения скорости с земли посылается по радиоканалу сигнал ($u_д$) на выключение двигателя.




Фиг. 9.10. Схема расположения рулей ракеты.

*1, 2, 3, 4* — газовые рули; *1', 2', 3', 4'* — аэродинамические рули.

Основной функцией счетно-решающего устройства автопилота без обратной связи является получение первой и второй производных от сигналов рассогласования по углам тангажа, крена и рыскания. Получение этих сигналов обеспечивается с помощью дифференцирующих цепей, описанных в гл. VI. Необходимость введения сигналов первой и второй производных от угловых координат ракеты при использовании автопилота без обратной связи показана в гл. X.

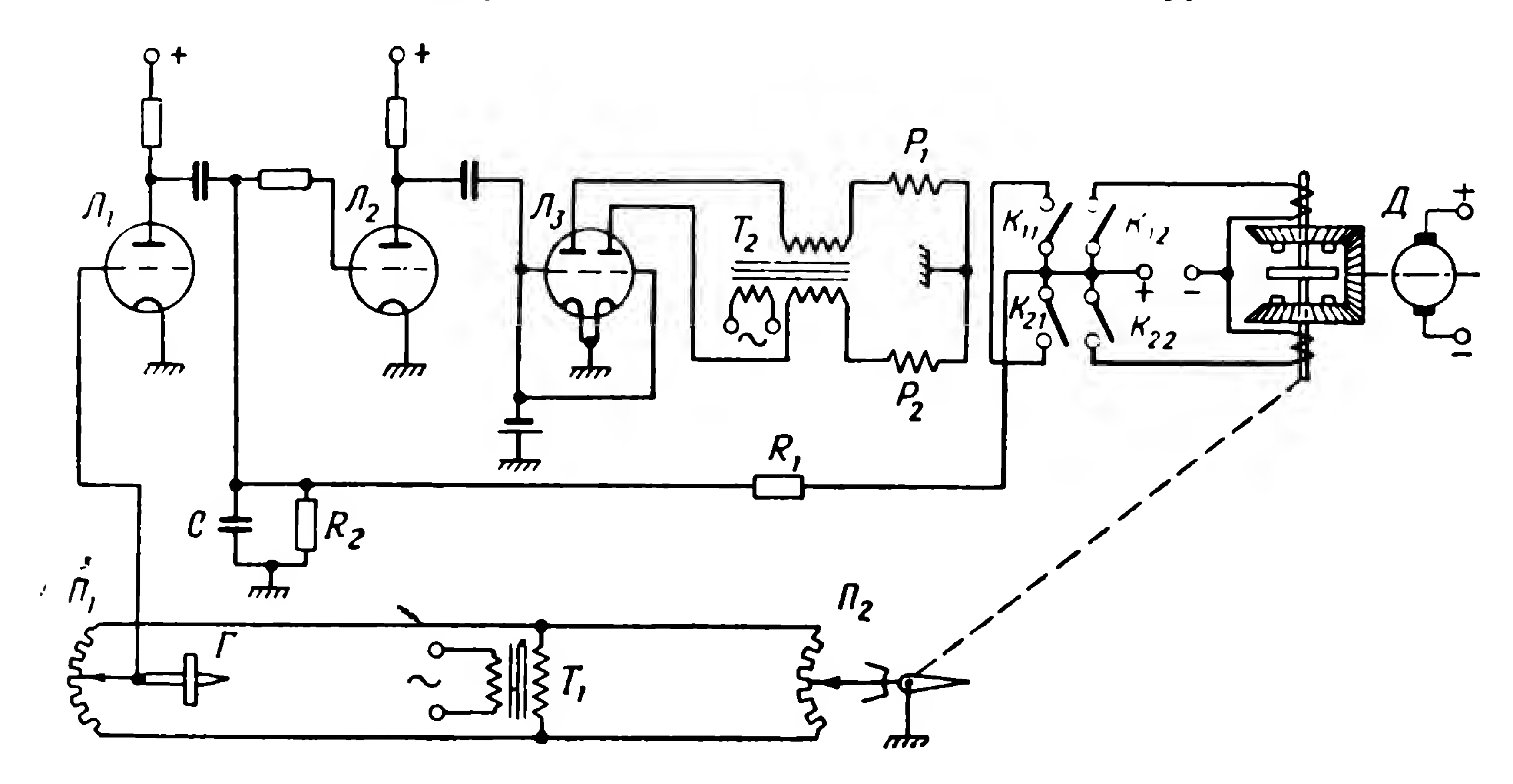
Ракета управляется четырьмя аэродинамическими рулями и четырьмя газовыми, расположенными в струе газов, выходящих из сопла двигателя. Расположение рулей в сечении сопла схематически показано на фиг. 9.10 (вид сза-

* В. И. Феодосьев, Г. Б. Синярев, Введение в ракетную технику, Оборонгиз, 1960.

ди) *. Аэродинамические рули действуют только в плотных слоях атмосферы и являются вспомогательными. Каждый из четырех газовых рулей приводится в движение своей гидравлической рулевой машиной, не имеющей механической связи с машинами других рулей. Рули *2* и *4*, расположенные в плоскости, перпендикулярной плоскости стрельбы, управляют углом тангажа. Рули *1* и *3*, расположенные в плоскости стрельбы, работают как элевоны. При отклонении обоих рулей в одну сторону они управляют углом рыскания ракеты, а при отклонении в разные стороны — стабилизируют угол крена. Так как рулевые машины не имеют обратной связи, то скорость движения руля пропорциональна управляющему сигналу. Относя коэффициент пропорциональности к отдельным составляющим этого сигнала, получим уравнение автопилота без обратной связи в форме $d\delta/dt=u$.

## § 9.4. РЕЛЕЙНЫЙ АВТОПИЛОТ

В качестве примера опишем схему релейного автопилота, приведенную на фиг. 9.11. Работа этого автопилота основана на принципе вибрационной линеаризации релейной системы за счет охвата усилителя запаздывающей обратной связью (см. § 2.6). Измерителем отклонения от заданного курса является пози-




Фиг. 9.11. Принципиальная схема релейного автопилота.

ционный гироскоп *Г* с потенциометрическим датчиком $П_1$. Датчик $П_1$ и потенциометр руля $П_2$ образуют мост, питаемый переменным током через трансформатор $T_1$. Усилительное устройство состоит из электронного усилителя, собранного на лампах $Л_1$, $Л_2$, $Л_3$ и вибрационно-линеаризованного релейного усилителя $P_1$ и $P_2$. На лампах $Л_1$ и $Л_2$ собраны усилительные каскады, а лампа $Л_3$ выполняет роль фазового дискриминатора. Исполнительное устройство (рулевая машина) представляет собой электрический сервомотор постоянной скорости с электромагнитной фрикционной муфтой, управляемой реле $P_1$ и $P_2$. Датчик $П_2$ является потенциометром обратной связи.

Рассмотрим принцип вибрационной линеаризации в данной схеме. Обмотки реле $P_1$ и $P_2$ включены в анодные цепи лампы $Л_3$. Каждое реле, кроме контактов для управления сервомотором, имеет контакты для управления цепью обратной связи. Через контакты $K_{11}$ и $K_{21}$ и сопротивление $R_1$ подается положительное напряжение на цепочку $R_2C$.

Работа схемы протекает следующим образом. При появлении входного

сигнала в одном из триодов лампы $Л_3$ появляется ток, достаточный для срабатывания реле. В зависимости от знака отклонения срабатывает реле $P_1$ или $P_2$, которое своим контактом включает накопительную ячейку $R_2C$. Конденсатор $C$ заряжается и, таким образом, на сетке лампы $Л_2$ растет положительный потенциал. Рабочая точка на сеточной характеристике перемещается в область насыщения, коэффициент усиления лампы падает, переменное напряжение на сетке лампы $Л_3$ уменьшается и реле отпускает. После отпускания реле конденсатор $C$ разряжается, положительный потенциал на сетке лампы $Л_2$ уменьшается, ее коэффициент усиления возрастает и реле вновь включается и т. д. В схеме устанавливается автоколебательный режим. При отклонении одного знака пульсирует только одно реле. Если входной сигнал отсутствует, то отсутствуют и колебания в схеме.

Исполнительное устройство состоит из двигателя $Д$, приводящего во вращение сцепленные с ним шестерни в противоположные стороны. При этом вращение на руль не передается. При появлении тока в одной из обмоток электромагнитной муфты вращение передается на руль. Направление вращения зависит от того, какая муфта находится под током. Если муфта обесточена (разомкнуты контакты реле), то положение руля фиксировано тормозными электромагнитами, которые не изображены на фиг. 9.11. Когда имеется отклонение осей снаряда от заданного положения, то за несколько пульсаций реле $P_1$ или $P_2$ руль перемещается в новое положение. При этом угол поворота руля пропорционален отклонению соответствующей оси от заданного положения.

*Глава X*

# УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ СНАРЯДА ОТНОСИТЕЛЬНО ЕГО ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ

## § 10.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Конечной целью системы управления снарядом, как уже указывалось в гл. I, является совмещение траектории снаряда с целью или с достаточно малой окрестностью цели. Система управления снарядом достаточно сложна и поэтому ее анализ и выбор параметров элементов, входящих в эту систему, производят в несколько этапов. Первый этап — это обеспечение достаточно хорошего качества процессов управления движением снаряда относительно его центра тяжести. За счет этого движения создается сила, управляющая снарядом *.

Настоящая глава посвящена анализу методов управления движением снарядов различных типов относительно центра тяжести. Этот анализ будет опираться на уравнения продольного и бокового движения снаряда, приведенные в гл. VIII. При использовании этих уравнений необходимо иметь в виду одно принципиальное обстоятельство. Строго говоря, на основании уравнений, полученных методом линеаризации или методом квазификсированных коэффициентов, можно судить лишь об устойчивости или неустойчивости системы, описываемой исходными нелинейными уравнениями или уравнениями с переменными коэффициентами. Однако в настоящей книге эти уравнения будут использоваться для исследования динамики системы путем построения переходных процессов или с помощью частотных характеристик.

Такой подход оправдывается в большинстве задач о движении снаряда, если нелинейные функции, описывающие его движение, не имеют характеристик, близких к скачкам, или если скорость изменения переменных коэффициентов не слишком велика. Критерием возможности такого подхода к поставленной задаче служит достаточное для практики совпадение динамических характеристик

---

* Лишь очень узкий класс снарядов — снаряды с непосредственным регулированием управляющей силы — не требует предварительного поворота корпуса снаряда относительно центра тяжести.

снарядов, получаемых на основе упрощенных и точных уравнений, причем точные уравнения решаются на математических машинах.

## § 10.2. БОКОВОЕ ДВИЖЕНИЕ КРЕСТОКРЫЛОГО СНАРЯДА ПРИ ОТКЛОНЕНИИ РУЛЯ

Как было показано в гл. I, у большинства снарядов управляющая сила регулируется поворотом корпуса снаряда вокруг центра тяжести с помощью рулевых органов. В качестве рулевых органов могут быть использованы аэродинамические или газовые рули. Иногда для создания момента относительно центра тяжести снаряда надо повернуть камеру сгорания реактивного двигателя.

Рассмотрим задачу об изменении траектории снаряда, вызванном отклонением рулевого органа, в наиболее простой постановке. Пусть снаряд движется прямолинейно и с постоянной скоростью. Нужно определить параметры его движения после отклонения руля, пренебрегая изменением скорости полета, т. е. считая, что и возмущенное движение снаряда происходит с постоянной скоростью. Чтобы задача приобрела еще более простой вид, рассмотрим боковое движение крестокрылого снаряда. На это движение снаряда не влияют силы тяжести. Наконец, будем считать снаряд стабилизированным по углу крена.

Для анализа движения снаряда при указанных выше условиях воспользуемся первыми двумя уравнениями линейного приближения (8.44) для бокового движения снаряда. Третье уравнение не рассматривается, так как координата центра тяжести не входит в первые два уравнения. Если у снаряда, двигавшегося прямолинейно, отклонить руль или создать другим способом момент относительно центра тяжести, то корпус снаряда начнет поворачиваться. Появятся угол атаки и управляющая сила, которая будет изменять направление вектора скорости снаряда. На фиг. 10.1 приведены силы и моменты, действующие на крестокрылый снаряд при отклонении руля.

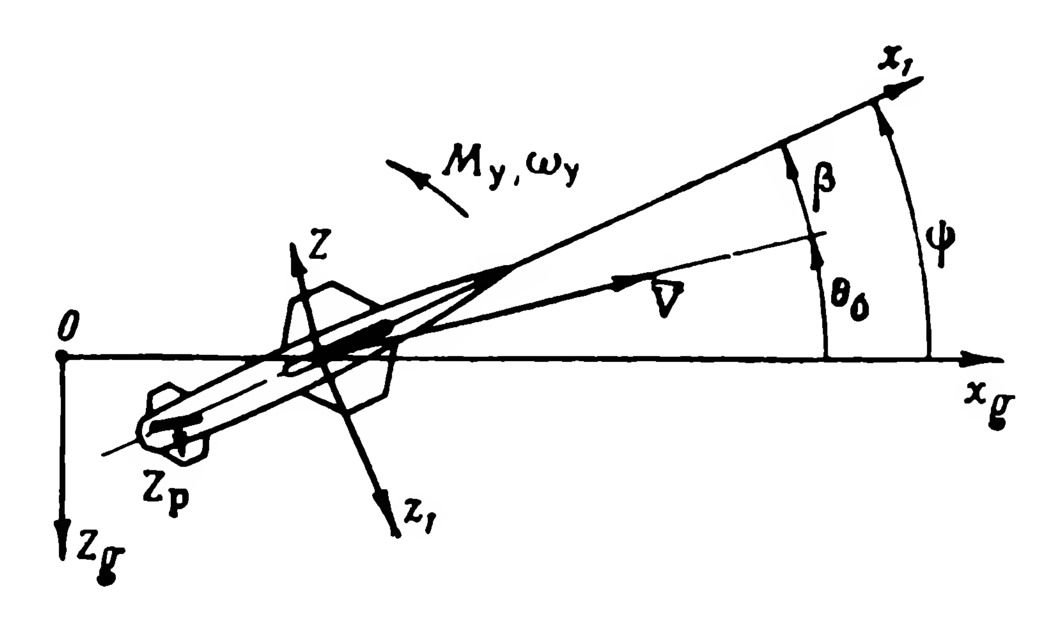
Учитывая очевидное соотношение $\psi = \theta_б + \beta$, можно первые два уравнения (8.44) преобразовать так, чтобы получить уравнения для углов скольжения и поворота траектории

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + (k_\beta + n_{\dot\beta} + n_{\dot\psi})\frac{d\beta}{dt} + (k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta)\beta = n_{\delta_н}\delta_н, \qquad (10.1)$$

$$\frac{d^3\theta_б}{dt^3}(k_\beta + n_{\dot\beta} + n_{\dot\psi})\frac{d^2\theta_б}{dt^2} + (k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta)\frac{d\theta_б}{dt} = k_\beta n_{\delta_н}\delta_н. \qquad (10.2)$$

Полученные уравнения являются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами и поэтому их интегрирование трудностей не представляет. Значение коэффициентов, входящих в эти

уравнения, связано с аэродинамическими и конструктивными характеристиками снаряда с помощью соотношений (8.43).




Фиг. 10.1. Силы и моменты, действующие на крестокрылый снаряд в боковом движении.

$x_1$, $z_1$ — связанные оси; $x_g$, $z_g$ — земные оси; $V$ — скорость снаряда; $\psi$ — угол рыскания; $\omega_y$ — угловая скорость рыскания; $\beta$ — угол скольжения (аналогичен углу атаки); $\theta_б$ — угол поворота траектории (аналогичен углу наклона траектории в продольном движении); $Z$— боковая сила (аналогична подъемной силе); $Z_р$— боковая сила руля направления, создающая момент от руля направления $M_\delta$ ; $M_y$— сумма остальных моментов, действующих на снаряд при его повороте относительно оси $0y_1$.

При внезапном (скачком) отклонении руля направления на угол $\delta_н$ интеграл уравнения (10.1) имеет вид

$$\beta = \beta_{уст}\left(1 - \frac{p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}}{p_1 - p_2}\right), \qquad (10.3)$$

где $\beta_{уст} = \dfrac{n_{\delta_н}\delta_н}{k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta}$ — установившееся значение угла скольжения, получающееся после окончания переходного процесса;

$p_1$ и $p_2$ — корни характеристического уравнения:

$$p^2 + (k_\beta + n_{\dot\beta} + n_{\dot\psi})p + k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta = 0. \qquad (10.4)$$

Это уравнение более удобно применять в нормированной форме, общей для любого дифференциального уравнения второго порядка:

$$p^2 + 2\zeta\Omega_0 p + \Omega_0^2 = 0, \qquad (10.5)$$

где $\zeta$ — относительный коэффициент затухания;

$\Omega_0$ — собственная или резонансная круговая частота системы.

Через коэффициенты характеристического уравнения (10.4) эти вновь введенные параметры $\zeta$ и $\Omega_0$ определяются формулами

$$\zeta = \frac{k_\beta + n_{\dot\beta} + n_{\dot\psi}}{2\sqrt{k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta}}, \tag{10.6}$$

$$\Omega_0 = \sqrt{k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta}. \tag{10.7}$$

Если $\zeta \gg 1$, то корни характеристического уравнения (10.5) являются действительными числами:

$$p_{1,2} = \left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\Omega_0. \tag{10.8}$$

В случае $\zeta < 1$ корни получаются комплексными сопряженными

$$p_{1,2} = \left(-\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2}\right)\Omega_0. \tag{10.9}$$

В этом случае решение дифференциального уравнения (10.1) удобнее выразить в форме

$$\beta = \beta_{\text{уст}}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\Omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\Omega_0 t + \xi\right)\right], \tag{10.10}$$

где

$$\xi = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}. \tag{10.11}$$

Оба решения (10.3) и (10.10) уравнения (10.1) показывают, что при отклонении руля у снаряда возникает угол скольжения, который после окончания переходного процесса приобретает некоторое установившееся значение, пропорциональное углу отклонения руля. При наличии угла скольжения возникает боковая сила $Z$, перпендикулярная скорости полета, и снаряд в установившемся режиме должен двигаться по окружности. Это физическое соображение подтверждается аналитически решением уравнения (10.2) для угла поворота траектории:

$$\theta_б = k_\beta\beta_{\text{уст}}\left[t + \frac{p_1 + p_2}{p_1 p_2} + \frac{p_2 e^{p_1 t_1}}{p_1(p_1 - p_2)} - \frac{p_1 e^{p_2 t}}{p_2(p_1 - p_2)}\right], \tag{10.12}$$

где $p_1$ и $p_2$ — корни характеристического уравнения в форме (10.4) или (10.5).

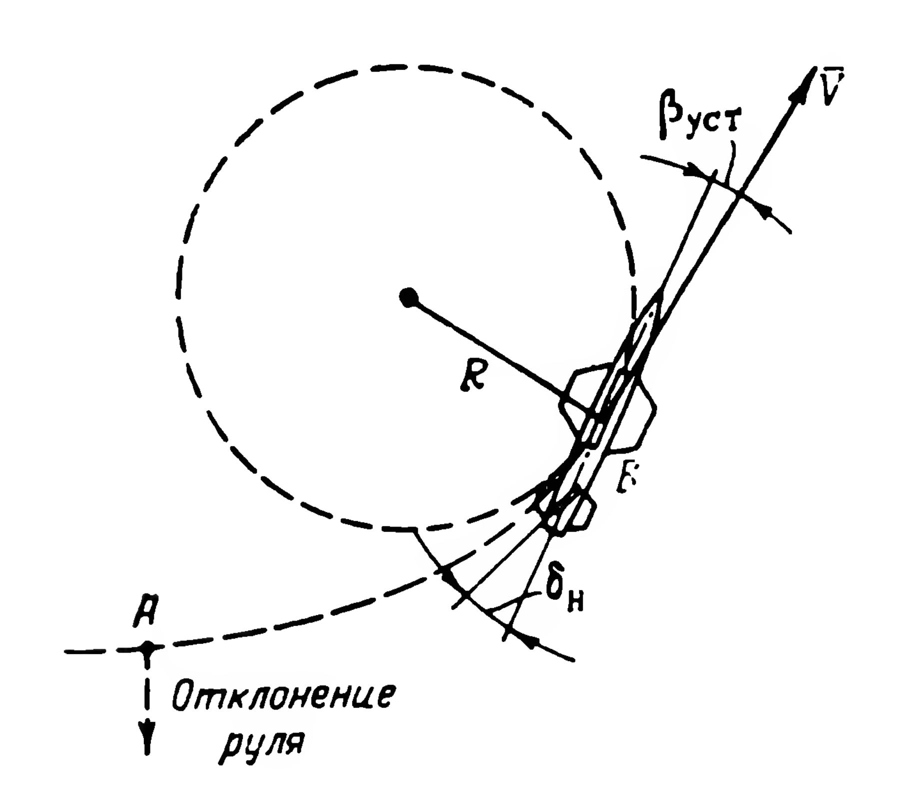
После окончания переходного процесса, угол поворота траектории приобретает значение

$$\theta_б = k_\beta\beta_{\text{уст}}\left(t + \frac{p_1 + p_e}{p_1 p_2}\right). \tag{10.13}$$

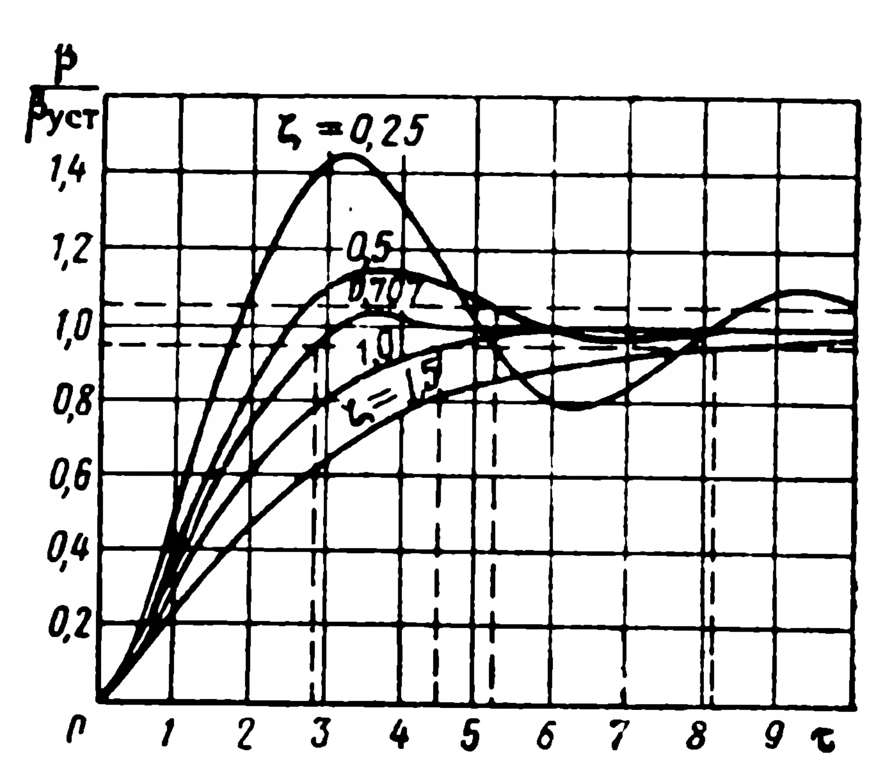
Выражение (10.13) показывает, что в установившемся режиме угол поворота траектории изменяется по линейному закону, что при постоянной скорости может иметь место лишь в случае полета снаряда по окружности. Действительно, установившееся значение угловой скорости поворота вектора скорости снаряда на основании (10.13) равно

$$\left(\frac{d\theta_б}{dt}\right)_{уст} = k_\beta \beta_{уст} = \frac{k_\beta n_{\delta_н} \delta_н}{k_\beta n_\psi + n_\beta}. \quad (10.14)$$

Формула (10.14) показывает также, что при медленном отклонении руля, когда временем установления угла скольжения можно




Фиг. 10.2. Траектория снаряда после отклонения руля.




Фиг. 10.3. График изменения угла скольжения после скачкообразного отклонения руля направления.

пренебречь по сравнению с временем движения руля, как установившееся значение угла скольжения, так и угловая скорость вектора скорости снаряда пропорциональны углу отклонения руля.

На фиг. 10.2 изображена траектория снаряда, двигавшегося ранее прямолинейно, которая получается в результате отклонения руля в точке $A$ на угол $\delta_н$. Участок траектории $AB$ может быть назван переходной траекторией, соответствующей процессу установления угла скольжения. Возможный характер этого процесса при изменении относительного затухания в функции безразмерного времени $\tau = \Omega_0 t$ представлен на фиг. 10.3. Кривые на фиг. 10.3 отображают решения уравнения (10.1). Очевидно, что вследствие построения этих кривых в относительных единицах, они пригодны для анализа решений любого уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Длительность переходного процесса в безразмерном времени $\tau$ определяется как время, в течение которого значение угла скольжения достигнет заранее оговоренного

отклонения от своего установившегося значения. Так, например, если это отклонение составляет 0,05 от $\beta_{уст}$, то при $\zeta=0{,}25$; 0,5; 0,707; 1,0 и 1,5 получим значения $\tau=10{,}2$; 5,3; 2,8; 4,5 и 8,2 соответственно. Размерное (действительное) время регулирования определяется по формуле (2.9). Таким образом, при данном затухании $\zeta$ время установления угла скольжения определяется собственной частотой снаряда $\Omega_0$.

Чтобы установить, как влияют параметры снаряда и режим полета на собственную частоту и относительное затухание, необходимо в формулы (10.6) и (10.7) подставить значения коэффициентов из (8.43). В результате получим выражения

$$\Omega_0=\sqrt{\frac{\rho_e V_e^2}{2J_y}\left(\frac{c_z^\beta m_y^{\bar{\omega}_y}\rho_e S^2 l^2}{4m}-m_y^\beta Sl\right)}, \tag{10.15}$$

$$\zeta=-\frac{\sqrt{\rho_e}\left[\frac{c_z^\beta S}{m}+\frac{Sl^2}{2J_y}\left(m_y^{\bar{\dot\beta}}+m_y^{\bar{\omega}_y}\right)\right]}{2\sqrt{\frac{2}{J_y}\left(\frac{c_z^\beta m_y^{\bar{\omega}_y}\rho_e S^2 l^2}{4m}-m_y^\beta Sl\right)}}. \tag{10.16}$$

Проанализируем эти выражения. Напомним, что коэффициенты $c_z^\beta$, $m_y^{\bar{\dot\beta}}$ и $m_y^{\bar{\omega}_y}$ всегда меньше нуля; следовательно, всегда обеспечивается неравенство $\zeta>0$. Коэффициент $m_y^\beta$ для снаряда, обладающего статической флюгерной устойчивостью, меньше нуля. С увеличением этого коэффициента собственная частота снаряда $\Omega_0$ увеличивается, но одновременно уменьшается установившееся значение угла скольжения (формула (10.3), коэффициент $n_\beta$) при том же угле отклонения руля, т. е. ухудшается управляемость снаряда. Статически нейтральный снаряд ($m_y^\beta=0$) будет иметь без системы управления малое значение $\Omega_0$ и большое время регулирования. Статически неустойчивый снаряд при некотором значении $m_y^\beta>0$ становится и динамически неустойчивым, если $\Omega_0^2<0$ *. В этом случае у снаряда при любом случайном отклонении от прямолинейного полета (даже без отклонения руля направления) угол скольжения будет непрерывно увеличиваться, пока не дойдет до критического значения. После этого плавное обтекание снаряда будет нарушено и его полет приобретет беспорядочный характер. Таким образом, нормальный полет динами-

* Когда $\Omega_0^2<0$, в выражение для коэффициента затухания следует подставлять абсолютное значение собственной частоты, т. е. этот коэффициент следует записывать в форме $2\zeta|\Omega_0|$

чески неустойчивого снаряда без системы управления невозможен.

Выражение (10.15) показывает также, что собственная частота снаряда $\Omega_0$ увеличивается при увеличении скорости полета $V_e$ и уменьшается при увеличении высоты полета за счет уменьшения $\sqrt{\rho_e}$. Именно последнее обстоятельство объясняет тот факт, что на больших высотах время установления нового угла скольжения после отклонения руля очень затягивается.

Заметим, что первый член, стоящий в скобках формулы (10.15), как правило, значительно меньше второго и в подавляющем большинстве случаев им можно пренебречь. Поэтому собственная частота снаряда практически определяется для данного режима полета коэффициентом статической устойчивости $m_y^{\beta}$. Относительный коэффициент успокоения [см. формулу (10.16)] уменьшается с ростом высоты за счет $\sqrt{\rho_e}$, вследствие чего ухудшается демпфирование движений снаряда относительно центра тяжести. Как будет показано ниже с помощью системы управления можно в значительной степени уменьшить влияние режима полета на динамические характеристики снаряда.

Рассмотрим также влияние режима полета на эффективность руля. Эту эффективность можно оценить по величине коэффициента пропорциональности между значениями установившихся угла скольжения и угла отклонения руля [см. формулу (10.3)]. Подставив вместо коэффициентов $n_{\delta_н}$, $k_{\beta}$, $n_{\beta}$ и $n_{\dot{\psi}}$ их значения из (8.43), получим

$$\beta_{уст} = \frac{m_y^{\delta_н}}{-m_y^{\beta} + \frac{1}{4m} c_z^{\beta} m_y^{\bar{\omega}_y} \rho_e S l} \cdot \delta_н. \qquad (10.17)$$

Формула (10.17) показывает, что с увеличением высоты полета (вследствие уменьшения $\rho_e$) угол скольжения $\beta_{уст}$ при том же угле отклонения руля $\delta_н$ будет увеличиваться, т. е. эффективность руля в указанном выше смысле возрастет. Однако это влияние высоты для большинства снарядов пренебрежимо мало. Это объясняется уже отмеченной выше малостью второго члена знаменателя в формуле (10.17) по сравнению с первым для снарядов с нормальной статической флюгерной устойчивостью. Скорость полета не входит в формулу (10.17) и, следовательно, не влияет на зависимость угла скольжения от угла отклонения руля.

Необходимо заметить, что все приведенные выше соображения о влиянии скорости полета на собственную частоту, относительное затухание и эффективность руля учитывают лишь явную форму зависимости этих величин от скорости. Кроме того, необходимо иметь в виду, что скорость полета (точнее число M полета) влияет на величины коэффициентов $c_z^{\beta}$, $m_y^{\beta}$, $m_y^{\bar{\dot{\beta}}}$, $m_y^{\bar{\omega}_y}$, $m_y^{\delta_н}$ (см. § 8.5). Для

учета этого обстоятельства необходимо при расчете располагать соответствующими характеристиками для этих коэффициентов в функции числа М полета.

Как показано на фиг. 10.2, после окончания движения по переходной траектории $AB$ снаряд движется по окружности радиуса $R$. Этот радиус определяется из соотношения

$$R = \frac{V_p}{\left(\frac{d\theta_б}{dt}\right)_{уст}}, \tag{10.18}$$

где $\left(\frac{d\theta_б}{dt}\right)_{уст}$ — угловая скорость поворота вектора скорости снаряда в плоскости $xoz_g$. На основании (10.14) эта угловая скорость равна

$$\left(\frac{d\theta_б}{dt}\right)_{уст} = k_\beta \beta_{уст}. \tag{10.19}$$

Подставляя значение $(d\theta_б/dt)_{уст}$ в (10.18) и учитывая на основании (8.43) значение коэффициента $k_\beta$, получим выражение для радиуса окружности *:

$$R = -\frac{2g_S}{gc_z^\beta \rho_e \beta_{уст}}, \tag{10.20}$$

где $g_S = \frac{G}{S}$ — удельная нагрузка на крыло.

Формула (10.20) определенным образом характеризует маневренные свойства снаряда и, в частности, ясно указывает на возрастание $R$ с высотой полета (из-за уменьшения $\rho_e$). Однако маневренность снарядов удобнее характеризовать перегрузкой, т. е. отношением равнодействующей аэродинамических сил (в том числе и силы тяги) к весу снаряда. Иногда перегрузку определяют как отношение ускорения снаряда от аэродинамических сил к ускорению силы тяжести. Очевидно, что оба определения тождественны. При рассмотрении криволинейных полетов удобнее пользоваться составляющими перегрузки по различным осям: $n_x$, $n_y$ и $n_z$. Тогда полная перегрузка определится формулой

$$n = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}. \tag{10.21}$$

С точки зрения оценки возможности реализации какой-либо криволинейной траектории радиус виража $R$ и перегрузка явля-

* Знак минус в формуле (10.20) исчезнет после подстановки значения $c_z^\beta$, которое всегда отрицательно.

ются равноценными характеристиками, так как каждому $R$ соответствует определенная перегрузка. Преимущество понятия перегрузки для характеристики маневренности снаряда заключается в том, что именно допустимой перегрузкой характеризуется прочность корпуса и других деталей снаряда. При допустимой перегрузке проверяется также работоспособность системы управления снаряда.

В рассматриваемом случае полета по окружности нетрудно перейти от радиуса $R$ к перегрузке по оси $z_1$. Действительно при полете по окружности на снаряд действует боковое ускорение

$$j_z = \frac{V_e^2}{R}. \tag{10.22}$$

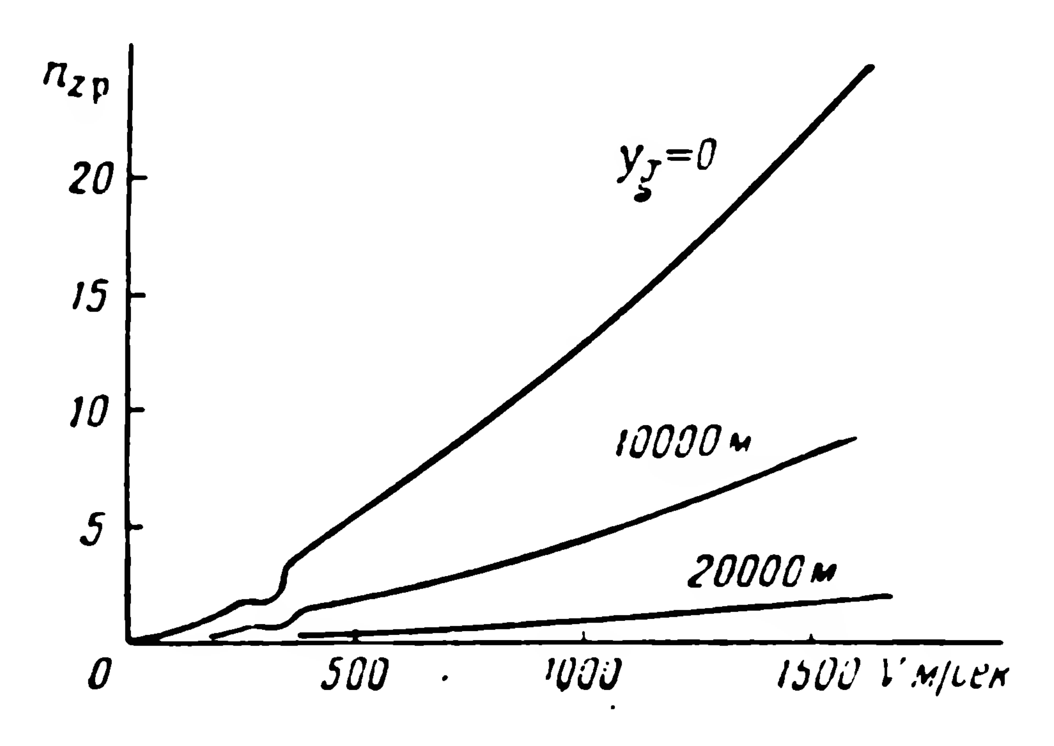
Поделив правую и левую части (10.22) на ускорение силы тяжести $g$ и подставив значение $R$ из (10.20), получим

$$n_z = -\frac{c_z^\beta \rho_e V_e^2}{2g_S} \beta_{уст}. \tag{10.23}$$

Выражение (10.23) позволяет сделать ряд практически важных выводов о влиянии параметров снаряда и режима полета на перегрузку и, следовательно, на его маневренность. Перегрузка при данном угле скольжения $\beta_{уст}$ зависит от квадрата скорости полета и при больших скоростях может достигнуть значений, недопустимых с точки зрения прочности или работоспособности системы управления. Поэтому в таких случаях необходимо тем или иным способом ограничить допустимые значения $\beta_{уст}$. С другой стороны, перегрузки уменьшаются с увеличением высоты полета (из-за $\rho_e$) и на больших высотах маневренные свойства снаряда могут стать недостаточными. Увеличение $\beta_{уст}$ может быть допущено только до значений, при которых нарушается плавное обтекание снаряда. Наконец, чем меньше удельная нагрузка на крыло, тем больше возможное значение перегрузки при прочих равных условиях. С этой точки зрения выгоднее иметь большую площадь крыльев, но это обычно трудно реализовать из-за увеличения габаритов снаряда. Как правило, у небольших снарядов легче обеспечить малую удельную нагрузку на крыло, вследствие чего маневренные свойства малых снарядов выше, чем больших.

Если в формуле (10.23) вместо $\beta_{уст}$ подставить значение $\beta_m$ — максимально допустимого угла скольжения, при котором еще не нарушается плавное обтекание, то получим предельную или располагаемую перегрузку, характеризующую маневренные свойства снаряда. Графики зависимости располагаемой перегрузки $n_{zp}$ от скорости для разных высот полета приведены на фиг. 10.4. Эти графики иллюстрируют сделанные ранее выводы о влиянии скорости и высоты полета снаряда на его маневренность.

Как уже было указано, приведенный в этом параграфе анализ сделан в предположении постоянства скорости полета снаряда во время маневра, вызванного отклонением руля. Несмотря на это, полученные результаты имеют большое значение и для снарядов, скорость полета которых переменна. В действительности руль снаряда отклоняется непрерывно и снаряд не имеет участков траектории, которые на значительном протяжении совпадали бы с ок-




Фиг. 10.4. Графики располагаемой перегрузки.

ружностью. Если рассматривать непрерывное медленное движение руля как ряд небольших скачкообразных изменений, следующих с малым временным интервалом, то за время интервала скорость снаряда существенно не изменится. Следовательно, для каждого интервала результаты анализа будут приближенно верны.

## § 10.3. ПРОДОЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ СНАРЯДА ПРИ ОТКЛОНЕНИИ РУЛЯ

При рассмотрении изолированного продольного движения плоскокрылые и невращающиеся крестокрылые снаряды находятся в одинаковых условиях: и те, и другие имеют крылья, расположенные в плоскости, перпендикулярной к плоскости траектории. Поэтому результаты, приведенные в этом параграфе, можно распространить на оба эти типа снарядов. Пусть у снаряда, двигавшегося равномерно и прямолинейно, отклонился на некоторый угол руль высоты. Очевидно, что в этом случае траектория снаряда искривится. При криволинейном продольном движении в отличие от бокового все время изменяются проекции силы веса на координатные оси $x$ и $y$. Это неизбежно вызывает изменение скорости полета снаряда, в результате чего в некоторых случаях снаряд может выйти снова на прямолинейную траекторию с новым углом наклона к горизонту. Однако процесс установления новой скорости полета является довольно длительным, и если рассматривать на-

чальную реакцию снаряда на отклонение руля, то можно не учитывать влияние силы веса снаряда и изменения скорости и высоты полета на этом отрезке траектории.

С этими ограничениями проанализируем процессы изменения углов атаки $\Delta\alpha$ и наклона траектории $\Delta\theta$, происходящие в результате внезапного отклонения руля высоты. Используя для этой цели систему уравнений (8.31), при выводе которой были учтены упомянутые выше ограничения ($\Delta V = b_0 = 0$), получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{d^2\Delta\alpha}{dt^2} + (b_\alpha + c_{\dot\alpha} + c_{\dot\vartheta})\frac{d\Delta\alpha}{dt} + (b_\alpha c_{\dot\vartheta} + c_\alpha)\Delta\alpha = c_\delta \Delta\delta_в; \quad (10.24)$$

$$\frac{d^3\Delta\theta}{dt^3} + (b_\alpha + c_{\dot\alpha} + c_{\dot\vartheta})\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} + (b_\alpha c_{\dot\vartheta} + c_\alpha)\frac{d\Delta\theta}{dt} = b_\alpha c_\delta \Delta\delta_в. \quad (10.25)$$

Сравнивая уравнения (10.24) и (10.25) для продольного движения с аналогичными уравнениями (10.1) и (10.2) для бокового движения, отмечаем их полное сходство. Роль угла скольжения теперь играет угол атаки снаряда, а роль угла поворота траектории — угол наклона траектории. Все выводы, сделанные в предыдущем параграфе для бокового движения, полностью переносятся на продольное движение, если, конечно, рассматривать это движение с теми допущениями, о которых сказано в начале параграфа. Поэтому, не повторяя проведенного в § 10.2 анализа, приведем лишь формулы для установившегося значения изменения угла атаки, собственной частоты и затухания продольного движения снаряда относительно центра тяжести при отклонении руля высоты:

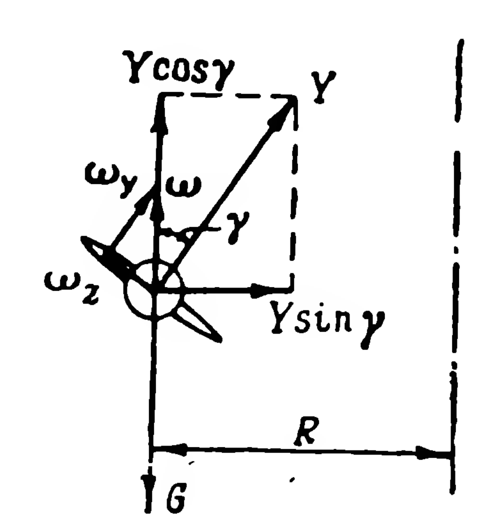
$$\Delta\alpha_{уст} = -\frac{m_z^\delta}{m_z^\alpha + \frac{1}{2m} c_y^\alpha m_z^{\bar\omega_z} \rho_e S b_A} \Delta\delta_в; \quad (10.26)$$

$$\Omega_0 = \sqrt{-\frac{\rho_e V_e^2}{2J_z}\left(\frac{c_y^\alpha m_z^{\bar\omega_z} \rho_e S^2 b_A^2}{2m} + m_z^\alpha S b_A\right)}; \quad (10.27)$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{\rho_e}\left[c_y^\alpha \frac{S}{m} - \frac{S b_A^2}{J_z}\left(m_z^{\bar{\dot\alpha}} + m_z^{\bar\omega_z}\right)\right]}{2\sqrt{-\frac{2}{J_z}\left(\frac{c_y^\alpha m_z^{\bar\omega_z} \rho_e S^2 b_A^2}{2m} + m_z^\alpha S b_A\right)}}. \quad (10.28)$$

## § 10.4. БОКОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОКРЫЛОГО СНАРЯДА ПРИ ПОЛЕТЕ С КРЕНОМ

Чтобы изменить траекторию снаряда в плоскости $xoz_g$, необходимо создать управляющую силу, лежащую в этой плоскости. Если рулем направления у плоскокрылого снаряда создать угол скольжения, то боковая сила оказывается слишком мала и маневренные свойства снаряда совершенно неудовлетворительны. Это объясняется отсутствием у плоскокрылого снаряда крыльев в плоскости $x_1oy_1$. Поэтому боковая сила при наличии угла скольжения у плоскокрылого снаряда создается только за счет несимметричного обтекания корпуса, чем и объясняется ее небольшая величина. Для получения более значительной боковой силы используется составляющая подъемной силы $Y$. Эта составляющая образуется за счет полета с креном, как показано на фиг. 10. 5. Рассмотрим наиболее простой случай правильного виража, т. е. такого разворота снаряда, в процессе которого высота, скорость и угол крена остаются постоянными, а скольжение отсутствует. Для обеспечения правильного виража необходимо задать снаряду определенный угол крена и увеличить угол атаки, чтобы вертикальная составляющая подъемной силы $Y\cos\gamma$ осталась равной весу.




Фиг. 10.5. Силы, действующие на плоскокрылый снаряд при правильном вираже.

Найдем основные параметры, характеризующие движение снаряда в режиме правильного виража. Для этого запишем уравнения движения центра тяжести снаряда в осях естественного трехгранника: касательная, нормаль и бинормаль к траектории полета. Учитывая, что скорость и высота полета постоянны, получим (на основании фиг. 10. 5):

$$\left.\begin{aligned} 0 &= P - X; \\ 0 &= Y\cos\gamma - G; \\ mV\frac{d\theta_б}{dt} &= Y\sin\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (10.29)$$

где $\gamma$ — угол крена на вираже;

$\theta_б$ — угол поворота траектории.

Так как при правильном вираже угол скольжения равен нулю, то угол поворота траектории $\theta_б$ совпадает с углом рыскания $\psi$.

Первое из уравнений (10.29) устанавливает связь между лобовым сопротивлением и тягой, которую необходимо поддерживать,

чтобы скорость на вираже сохраняла постоянное значение. Лобовое же сопротивление возрастает за счет увеличения угла атаки, так как коэффициент подъемной силы на вираже должен быть увеличен по сравнению с его значением в прямолинейном полете. Из второго уравнения системы (10. 29) вытекает формула

$$c_{y_{\text{в}}} = \frac{c_{y_{\text{п}}}}{\cos\gamma}, \qquad (10.30)$$

где $c_{y_{\text{в}}}$, $c_{y_{\text{п}}}$ — соответственно коэффициенты подъемной силы при вираже и прямолинейном полете.

Приблизительно такой же, как определяет формула (10. 30), будет связь между углами атаки при вираже и прямолинейном полете.

Нормальная перегрузка при правильном вираже также растет с увеличением угла крена. На основании второго из уравнений (10.29) получим

$$n_y = \frac{1}{\cos\gamma}. \qquad (10.31)$$

Объединяя второе и гретье уравнения (10.29), находим выражение для угловой скорости и радиуса правильного виража

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{g}{V}\operatorname{tg}\gamma; \qquad (10.32)$$

$$R_{\text{в}} = \frac{V^2}{g\operatorname{tg}\gamma}.$$

При небольших углах крена ($\gamma_{max} = 20$—$25°$) в формулах (10.32) и (10.33) вместо $\operatorname{tg}\gamma$ допустимо для приближенных оценок брать непосредственно значение угла $\gamma$. Из выражений (10.32) и (10.33) следует, что для повышения маневренных свойств плоскокрылого снаряда следует применять виражи с большим креном. Однако приблизить угол крена к значениям, близким к 90°, невозможно по двум причинам. Во-первых, при больших углах крена возрастает $c_{y\text{в}}$, как это видно на основании выражения (10.30). Увеличение этого коэффициента ограничено некоторым значением $c_{y\,\text{доп}}$, которое на 10—15% меньше $c_{y\,max}$ на данном режиме полета. Это ограничение связано со срывом потока, возникающим при критических углах атаки. Во-вторых, как следует из формулы (10.31), увеличение угла крена связано с увеличением нормальной перегрузки, которая также может быть ограничена некоторым предельным значением.

Выясним, как управлять углом крена, который необходим для обеспечения маневра снаряда в плоскости $xoz_g$. Очевидно, что для

этого должен быть предусмотрен автопилот, воздействующий на элероны снаряда. Рассмотрим задачу об управлении углом крена изолированно, не связывая пока движение по крену с другими параметрами бокового движения (углами $\beta$, $\psi$ и $\theta_б$ и координатой центра тяжести $z_g$). Для выбора параметров автопилота по каналу крена такой подход вполне оправдан, так как изменение угла крена у снарядов протекает значительно быстрее, чем изменение остальных упомянутых параметров. Поэтому для выбора параметров по углу крена используем уравнение (8.46):

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + l_{\dot\gamma} \frac{d\gamma}{dt} = l_{\delta_э}\delta_э. \qquad (10.34)$$

Уравнение (10.34) показывает, что при сделанных при его выводе допущениях снаряд нейтрален в отношении угла крена. В качестве системы управления используем идеальный автопилот с жесткой обратной связью или без обратной связи. Уравнение автопилота с жесткой обратной связью для управления углом крена записывается в форме

$$\delta_э = -i_{\dot\gamma} \frac{d\gamma}{dt} + i_\gamma(\gamma_з - \gamma). \qquad (10.35)$$

Уравнение автопилота без обратной связи

$$\frac{d\delta_э}{dt} = -i_{\dot\gamma} \frac{d^2\gamma}{dt^2} - i_\gamma \frac{d\gamma}{dt} + q_\gamma(\gamma_з - \gamma). \qquad (10.36)$$

В уравнениях (10.35) и (10.36) обозначено:

$\gamma_з = \gamma_з(t)$ — заданное значение угла крена, которое физически определяется каким-либо сигналом, идущим из системы управления снаряда в канал крена автопилота;

$i_{\dot\gamma}$, $i_\gamma$, $q_\gamma$ — передаточные числа автопилота по соответствующим сигналам, имеющие размерность:

$$[i_{\dot\gamma}] = сек; \quad [i_\gamma] = 1; \quad [q_\gamma] = 1/сек.$$

Объединяя уравнение (10.34) с формулой (10.35) или (10.36), получим общие уравнения системы управления углом крена. Для автопилота с жесткой обратной связью

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + (l_{\dot\gamma} + i_{\dot\gamma} l_{\delta_э}) \frac{d\gamma}{dt} + i_\gamma l_{\delta_э}\gamma = i_\gamma l_{\delta_э}\gamma_з. \qquad (10.37)$$

Для автопилота без обратной связи

$$\frac{d^3\gamma}{dt^3} + (l_{\dot\gamma} + i_{\dot\gamma} l_{\delta_э})\frac{d^2\gamma}{dt^2} + i_\gamma l_{\delta_э} \frac{d\gamma}{dt} + q_\gamma l_{\delta_э}\gamma = q_\gamma l_{\delta_э}\gamma_з. \qquad (10.38)$$

В каждый из коэффициентов в левой части уравнений (10.37) и (10.38) входит по одному из передаточных чисел автопилота. Поэтому можно выбрать эти коэффициенты такими, чтобы динамические характеристики снаряда по углу крена были оптимальными. В таком случае наиболее удобно для выбора параметров автопилота (передаточных чисел) применить метод СК. Сделаем это на конкретных примерах.

**Пример 10.1.** Параметры снаряда: $l_{\dot{\gamma}} = 0{,}5$ 1/*сек*; $l_{\delta_э} = 5$ 1/*сек*$^2$. Выбрать передаточные числа автопилота с жесткой обратной связью так, чтобы время регулирования угла крена ($t_р$) равнялось 1,5 *сек*.

Передаточная функция замкнутой системы, полученная по уравнению (10.37), имеет вид

$$\Phi_{\gamma/\gamma_з}(p) = \frac{i_\gamma l_{\delta_э}}{p^2 + \left(l_{\dot{\gamma}} + i_{\dot{\gamma}} l_{\delta_э}\right) p + i_\gamma l_{\delta_э}}, \tag{10.39}$$

что соответствует типовой передаточной функции (2.8). Для этой типовой функции стандартные коэффициенты приведены в табл. 2.1 и 2.2. Воспользуемся табл. 2.2, так как в этом случае время регулирования получается минимальным, а небольшое перерегулирование, присущее этим стандартным коэффициентам, в рассматриваемом случае не играет никакой роли. На основании табл. 2.2 стандартное характеристическое уравнение имеет вид

$$p^2 + 1{,}5\Omega_0 p + \Omega_0^2 = 0. \tag{10.40}$$

Приравнивая коэффициенты формулы (10.37) или знаменателя функции (10.39) коэффициентам стандартного уравнения (10.40), найдем два алгебраических уравнения

$$l_{\dot{\gamma}} + i_{\dot{\gamma}} l_{\delta_э} = 1{,}5\Omega_0; \tag{10.41}$$

$$i_\gamma l_{\delta_э} = \Omega_0^2. \tag{10.42}$$

На основании графиков, приведенных на фиг. 2.6, получим значение безразмерного времени регулирования для системы второго порядка $\tau_р = 3$. Отсюда собственная частота системы должна быть равна

$$\Omega_0 = \frac{\tau_р}{t_р} = \frac{3}{1{,}5} = 2\ \frac{1}{сек}.$$

Подставляя это значение $\Omega_0$ в (10.42), получим передаточное число по углу крена

$$i_\gamma = \frac{\Omega_0^2}{l_{\delta_э}} = \frac{2^2}{5} = 0{,}8.$$

Наконец, из уравнения (10.41) определим передаточное число по угловой скорости крена:

$$i_{\dot{\gamma}} = \frac{1{,}5\Omega_0 - l_{\dot{\gamma}}}{l_{\delta_э}} = \frac{1{,}5 \cdot 2 - 0{,}5}{5} = 0{,}5.$$

Передаточные числа автопилота, выбранные указанным методом, обеспечат получение заданных динамических характеристик снаряда по каналу угла крена.

**Пример 10.2.** Пусть параметры снаряда те же, что и в предыдущем примере. Выбрать передаточные числа автопилота без обратной связи так, чтобы время регулирования угла крена ($t_р$) равнялось 1,5 *сек.*

Передаточная функция замкнутой системы, полученная из уравнения (10.38), имеет вид

$$\Phi_{\gamma/\gamma_з}(p) = \frac{q_\gamma l_{\delta_э}}{p^3 + \left(l_{\dot\gamma} + i_{\dot\gamma} l_{\delta_э}\right) p^2 + i_\gamma l_{\delta_э} p + q_\gamma l_{\delta_э}} . \qquad (10.43)$$

Как и в предыдущем примере, эта функция соответствует типовой передаточной функции (2.8). Воспользовавшись табл. 2.2, найдем стандартное характеристическое уравнение

$$p^3 + 2,5\Omega_0 p^2 + 2,5\Omega_0^2 p + \Omega_0^3 = 0. \qquad (10.44)$$

Приравнивая коэффициенты полинома знаменателя функции (10.43) коэффициентам стандартного уравнения (10.44), получим систему из трех алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} l_{\dot\gamma} + i_{\dot\gamma} l_{\delta_э} &= 2,5\Omega_0, \\ i_\gamma l_{\delta_э} &= 2,5\Omega_0\Omega_0^2, \\ q_\gamma l_{\delta_э} &= \Omega_0^3 . \end{aligned}\right\} \qquad (10.45)$$

На основании графиков, приведенных на фиг. 2.6, найдем значение безразмерного времени регулирования для системы третьего порядка $\tau_р = 4,5$. Отсюда собственная частота системы должна быть равна

$$\Omega_0 = \frac{\tau_р}{t_р} = \frac{4,5}{1,5} = 3 \frac{1}{сек} .$$

Подставляя это значение $\Omega_0$ в систему (10.45), получим значения передаточных чисел

$$i_{\dot\gamma} = 1,4 \text{ сек}; \quad i_\gamma = 4,5; \quad q_\gamma = 5,4 \frac{1}{сек} .$$

Полученные значения передаточных чисел очень велики, и при их реализации зона линейной работы автопилота по каналу крена резко сужается. В некоторых случаях это обстоятельство может оказаться нежелательным. Чтобы уменьшить передаточные числа, следует увеличить время регулирования угла крена. Так, если это время ($t_р$) назначить равным 3 *сек*, то после проведения расчета по той же схеме, найдем вполне приемлемые значения передаточных чисел: $i_{\dot\gamma} = 0,55$ *сек*; $i_\gamma = 1,125$; $q_\gamma = 0,675 \frac{1}{сек.}$

## § 10.5. УПРАВЛЕНИЕ УГЛОМ РЫСКАНИЯ КРЕСТОКРЫЛОГО СНАРЯДА

Рассмотрение в § 10.2—10.4 движения снаряда при отклонении руля и при полете с креном имело цель дать четкие представления

об этих простейших управляемых движениях снаряда. В действительности система управления снаряда состоит из нескольких контуров, охватывающих, как правило, рулевые органы и канал управления креном снаряда. Простейшими из этих контуров являются контуры управления угловым положением снаряда: углом рыскания в боковом движении и углом тангажа в продольном. В настоящем параграфе рассматривается контур управления углом рыскания крестокрылого снаряда. При этом предполагается, что угол крена снаряда жестко стабилизирован специальным каналом автопилота с помощью элеронов и остается равным нулю в течение всего времени полета снаряда. Методика выбора параметров автопилота для стабилизации угла рыскания ничем не отличается от приведенной в предыдущем параграфе методики выбора параметров автопилота, управляющего углом крена. Управляющий углом крена автопилот будет поддерживать этот угол равным нулю, если положить $\gamma_з = 0$.

Для выбора параметров автопилота, управляющего углом рыскания крестокрылого снаряда, необходимо проанализировать систему уравнений, описывающих движение объекта управления и работу автопилота. Для описания объекта управления — крестокрылого снаряда — воспользуемся первыми двумя уравнениями системы (8.44):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\beta}{dt} - k_\beta\beta = 0; \\ &\frac{d^2\psi}{dt^2} + n_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} + n_{\dot\beta}\frac{d\beta}{dt} + n_\beta\beta = n_{\delta_н}\delta_н + \frac{\Delta M_в}{J_y} \end{aligned}\right\} \qquad (10.46)$$

В правую часть второго уравнения введен возмущающий момент $\Delta M_в$, который учитывает возможную аэродинамическую несимметрию снаряда относительно оси $y_1$, являющуюся следствием несимметрии корпуса или тяги снаряда. В дальнейших расчетах этот момент будем считать постоянной величиной. Третье уравнение системы (8.44) не рассматривается, так как оно описывает движение центра тяжести, а автопилот, управляющий только углом рыскания снаряда, не реагирует на изменение координат центра тяжести.

Исключая из системы (10.46) переменную $\beta$, получим уравнение для угла рыскания снаряда

$$\frac{d^3\psi}{dt^3} + a_1\frac{d^2\psi}{dt^2} + a_2\frac{d\psi}{dt} = b_1\frac{d\delta_н}{dt} + b_2\delta_н + \frac{1}{J_y}\frac{d\Delta M_в}{dt} + \frac{k_\beta}{J_y}\Delta M_в, \qquad (10.47)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= k_\beta + n_{\dot\beta} + n_{\dot\psi}, \\ a_2 &= k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta, \\ b_1 &= n_{\delta_н}, \\ b_2 &= k_\beta n_{\delta_н}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.48)$$

Наиболее распространенным среди различных типов автопилотов является автопилот с жесткой обратной связью. Поэтому анализ поведения снаряда с автопилотом начнем именно с него.

Идеальный автопилот с жесткой обратной связью при управлении угловым движением снаряда обычно описывается следующим уравнением:

$$\delta_н = -i_{\dot{\psi}} \frac{d\psi}{dt} + i_\psi (\psi_з - \psi), \qquad (10.49)$$

где $\psi_з = \psi_з(t)$ — заданное значение угла рыскания снаряда, т. е управляющий сигнал;

$i_\psi$ и $i_{\dot{\psi}}$ — передаточные числа автопилота по углу рыскания и по угловой скорости рыскания, имеющие размерность: $[i_\psi] = 1$; $[i_{\dot{\psi}}] = сек$.

Объединяя выражения (10.47) и (10.49), получим общее уравнение системы управления углом рыскания автопилотом с жесткой обратной связью

$$\frac{d^3\psi}{dt^3} + (a_1 + i_{\dot{\psi}} b_1) \frac{d^2\psi}{dt^2} + (a_2 + i_{\dot{\psi}} b_2 + i_\psi b_1) \frac{d\psi}{dt} + i_\psi b_2 \psi =$$

$$= i_\psi b_1 \frac{d\psi_з}{dt} + i_\psi b_2 \psi_з + \frac{1}{J_y} \frac{d\Delta M_в}{dt} + \frac{k_3}{J_y} \Delta M_в. \qquad (10.50)$$

Анализируя структуру уравнения (10.50), можно сделать некоторые существенные выводы. Это уравнение показывает, что в отношении управляющего воздействия $\psi_з(t)$ система снаряд — автопилот с жесткой обратной связью является астатической и в установившемся режиме при отсутствии возмущений ($\Delta M_в = 0$) имеет место равенство $\psi = \psi_з = \text{const}$. С другой стороны, по отношению к постоянному возмущающему моменту, вызванному аэродинамической несимметрией, эта система является статической. Погрешность в угле рыскания, вызываемая этим моментом, равна

$$\psi_{уст} = \frac{k_3 \Delta M_в}{J_y i_\psi b_2}. \qquad (10.51)$$

Из структуры уравнения (10.50) видно также, что выбор параметров автопилота ($i_{\dot{\psi}}$ и $i_\psi$) неудобно производить методом СК, так как число изменяемых параметров автопилота равно двум, а число коэффициентов уравнения, которые подлежат выбору — трем. Поэтому для выбора этих параметров придется использовать оба метода — СК и ЛАХ.

Предварительно, для более четкого представления об исследуемой системе, полезно составить ее структурную схему. На осно-

вании уравнения (10.47) передаточная функция для отношения угла рыскания снаряда к углу отклонения руля записывается в форме

$$W_{\psi/\delta_н}(p)=\frac{b_1 p+b_2}{p\,(p^2+a_1 p+a_2)}, \tag{10.52}$$

где значение коэффициентов $a_1$, $a_2$, $b_1$ и $b_2$ определяется формулами (10. 48).

Передаточная функция для отношения угла рыскания к возмущающему моменту $\Delta M_в$ имеет вид

$$W_{\psi/\Delta M_в}(p)=\frac{b_1 p+b_2}{p\,(p^2+a_1 p+a_2)}\cdot\frac{1}{n_{\delta_н} J_y}. \tag{10.53}$$

Для удобства изображения структурной схемы целесообразно, чтобы передаточные функции снаряда были бы одинаковыми как для управляющего, так и для возмущающего воздействий. Чтобы сделать эти функции одинаковыми, необходимо возмущающее воздействие привести к рулю, т. е. вместо возмущающего воздействия $\Delta M_в$ ввести новое воздействие, измеряемое в угловых величинах и определяемое соотношением

$$\Delta F_в = W_в(p)\Delta M_в. \tag{10.54}$$

Передаточная функция $W_в(p)$ на основании сравнения (10. 53) и (10. 54) должна быть равна

$$W_в(p)=\frac{1}{J_y n_{\delta_н}}=\frac{2}{m_y^{\delta_н} S l \rho_e V_e^2}. \tag{10.55}$$

Структурная схема системы управления углом рыскания снаряда с учетом уравнения автопилота (10. 47) изображена на фиг. 10. 6. Для выбора первого из параметров — передаточного числа по угловой скорости рыскания ($i_{\dot\psi}$) структурную схему системы можно представить в виде, показанном на фиг. 10. 7. Возмущающее воздействие $\Delta M_в$ не изображено, так как оно не влияет на динамические свойства системы и не входит в расчеты при выборе параметров автопилота.

Выберем передаточное число $i_{\dot\psi}$ из условия, чтобы переходный процесс во внутреннем контуре протекал в минимальное время ($\zeta=\sqrt{2}/2$). Если рассматривать этот контур изолированно, то он определяет процесс управления угловой скоростью рыскания.

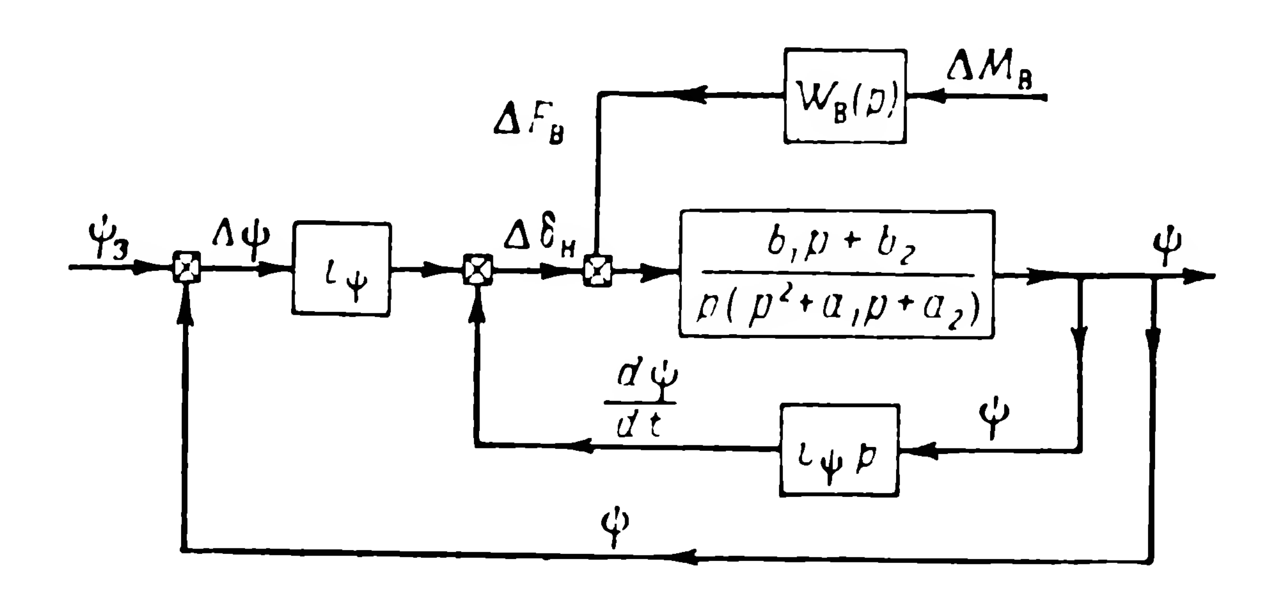
Характеристическое уравнение для замкнутого внутреннего контура имеет вид

$$p^2+(a_1+i_{\dot\psi} b_1)\,p+a_2+i_{\dot\psi} b_2=0. \tag{10.56}$$

Относительное затухание на основании уравнения (10.56) равно

$$\zeta = \frac{a_1 + i_{\dot\psi} b_1}{2\sqrt{a_2 + i_{\dot\psi} b_2}}. \tag{10.57}$$

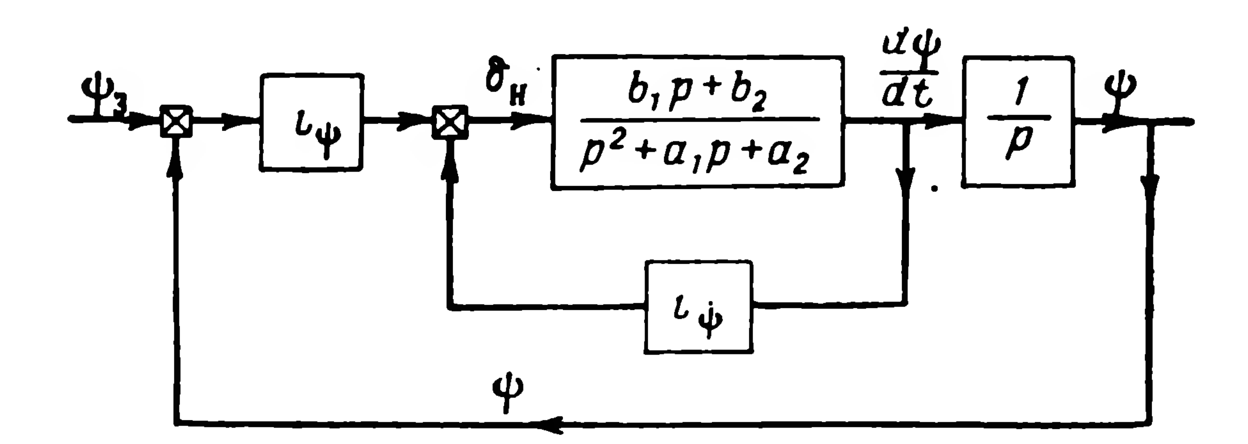
Приравнивая $\zeta = \sqrt{2}/2$, из выражения (10.57) находим требуемое значение передаточного числа $i_{\dot\psi}$. Для удобства расчетов




Фиг. 10.6. Структурная схема системы управления углом рыскания посредством автопилота с жесткой обратной связью.

это число выражено не через коэффициенты $a_1$, $a_2$, $b_1$ и $b_2$, а через исходные параметры снаряда:

$$i_{\dot\psi} = \frac{1}{n_{\delta_н}}\left[\sqrt{2(n_\beta - k_3 n_{\dot\beta}) - k_3^2} - (n_{\dot\beta} + n_{\dot\psi})\right]. \tag{10.58}$$




Фиг. 10.7. Преобразованная структурная схема фиг. 10.6, используемая для выбора параметров автопилота.

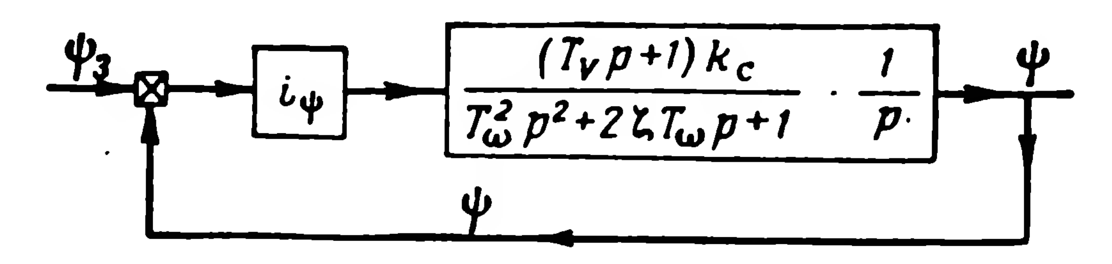
После выбора $i_{\dot\psi}$ передаточная функция внутреннего контура (фиг. 10.7) приводится к нормальной форме:

$$W_{\omega_y/\delta_н}(p) = \frac{(T_V p + 1) k_c}{T_\omega^2 p^2 + 2\zeta T_\omega p + 1}, \tag{10.59}$$

где

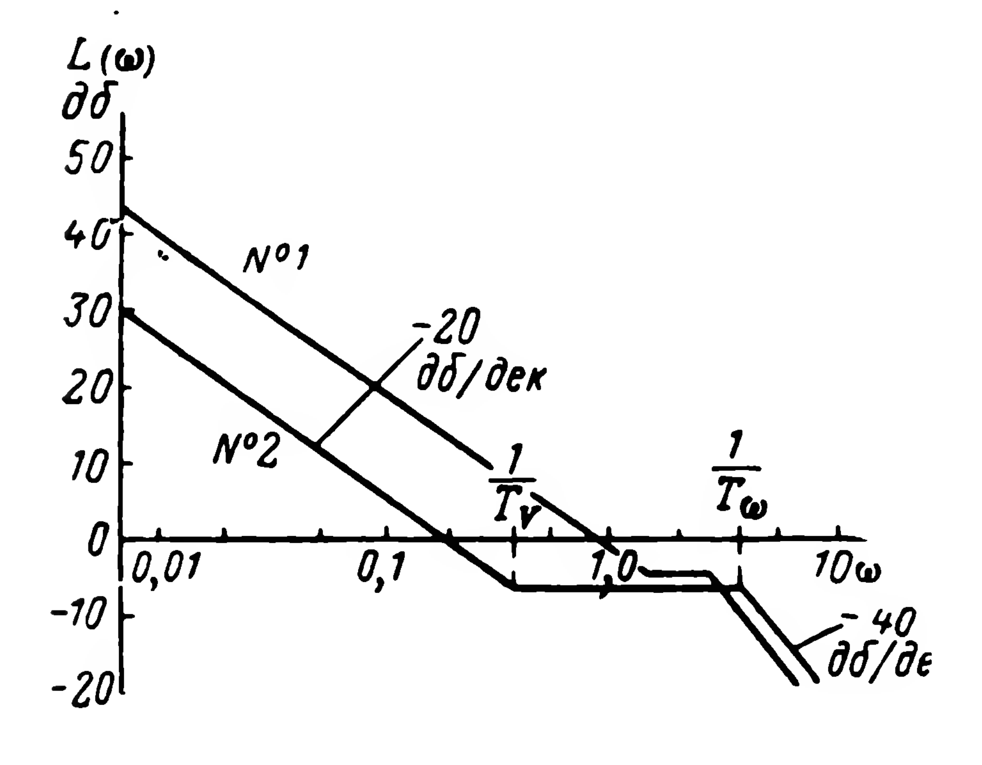
$$T_V = \frac{b_1}{b_2};\ k_c = \frac{b_2}{a_2 + i_{\dot\psi} b_2};\quad T_\omega = \frac{1}{\sqrt{a_2 + i_{\dot\psi} b_2}};\ \zeta = \frac{a_1 + i_{\dot\psi} b_1}{2\sqrt{a_2 + i_{\dot\psi} b_2}}. \qquad (10.60)$$

Теперь структурная схема исследуемой системы управления углом рыскания может быть представлена в виде, показанном на фиг. 10. 8. Выбор передаточного числа $i_\psi$ произведем методом ЛАХ. Как уже упоминалось в § 2. 3, для получения удовлетворительного характера передаточной функции необходимо, чтобы ча-




Фиг. 10.8. Преобразованная структурная схема фиг. 10.7.

стота среза приходилась на участок ЛАХ с наклоном 20 *дб/сек*. Это и служит критерием для выбора общего коэффициента усиления системы $i_\psi k_c$ и, следовательно, передаточного числа $i_\psi$, так как значение $k_c$ должно быть известно.




Фиг. 10.9. ЛАХ снарядов, параметры которых приведены в табл. 10.1.

В табл. 10.1 приведены параметры двух различных по характеристикам снарядов. Заданными являются значения $k_\beta$, $n_\beta$, $n_{\dot\beta}$, $n_{\dot\psi}$ и $n_{\delta н}$, а остальные параметры подсчитаны по формулам (10. 48) и (10. 60). В этой же таблице приведены значения передаточного числа по угловой скорости рыскания ($i_{\dot\psi}$), подсчитанные по формуле (10. 57). Отрицательное значение $i_{\dot\psi}$ для снаряда № 1 указывает, что собственное демпфирование снаряда большое и для получения оптимального затухания ($\zeta = \sqrt{2}/2$) требуется искусственно ввести отрицательное демпфирование. Так как неко-

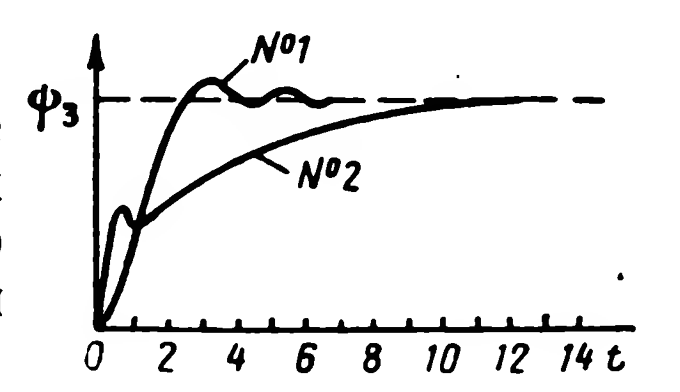
торое увеличение демпфирования несильно влияет на характер короткопериодического движения снаряда, то в дальнейших расчетах для снаряда № 1 примем $i_{\dot\psi}=0$.

*Таблица 10.1*

**Динамические характеристики снарядов**

| № снаряда | Характеристика | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $k_\beta$ | $n_\beta$ | $n_{\dot\beta}$ | $n_{\dot\psi}$ | $n_{\delta_н}$ | $a_1$ | $a_2$ | $b_1$ | $b_2$ | $i_{\dot\psi}$ | $T_V$ | $k_с$ | $T_\omega$ | $\zeta$ |
| | *1/сек* | *1/сек²* | *1/сек* | *1/сек* | *1/сек²* | *1/сек* | *1/сек²* | *1/сек²* | *1/сек²* | *сек* | *сек* | *1/сек* | *сек* | |
| 1 | 1,6 | 5,3 | 1,5 | 2,5 | 5,8 | 5,6 | 9,3 | 5,8 | 9,3 | −0,6 | 0,625 | 1,0 | 0,328 | 0,92 |
| 2 | 0,34 | 13,5 | 0,1 | 0,205 | 5,6 | 0,645 | 13,6 | 5,6 | 1,9 | 0,865 | 2,95 | 0,124 | 0,256 | 0,707 |

На фиг. 10.9 построены ЛАХ для обоих снарядов, причем для снаряда № 1 $i_{\dot\psi}=1{,}0$, а для снаряда № 2 $i_{\dot\psi}=1{,}5$. Уменьшение значений $i_{\dot\psi}$ нежелательно, так как переходный процесс в этом случае затягивается, а увеличение приводит к значительным колебаниям.




Фиг. 10.10. Кривые переходных функций снарядов, параметры которых приведены в табл. 10.1.

На фиг. 10.10 приведены переходные функции по углу рыскания для обоих снарядов. Из этих графиков видно, что если для снаряда № 1 рекомендованная методика выбора передаточного числа $i_{\dot\psi}$ привела к нужному результату (быстрый переходный процесс с малым выбросом), то для снаряда № 2 переходный процесс получился неудовлетворительным. Это объясняется тем, что третий корень характеристического полинома дифференциального уравнения (10.50) оказался значительно меньше двух других комплексных корней. Такая величина этого корня обусловлена слишком большим значением постоянной $T_V$ и малым значением коэффициента $k_с$. Переходный процесс для снаряда № 2 делится на два периода. Первый период определяется большими комплексными корнями и заканчивается быстро. Второй период определяется малым корнем и дает длинный «хвост» на кривой переходной функции. Этот результат показывает, что для снарядов некоторых типов автопилот с простейшим законом управления углом рыскания непригоден.

Рассмотрим возможность применения для снаряда № 2 авто-

пилота с жесткой обратной связью и интегральным управлением. Закон управления такого автопилота может быть записан

$$\delta_{н} = -i_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} + i_{\psi}(\psi_{з} - \psi) + q_{\psi}\int_{0}^{t}(\psi_{з} - \psi)\,dt \qquad (10.61)$$

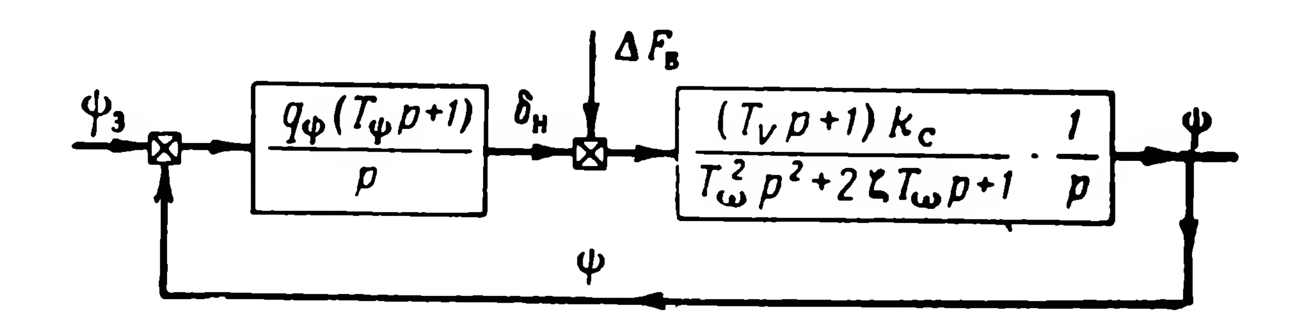
или в символической форме

$$\delta_{н} = -i_{\dot\psi}p\psi + q_{\psi}\frac{T_{\psi}p + 1}{p}(\psi_{з} - \psi), \qquad (10.62)$$

где $q_{\psi}$ — передаточное число по интегралу от сигнала рассогласования $(\psi_{з} - \psi)$, имеющее размерность $[q_{\psi}] = 1/сек$;

$T_{\psi} = i_{\psi}/q_{\psi}$.

Структурная схема системы автоматического управления углом рыскания с интегральным законом приведена на фиг. 10.11. По-




Фиг. 10.11. Структурная схема системы управления углом рыскания с автопилотом, описываемым уравнением (10.61).

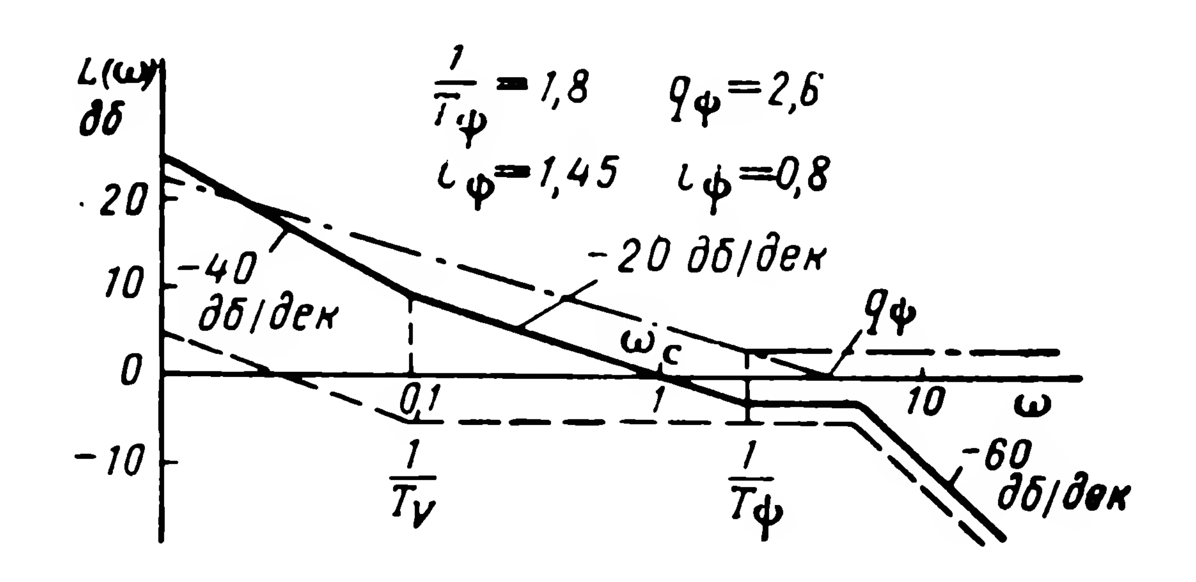
скольку в структурной схеме на фиг. 10.11 содержится интегрирующее звено, рассматриваемая система стала астатичной по отношению к постоянному возмущающему воздействию $\Delta M_{в} = \mathrm{const}$. Этой схеме и уравнениям снаряда (10.46) и автопилота (10.61) соответствует передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi_{\psi/\psi_{з}}(p) = \frac{(T_{V}p + 1)(T_{\psi}p + 1)q_{\psi}b_{2}}{p^{4} + (a_{1} + i_{\dot\psi}b_{1})p^{3} + (a_{2} + i_{\psi}b_{1} + i_{\dot\psi}b_{2})p^{2} + (i_{\psi}b_{2} + q_{\psi}b_{1})p + q_{\psi}b_{2}}. \qquad (10.63)$$

Схема на фиг. 10.11 представляет собой последовательное соединение «объекта» *, все параметры которого заданы, и уравнение «регулятора» (автопилота), параметры которого $q_{\psi}$ и $i_{\psi}$ (или $T_{\psi}$) подлежат выбору. Для выбора этих параметров вос-

* В данном случае в параметры объекта вошло и передаточное число автопилота по угловой скорости рыскания ($i_{\dot\psi}$), определяющее параметры $T_{\omega}$, $k_{c}$ и $\zeta$ [см. формулу (10.60)].

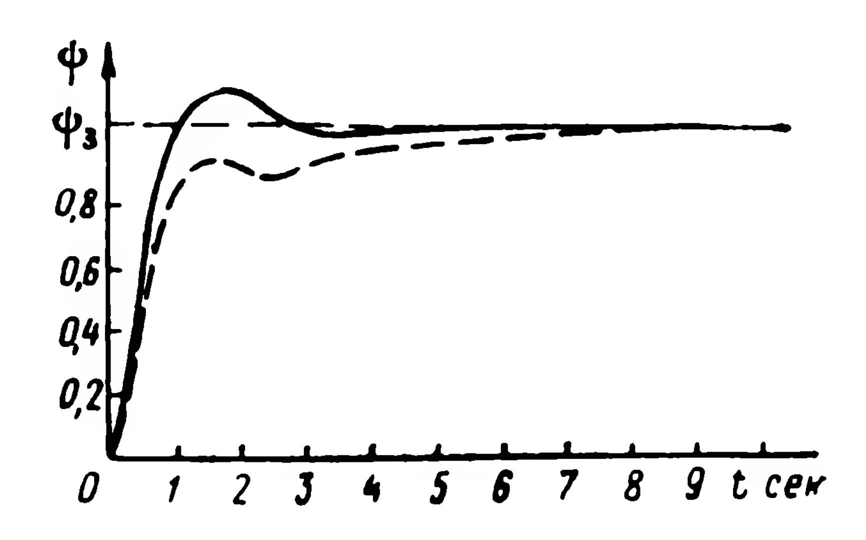
пользуемся методом ЛАХ. На фиг. 10. 12 приведены ЛАХ «объекта», «регулятора» и скорректированной системы. ЛАХ регулятора построена таким образом, чтобы частота среза в скорректированной системе стала равной единице ($\omega_c = 1{,}0$), а $T_\psi = 0{,}555$ *сек*. При этом передаточные числа автопилота получились равными $q_\psi = 2{,}6$ 1/*сек*; $i_\psi = q_\psi T_\psi = 1{,}45$.




Фиг. 10.12. ЛАХ снаряда, автопилота и всей системы управления.

— — — — ЛАХ объекта (снаряда); —·—·— ЛАХ регулятора (автопилота); ——— ЛАХ системы.

Рассматриваемой системе управления углом рыскания снаряда № 2 при найденном значении параметров автопилота соответствует переходная функция на фиг. 10. 13 (сплошная линия). Сравнение ее с переходной функцией на фиг. 10. 10, которая имела место при автопилоте с жесткой обратной связью, показывает, что с помощью интегрального управления удалось обеспечить хорошие динамические свойства при управлении углом рыскания снаряда № 2.




Фиг. 10.13. Кривые переходных функций системы, ЛАХ которой приведена на фиг. 10.12.

Для управления угловым положением корпуса снаряда (в данном случае углом рыскания) может быть использован и автопилот без обратной связи. В этом случае в закон управления автопилота необходимо вводить вторую производную от угла, которым управляет автопилот. В случае управления углом рыскания закон управления автопилота имеет вид

$$\frac{d\delta_н}{dt} = -\dot{i}_\psi \frac{d^2\psi}{dt} - i_\psi \frac{d\psi}{dt} + q_\psi(\psi_з - \psi). \qquad (10.64)$$

Выбор обозначений передаточных чисел определяется их размерностью

$$[i_{\dot\psi}] = сек; \quad [i_\psi] = 1; \quad [q_\psi] = 1/сек.$$

Объединяя уравнение закона управления автопилота без обратной связи (10. 64) с уравнением снаряда (10. 47), получим передаточную функцию для замкнутой системы управления углом рыскания

$$\Phi_{\psi/\psi_з}(p) = \frac{(T_V p + 1) q_\psi b_2}{p^4 + (a_1 + i_{\dot\psi} b_1) p^3 + (a_2 + i_\psi b_1 + i_{\dot\psi} b_2) p^2 + (i_\psi b_2 + q_\psi b_1) p + q_\psi b_2}. \tag{10.65}$$

Отличие передаточной функции (10. 65) для управления углом рыскания с помощью автопилота без обратной связи от передаточной функции (10. 63), полученной для автопилота с интегральным управлением, заключается в том, что в числителе нет множителя $(T_\psi p + 1)$. Отсутствие этого множителя обусловливает некоторое затягивание в окончании переходного процесса по углу рыскания, как показано на фиг. 10. 13 пунктиром.

## § 10.6. УПРАВЛЕНИЕ УГЛОМ ТАНГАЖА СНАРЯДА

Задача об анализе системы управления углом тангажа снаряда (плоскокрылого и крестокрылого) путем ряда допущений может быть сведена к рассмотренной в предыдущем параграфе задаче об управлении углом рыскания крестокрылого снаряда.

Для выбора параметров автопилота, управляющего углом тангажа, в подавляющем большинстве задач могут быть использованы уравнения (8. 31), приближенно описывающие продольное короткопериодическое движение снаряда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Delta\vartheta}{dt} - \frac{d\Delta\alpha}{dt} - b_\alpha \Delta\alpha = 0; \\ &\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + c_{\dot\vartheta} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\dot\alpha} \frac{d\Delta\alpha}{dt} + c_\alpha \Delta\alpha = c_\delta \Delta\delta_в + \frac{\Delta M_в}{J_z}. \end{aligned}\right\} \tag{10.66}$$

В правую часть второго уравнения введен возмущающий момент $\Delta M_в$, который учитывает возможную аэродинамическую несимметрию снаряда относительно оси $z_1$.

Исключая из (10. 66) переменную $\Delta\alpha$, получим уравнение для угла тангажа снаряда:

$$\frac{d^3\Delta\vartheta}{dt^3} + a_1 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + a_2 \frac{d\Delta\vartheta}{dt} = b_1 \frac{d\Delta\delta_в}{dt} + b_2 \Delta\delta_в + \frac{1}{J_z} \frac{d\Delta M_в}{dt} + \frac{b_\alpha}{J_z} \Delta M_в, \tag{10.67}$$

$$\text{где}\quad \left.\begin{aligned} a_1 &= b_\alpha + c_{\dot{\alpha}} + c_{\dot{\vartheta}};\\ a_2 &= b_\alpha c_{\dot{\vartheta}} + c_\alpha;\\ b_1 &= c_\delta;\\ b_2 &= b_\alpha c_\delta. \end{aligned}\right\} \qquad (10.68)$$

Сравнивая уравнение (10. 67), описывающее процесс изменения угла тангажа в продольном короткопериодическом движении снаряда, с аналогичным уравнением (10. 47) для угла рыскания крестокрылого снаряда, отмечаем их полное сходство. Это сходство не является внешним, оно отражает сходство бокового движения крестокрылого снаряда с продольным движением любого крылатого снаряда. Коэффициенты уравнений $a_1$, $a_2$, $b_1$ и $b_2$, как показывают формулы (10. 48) и (10. 68), также имеют совершенно одинаковую структуру. Поэтому все формулы, выводы и рекомендации, полученные в предыдущем параграфе для управления углом рыскания крестокрылого снаряда, могут быть использованы при анализе управления углом тангажа крылатого снаряда. При использовании формул предыдущего параграфа для анализа системы управления углом тангажа необходимо функции и параметры бокового движения крестокрылого снаряда заменить на функции и параметры продольного движения, пользуясь таблицей соответствия:

| $\psi$ | $\delta_н$ | $J_y$ | $k_\beta$ | $n_\beta$ | $n_{\dot{\beta}}$ | $n_{\dot{\psi}}$ | $n_{\delta_н}$ | $i_{\dot{\psi}}$ | $i_\psi$ | $q_\psi$ | $T_\psi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta\vartheta$ | $\Delta\delta_в$ | $J_z$ | $b_\alpha$ | $c_\alpha$ | $c_{\dot{\alpha}}$ | $c_{\dot{\vartheta}}$ | $c_\delta$ | $i_{\dot{\vartheta}}$ | $i_\vartheta$ | $q_\vartheta$ | $T_\vartheta$ |

В заключении этого параграфа рассмотрим управление углом тангажа с учетом влияния силы тяжести на угловые движения снаряда. В этом случае система уравнений, описывающих короткопериодическое движение снаряда, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Delta\vartheta}{dt} - \frac{d\Delta\alpha}{dt} - b_\theta\,\Delta\theta - b_\alpha\Delta\alpha = 0,\\ &\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + c_{\dot{\vartheta}}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\dot{\alpha}}\frac{d\Delta\alpha}{dt} + c_\alpha\Delta\alpha = c_\delta\Delta\delta_в + \frac{\Delta M_в}{J_z}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.69)$$

Эта система отличается от системы (10. 66) только наличием члена $b_\theta\ \Delta\theta$ в первом уравнении. Этот член и учитывает влияние силы тяжести, поскольку на основании формул (8. 27) $b^\theta = g\sin\theta_e/V_e$. При горизонтальном полета $\theta_e = \sin\theta_e = 0$. При малых значениях $\theta_e$ коэффициент $b_\theta$ также невелик, но при значи-

тельных углах наклона траектории он может оказать существенное влияние на движение снаряда.

Исключая из системы (10.69) все переменные, кроме $\Delta\vartheta$, получаем уравнение для угла тангажа с учетом влияния силы тяжести

$$\frac{d^3\Delta\vartheta}{dt^3}+a_1\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2}+a_2\frac{d\Delta\vartheta}{dt}+a_3\Delta\vartheta=b_1\frac{d\Delta\delta_{\text{в}}}{dt}+b_2\Delta\delta_{\text{в}}+\frac{1}{J_z}\frac{d\Delta M_{\text{в}}}{dt}-$$

$$-\frac{b_\theta}{J_z}\Delta M_{\text{в}}, \tag{10.70}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1&=b_\alpha-b_\theta+c_{\dot\alpha}+c_{\dot\vartheta};\\ a_2&=b_\alpha c_{\dot\vartheta}+c_\alpha-b_\theta(c_{\dot\alpha}+c_{\dot\vartheta});\\ a_3&=-b_\theta c_\alpha;\\ b_1&=c_\delta;\\ b_2&=c_\delta(b_\alpha-b_\theta);\end{aligned}\right\} \tag{10.71}$$

Сравнивая уравнения (10. 67) и (10. 70), можно заметить, что в последнем появился член с нулевой производной от угла тангажа. При $\theta_e>0$ коэффициент $a_3<0$, а при $\theta_e$ $<0$ коэффициент $a_3>0$. Отсюда следует, что при любом полете с кабрированием (без системы управления) снаряд будет неустойчив. Такой результат объясняется тем, что при анализе короткопериодического движения отбрасывается одно из уравнений общей системы (8. 28) и скорость полета принимается постоянной. При учете полной системы уравнений продольного движения устойчивость полета без системы управления может и не нарушиться при кабрировании [см. формулы (8.37)].

Коэффициенты $a_1$ и $a_2$ будут также изменяться в зависимости от величины и знака угла наклона траектории (благодаря коэффициенту $b_\theta$) и могут стать отрицательными на некоторых режимах полета (например, при малой скорости во время старта снаряда).

Напишем общее уравнение системы управления углом тангажа с автопилотом с жесткой обратной связью. Объединим уравнение (10. 49) автопилота, заменив в нем на основании табл. 10. 2 параметры бокового движения на параметры продольного, и уравнение снаряда (10. 70).

В результате получим общее уравнение

$$\frac{d^3\Delta\vartheta}{dt^3}+(a_1+i_{\dot\vartheta}b_1)\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2}+(a_2+i_\vartheta b_1+i_{\dot\vartheta}b_2)\frac{d\Delta\vartheta}{dt}+(a_3+i_\vartheta b_2)\Delta\vartheta=$$

$$=i_\vartheta b_1\frac{d\vartheta_з}{dt}+i_\vartheta b_2\vartheta_з+\frac{1}{J_z}\frac{d\Delta M_{\text{в}}}{dt}-\frac{b_\theta}{J_z}\Delta M_{\text{в}}. \tag{10.72}$$

Структура коэффициентов уравнения (10. 72) показывает, что система управления углом тангажа снаряда при помощи автопилота с жесткой обратной связью при учете влияния силы веса является статической не только по отношению к внешнему возмущению ($\Delta M_в$), но и по отношению к заданному значению угла тангажа. Это значение отрабатывается системой управления с погрешностью, равной

$$\Delta\vartheta_{уст} = \frac{i_\vartheta b_2}{a_3 + i_\vartheta b_2}\,\vartheta_з. \tag{10.73}$$

Чем больше угол наклона траектории, тем больше $b_\theta$ и, следовательно, $a_3$ и тем больше погрешность $\Delta\vartheta_{уст}$ в отработке заданного значения угла тангажа. При горизонтальном полете $a_3 = b_\theta = 0$ и погрешность $\Delta\vartheta_{уст}$ также равна нулю.

Использование автопилота без обратной связи или с интегральным законом управления превращает рассматриваемую систему управления углом тангажа в астатическую, несмотря на влияние силы тяжести или постоянного внешнего возмущения $\Delta M_в$.

## § 10.7. УПРАВЛЕНИЕ УГЛОМ РЫСКАНИЯ ПЛОСКОКРЫЛОГО СНАРЯДА

В § 10. 4 уже указывалось, что для эффективного управления плоскокрылым снарядом в плоскости $xoz_g$ необходимо применять полет с креном. Там же были получены основные соотношения, характеризующие полет с креном, однако динамика бокового криволинейного управляемого движения не рассматривалась. Чтобы проанализировать эту динамику, необходимо уравнения бокового движения плоскокрылого снаряда (8. 42) объединить с уравнениями автопилота той или иной схемы. Получающаяся при этом система уравнений довольно сложна. Поэтому для выбора передаточных чисел автопилота целесообразно сделать некоторые допущения, упрощающие задачу.

Разделим рассматриваемую задачу на две, не связанные между собой:

1) стабилизация (точнее ликвидация) угла скольжения с помощью руля направления;

2) управление углом рыскания и стабилизация крена с помощью элеронов.

При решении первой задачи в качестве уравнения объекта используем первое и третье из уравнений (8. 42), пренебрегая в них членами, содержащими угол крена и его производную. В резуль-

тате получим уравнения, описывающие изолированное движение относительно оси $y_1$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dt} + k_\beta \beta - \frac{d\psi}{dt} = 0; \\ &\frac{d^2\psi}{dt^2} + n_{\dot\psi} \frac{d\psi}{dt} + n_\beta \beta = n_{\delta_н} \delta_н + \frac{\Delta M_в}{J_y}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.74)$$

Во второе уравнение включен внешний момент относительно оси $y_1$, обусловленный аэродинамической несимметрией снаряда.

Уравнение автопилота с жесткой обратной связью, предназначенного для устранения скольжения, имеет вид

$$\delta_н = -i_{\dot\psi} \frac{d\psi}{dt} - i_\beta \beta. \qquad (10.75)$$

Сигнал, пропорциональный угловой скорости угла рыскания $(d\psi/dt)$, введен в закон управления для обеспечения необходимого демпфирования рассматриваемой системы.

Объединяя уравнения (10. 74) и (10. 75), найдем общее уравнение системы стабилизации угла скольжения автопилотом с жесткой обратной связью

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + (k_\beta + n_{\dot\psi} + i_{\dot\psi} n_{\delta_н}) \frac{d\beta}{dt} + (k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta + i_{\dot\psi} k_\beta n_{\delta_н} + i_\beta n_{\delta_н})\beta = \frac{\Delta M_в}{J_y}. \qquad (10.76)$$

Структура уравнения (10. 76) позволяет сделать следующие выводы:

1) передаточные числа автопилота наиболее целесообразно выбрать методом СК, так как в каждом коэффициенте есть передаточное число, которым можно свободно распорядиться;

2) внешний возмущающий момент приводит к появлению постоянного угла скольжения, равного

$$\Delta\beta_{уст} = \frac{\Delta M_в}{J_y\left(k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta + i_{\dot\psi} k_\beta n_{\dot\psi} + i_\beta n_{\delta_н}\right)}; \qquad (10.77)$$

3) при выполнении снарядом виража с постоянной угловой скоростью $d\psi/dt = \text{const}$ появляется постоянный угол скольжения, равный

$$\Delta\beta_в = -\frac{n_{\dot\psi} + i_{\dot\psi} n_{\delta_н}}{n_\beta + i_\beta n_{\delta_н}} \cdot \frac{d\psi}{dt}. \qquad (10.78)$$

Если два последних обстоятельства являются существенными для определенного типа снаряда, то для получения системы, астатичной по отношению к постоянному возмущению и к виражу

с постоянной угловой скоростью, необходимо применить автопилот с жесткой обратной связью и интегральным управлением:

$$\delta_н = -i_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} - i_\beta\beta - q_\beta\int_0^t \beta dt. \qquad (10.79)$$

Объединяя уравнения (10.74) и (10.79), найдем общее уравнение системы стабилизации угла скольжения автопилотом с интегральным управлением

$$\frac{d^3\beta}{dt^3} + (k_\beta + n_{\dot\psi} + i_{\dot\psi} n_{\delta_н})\frac{d^2\beta}{dt^2} + (k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta + i_{\dot\psi} k_\beta n_{\delta_н} + i_\beta n_{\delta_н})\frac{d\beta}{dt} + q_\beta n_{\delta_н}\beta = 0. \qquad (10.80)$$

В случае применения автопилота с интегральным управлением ошибки в установившемся режиме от внешнего момента и при вираже с постоянной скоростью оказываются равными нулю. Выбор передаточных чисел в системе, описываемой уравнением (10.80), также целесообразно производить методом СК по тем же причинам, что указывались для уравнения (10.76).

**Пример 10.3.** Параметры снаряда заданы: $k_\beta=0{,}08$ 1/*сек*; $n_\beta=3{,}2$ 1/*сек*$^2$; $n_{\dot\psi}=0{,}1$ 1/*сек*; $n_{\delta_н}=1{,}3$ 1/*сек*$^2$. Пользуясь методом СК, найти передаточные числа автопилота с жесткой обратной связью для стабилизации угла скольжения. Время регулирования ($t_р$) угла скольжения должно быть равно 1,5 *сек*.

Характеристическое уравнение для рассматриваемой системы на основании (10.76) имеет вид

$$p^2 + (k_\beta + n_{\dot\psi} + i_{\dot\psi} n_{\delta_н})p + k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta + i_{\dot\psi} k_\beta n_{\delta_н} + i_\beta n_{\delta_н} = 0. \qquad (10.81)$$

Стандартное характеристическое уравнение для этого случая (на основании табл. 2.2) будет

$$p^2 + 1{,}5\Omega_0 p + \Omega_0^2 = 0. \qquad (10.82)$$

Приравнивая коэффициенты уравнения (10.81) стандартным, получим два уравнения с двумя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} &k_\beta + n_{\dot\psi} + i_{\dot\psi} n_{\delta_н} = 1{,}5\Omega_0, \\ &k_\beta n_{\dot\psi} + n_\beta + i_{\dot\psi} k_\beta n_{\delta_н} + i_\beta n_{\delta_н} = \Omega_0^2. \end{aligned}\right\} \qquad (10.83)$$

На основании графиков, приведенных на фиг. 2.6, найдем значение безразмерного времени регулирования $\tau_р=3$ (для $n=2$). Отсюда собственная частота системы должна быть равна

$$\Omega_0 = \frac{\tau_р}{t_р} = \frac{3}{1{,}5} = 2\ \frac{1}{сек}.$$

Подставляя это значение $\Omega_0$ и числовые значения параметров снаряда в (10.83) и решив эту систему относительно $i_{\dot\psi}$ и $i_\beta$, получим их значения

$$i_{\dot\psi} = 2{,}17\ сек; \quad i_\beta = 0{,}44.$$

По такой же методике выбираются передаточные числа автопилота с интегральным управлением.

После выбора параметров системы стабилизации угла скольжения (канал руля направления) можно перейти к выбору параметров системы управления углом рыскания и стабилизации угла крена (канал элеронов). При этом в системе уравнений бокового движения плоскокрылого снаряда (8. 42) положим $\beta = d\beta/dt = 0$. В результате этого допущения для описания объекта управления остаются первое и второе уравнения этой системы. Третье уравнение выпадает из системы, а четвертое, описывающее движение центра тяжести снаряда, не связано с первыми тремя. Таким образом, получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi}{dt} + \varkappa_e \frac{d\gamma}{dt} + k_\gamma \gamma = 0; \\ &\frac{d^2\gamma}{dt} + l_{\dot\gamma} \frac{d\gamma}{dt} + l_{\dot\psi} \frac{d\psi}{dt} = l_{\delta_э} \delta_э + \frac{\Delta M_в}{J_x}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.84)$$

В правую часть второго уравнения введен внешний момент относительно оси $x_1$, обусловленный аэродинамической несимметрией снаряда.

Уравнение автопилота с жесткой обратной связью, предназначенного для управления углом рыскания с помощью создания угла крена, имеет вид

$$\delta_э = -i_{\dot\gamma} \frac{d\gamma}{dt} - i_\gamma \gamma - i_\psi (\psi_з - \psi), \qquad (10.85)$$

где $i_{\dot\gamma}$ — передаточное число по угловой скорости крена;
$i_\gamma$ — передаточное число по углу крена;
$i_\psi$ — передаточное число от рассогласования по углу рыскания на элероны (перекрестная связь).

Введение в закон управления (10. 85) сигнала по углу крена обусловлено необходимостью стабилизировать этот угол на нулевом значении при отсутствии других сигналов. Сигнал по угловой скорости крена вводится для увеличения успокоения движения по крену. Наконец, сигнал $[\psi_з(t) - \psi]$ является сигналом рассогласования в рассматриваемой системе управления углом рыскания. Отрицательный знак этого сигнала необходим в силу существующей связи между креном и рысканием: для поворота снаряда на положительный угол рыскания (влево) необходимо создать отрицательный (на левое крыло) крен.

Объединяя уравнения (10.84) и (10.85), получим общее уравнение системы управления углом рыскания и стабилизации угла крена автопилотом с жесткой обратной связью

$$\frac{d^3\psi}{dt^3} + (l_{\dot\gamma} - \alpha_e l_{\dot\psi} + i_{\dot\gamma} l_{\delta_э}) \frac{d^2\psi}{dt^2} + (- k_\gamma l_{\dot\psi} + i_\gamma l_{\delta_э} + i_\psi \alpha_e l_{\delta_э}) \frac{d\psi}{dt} +$$

$$+ i_{\dot\psi} k_\gamma l_{\delta_э} \psi = i_\psi \alpha_e l_{\delta_э} \frac{d\psi_з}{dt} + i_\psi k_\gamma l_{\delta_э} \psi_з - \frac{\alpha_e}{J_x} \frac{d\Delta M_в}{dt} - k_\gamma \frac{\Delta M_в}{J_x}. \quad (10.86)$$

В каждый из коэффициентов уравнения (10.86) входит одно из передаточных чисел автопилота, не входящее в другие коэффициенты. Поэтому для выбора значений этих передаточных чисел целесообразно использовать метод СК. При определении собственной частоты рассматриваемой системы управления углом рыскания снаряда целесообразно ориентироваться на такие данные: время доворота * должно быть 5—15 *сек*, причем оно тем больше, чем больше габариты и вес снаряда. Для обеспечения малого времени доворотов они должны выполняться со значительными кренами. Поэтому передаточное отношение от угла рыскания к углу крена должно быть 5—10. Для выполнения этого требования необходимо, чтобы в этих же пределах было отношение передаточных чисел $i_\psi / i_\gamma$.

Из уравнения (10.86) следует, что автопилот с жесткой обратной связью не обеспечивает астатизма при наличии внешнего момента и при правильном вираже. Если указанные недостатки являются существенными для данного снаряда, как и в случае стабилизации угла скольжения, то в закон управления автопилота следует ввести сигнал, пропорциональный интегралу от угла рыскания. И в этом случае для выбора параметров системы управления можно воспользоваться методом СК.

## § 10.8. УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СНАРЯДА, ИМЕЮЩЕГО ПЕРЕМЕННУЮ СКОРОСТЬ

Каждый снаряд в процессе запуска (старта) за довольно короткий промежуток времени (единицы или десятки секунд) изменяет свою скорость от нуля до номинального или максимального значения. Для некоторых типов снарядов (баллистические ракеты) большое значение имеет конечный этап замедленного движения, когда снаряд после полета на большой высоте входит в нижние более плотные слои атмосферы. Таким образом, анализ движения снаряда с переменной скоростью представляет несомненный интерес.

Метод группировки движений, позволяющий в некоторых случаях исследовать движение снаряда, имеющего переменную скорость, изложен в § 8.6 и 8.7. Рассмотрим здесь примеры применения этого метода к расчету угловых движений управляемых снарядов, движущихся с переменной скоростью. Наи-

---

* Имеется в виду доворот на такой угол, чтобы система управления не выходила из диапазона линейности ее элементов.

более простыми уравнениями описывается боковое движение крестокрылого снаряда, стабилизированного по углу крена. Для исследования угловых движений снаряда следует взять первые два из уравнений (8.56):

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{d\beta}{dt}-\frac{d\psi}{dt}-\frac{1}{m}c_z^{\beta}S\frac{\rho V}{2}\beta=0;\\
&J_y\frac{d^2\psi}{dt^2}-m_y^{\bar{\omega}_y}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho V}{2}\frac{d\psi}{dt}-m_y^{\bar{\dot{\beta}}}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho V}{2}\frac{d\beta}{dt}-m_y^{\beta}Sl\frac{\rho V^2}{2}\beta=\\
&=m_y^{\delta}Sl\frac{\rho V^2}{2}\delta_{н}.
\end{aligned}
\right\}\qquad(10.87)
$$

Проанализируем вначале, как влияет изменение скорости снаряда на характер короткопериодических движений снаряда без системы управления. Такая задача представляет интерес для некоторых этапов полета снаряда. Например, при старте снаряда с пороховыми ускорителями иногда на время работы этих ускорителей система управления не включается и снаряд движется как неуправляемый. Это делается, во-первых, потому, что при больших ускорениях система управления может работать недостаточно четко, и, во-вторых, на малых скоростях, неизбежно имеющих место в начале разгона снаряда, его рули оказываются неэффективными. Поэтому, если система управления и включена, она мало влияет на движение снаряда. Наконец, на конечном этапе движения баллистических ракет, движущихся замедленно при входе в более плотные слои атмосферы, во многих случаях также не применяется управление.

Исключая из (10.87) угол рыскания, получим уравнение для угла скольжения снаряда *

$$
\begin{aligned}
&J_y\frac{d^2\beta}{dt^2}-\left(\frac{J_y}{m}c_z^{\beta}S\frac{\rho V}{2}+m_y^{\bar{\omega}_y}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho V}{2}+m_y^{\bar{\dot{\beta}}}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho V}{2}\right)\frac{d\beta}{dt}+\\
&+\left(\frac{1}{m}c_z^{\beta}m_y^{\bar{\omega}_y}S^2\frac{l^2}{2}\frac{\rho^2V^2}{4}-m_y^{\beta}Sl\frac{\rho V^2}{2}-\frac{J_y}{m}c_z^{\beta}S\frac{\rho}{2}\frac{dV}{dt}\right)\beta=\\
&=m_y^{\delta}Sl\frac{\rho V^2}{2}\delta_{н}.
\end{aligned}
\qquad(10.88)
$$

Появление в коэффициенте при нулевой производной члена, зависящего от ускорения, а не от скорости, отражает влияние силы тяги снаряда, направленной по продольной оси, на боковое движение. При появлении угла скольжения эта тяга дает составляющую, перпендикулярную к направлению скорости полета и стремящуюся совместить вектор скорости с продольной осью снаряда.

Уравнение (10.88) является линейным нестационарным уравнением второго порядка и судить об устойчивости процесса по коэффициентам уравнения, строго говоря, невозможно. Кроме того, само понятие устойчивости (точнее, асимптотической устойчивости) в том смысле, как оно понимается для стационарных линейных систем, оказывается также непригодным. Здесь следует говорить о так называемой устойчивости на конечном интервале времени $t$ $(0<t\leqslant t_1)$. Если на интервале $t$ $(0<t\leqslant t_1)$ угол $\beta$ и его производная убывают так, что достигают к концу интервала обусловленных малых значений, то си-

* Необходимо иметь в виду, что при исключении переменных из системы уравнений с переменными коэффициентами нельзя пользоваться символическим или операторным методами, которые неприменимы к таким уравнениям, и, кроме того, при получении уравнения (10.88) масса снаряда считалась постоянной.

стема считается устойчивой на конечном интервале. В противном случае система неустойчива. Если в интервал $0 \div t_1$ укладывается весь процесс движения снаряда, то устойчивость в обычном понимании, т. е. устойчивость на бесконечном интервале, не имеет никакого значения. Об устойчивости на конечном интервале решений уравнения (10.88) можно вынести суждение в том случае, когда скорость меняется не слишком быстро и когда может быть применен метод фиксированных и квазификсированных коэффициентов, изложенный в § 2.4. Чтобы применить эти методы, необходимо знать закон изменения скорости полета.

Допустим, что в течение некоторого отрезка времени движение снаряда можно считать равноускоренным или равнозамедленным, т. е.

$$V = V_0 \pm jt. \tag{10.89}$$

Для получения более удобной формы уравнения будем считать, что в формуле (10.89) знак перед вторым членом относится не к ускорению $j$, а к времени $t$. В этом случае (10.89) можно представить в форме

$$V = j\,(t_0 \pm t), \tag{10.90}$$

где $t_0 = V_0/j$ — величина существенно положительная.

Знак плюс в скобках относится к ускоренному, а знак минус — к замедленному движению. Кроме того, скобка в целом не может стать отрицательной. Второе допущение состоит в том, что на этом отрезке времени пренебрежем зависимостью от времени всех остальных характеристик снаряда ($J_y$, $m$) и атмосферы ($\rho$).

Подставляя в уравнение (10.88) вместо $V$ его значение, получим

$$J_y \frac{d^2\beta}{dt^2} - S\frac{\rho j}{2}\left(\frac{J_y}{m}c_z^\beta + m_y^{\bar{\omega}_y}\frac{l^2}{2} + m_y^{\dot{\beta}}\frac{l^2}{2}\right)(t_0 \pm t)\frac{d\beta}{dt} +$$

$$+\left[Sl\frac{\rho j^2}{2}\left(\frac{1}{m}c_z^\beta m_y^{\bar{\omega}_y} S\frac{l\rho}{4} - m_y^\beta\right)(t_0 \pm t)^2 - \frac{J_y}{m}c_z^\beta S\frac{\rho j}{2}\right]\beta =$$

$$= m_y^\delta Sl\frac{\rho j^2}{2}(t_0 \pm t)\,\delta_н. \tag{10.91}$$

Уравнение (10.91) может быть, вообще говоря, проинтегрировано с помощью степенных рядов *. Однако вид такого решения недостаточно нагляден и для получения чисто качественных результатов можно использовать методы фиксированных и квазификсированных коэффициентов. Запишем уравнение (10.91) в более компактной форме

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + a_1(t_0 \pm t)\frac{d\beta}{dt} + [a_2(t_0 \pm t)^2 + a_3]\,\beta = b\,(t_0 \pm t)^2\,\delta_н, \tag{10.92}$$

где

$$a_1 = -S\frac{\rho j}{2J_y}\left(\frac{J_y}{m}c_z^\beta + m_y^{\bar{\omega}_y}\frac{l^2}{2} + m_y^{\dot{\beta}}\frac{l^2}{2}\right);$$

$$a_2 = Sl\frac{\rho j^2}{2J_y}\left(\frac{1}{m}c_z^\beta m_y^{\bar{\omega}_y} S\frac{l\rho}{4} - m_y^\beta\right);$$

$$a_3 = -\frac{J_y}{m}c_z^\beta S\frac{\rho j}{2}; \quad b = m_y^\delta Sl\frac{\rho j^2}{2J_y}.$$

* В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Гостехиздат, 1948.

Заметим, что коэффициенты $a_1$, $a_3$ и $b_{\bar{\beta}}$ положительны для любого снаряда ($\bar{c}_z^{\beta}$, $\bar{m}_y^{\omega_y}$, $m_y^{\dot{\beta}}$ — отрицательны), а коэффициент $a_2$ — для статически устойчивого снаряда ($m_a^{\beta} < 0$).

Чтобы перейти от уравнения (10.92) к уравнению с фиксированными коэффициентами, достаточно положить: $t=0$; $t_0=V_0/j=\text{const}$. В результате из (10.92) получим

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + a_1 t_0 \frac{d\beta}{dt} + \left(a_2 t_0^2 + a_3\right)\beta = b t_0^2 \delta_{\text{н}}. \qquad (10.93)$$

Из уравнения (10.93) найдем формулы для собственной частоты $\Omega_0$ и относительного затухания снаряда $\zeta$:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_0 &= \sqrt{a_2 t_0^2 + a_3}\ ; \\ \zeta &= \frac{a_1 t_0}{2\sqrt{a_2 t_0^2 + a_3}}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (10.94)$$

Из формул (10.94) следует, что при очень малых скоростях полета ($V_0 \to 0$ и $t_0 \to 0$) демпфирование движения снаряда стремится к нулю ($\zeta \to 0$). Уравнение (10.93) описывает движение снаряда без системы управления. Но на малых скоростях полета система управления, имеющая в качестве исполнительного органа обычные аэродинамические рули, также не может управлять снарядом, так как момент от руля $M_\delta = b t_0^2 \delta_{\text{н}}$ имеет ничтожное значение. Поэтому сделанные выводы сохраняют свое значение для снарядов и с системой управления на начальном участке этапа разгона.

С увеличением скорости полета $a_2 t_0^2$ становится гораздо больше $a_3$ и поэтому из формул (10.94) получим

$$\left.\begin{aligned} \Omega_0 &\approx t_0 \sqrt{a_2}\,, \\ \zeta &\approx \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (10.95)$$

Выражения (10.95) показывают, что собственная частота $\Omega_0$ будет расти с увеличением времени и, следовательно, скорости полета, тогда как относительное затухание $\zeta$ не зависит от этих аргументов. Обратная картина имеет место при уменьшении скорости полета, так как при этом будет уменьшаться значение $t_0 = V_0/j$.

Если для анализа движения снаряда, описываемого уравнением с переменными коэффициентами, использовать метод квазистационарных коэффициентов, то на основании табл. 2.6 из уравнения (10.92) получим

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} + \left(a_1 t_0 \pm \frac{a_2 t_0}{a_2 t_0^2 + a_3}\right)\frac{d\beta}{dt} + \left(a_2 t_0^2 + a_3\right)\beta = b t_0^2 \delta_{\text{н}}. \qquad (10.96)$$

Сравнивая уравнения (10.93) и (10.96), можно заметить, что учет в первом приближении влияния ускорения полета, который позволяет сделать метод квазификсированных коэффициентов, привел к появлению дополнительного члена

$\pm a_2 t_0/(t_0^2 + a_3)$ в коэффициенте демпфирования. Знак плюс относится к ускоренному, а знак минус — к замедленному движению снаряда. Этот дополнительный член увеличивает демпфирование при ускоренном и уменьшает — при замедленном движении. Величина его сначала растет от нуля, а затем уменьшается при увеличении $t_0$, т. е. при увеличении скорости $V_0$. При больших скоростях полета снаряда влияние этого члена становится ничтожным.

Чтобы показать, насколько усложняется анализ систем управления движением снаряда при учете изменения скорости полета, рассмотрим систему управления углом рыскания крестокрылого снаряда, в которой использован автопилот с жесткой обратной связью. Объединяя уравнения снаряда (10.87) и автопилота (10.49), найдем общее уравнение системы управления углом рыскания

$$\frac{d^3\psi}{dt^3} + (a_1 + i_{\dot\psi} b_1)\frac{d^2\psi}{dt^2} + (a_2 + i_{\dot\psi} b_2 + i_\psi b_1)\frac{d\psi}{dt} + (i_\psi b_2 + a_3)\psi = \\ = i_\psi b_1 \frac{d\psi_з}{dt} + i_\psi b_2 \psi_з. \qquad (10.97)$$

Сходство выражения (10.97) с уже рассмотренным в § 10.5 уравнением (10.50), описывающим систему управления углом рыскания снаряда, скорость полета которого постоянна, является чисто внешним. Это становится очевидным, если сравнить значения коэффициентов уравнения (10.50), определяемых формулами (10.48), с коэффициентами уравнения (10.97), приводимыми ниже:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{J_y}\left[\left(m_y^{\bar\omega_y} + m_y^{\bar{\dot\beta}}\right) S\,\frac{l^2}{2}\,\frac{\rho V}{2} + \frac{J_y}{m}\,c_z^\beta S \frac{\rho V}{2} + \frac{J_y}{V}\,\frac{dV}{dt}\right];\\
a_2 &= -\frac{1}{J_y}\left(\frac{1}{m}\,c_z^\beta m_y^{\bar\omega_y} S^2 \frac{l^2}{2}\,\frac{\rho^2}{4} + m_y^\beta S l \frac{\rho}{2}\right) V\,\frac{dV}{dt} + \\
&+ S\,\frac{l^2\rho}{4J_y}\left(m_y^{\bar\omega_y} + m_y^{\bar{\dot\beta}}\right)\left(\frac{dV}{dt} + \frac{1}{m}\,c_z^\beta S\,\frac{\rho V^2}{2}\right);\\
b_1 &= m_y^\delta S l\,\frac{\rho V^2}{2J_y};\\
b_2 &= -m_y^\delta S l\,\frac{\rho V}{2J_y}\left(\frac{1}{m}\,c_z^\beta S\,\frac{\rho V^2}{2} - \frac{dV}{dt}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (10.98)$$

Как и в предыдущих задачах настоящего параграфа, при получении уравнения (10.97) масса снаряда считалась постоянной. Учет изменения массы снаряда привел бы к дальнейшему усложнению формул (10.98). Однако и в рассмотренном случае формулы (10.98) для коэффициентов уравнения (10.97) оказались настолько сложными, что это уравнение не поддается даже качественному анализу в достаточно наглядной форме.

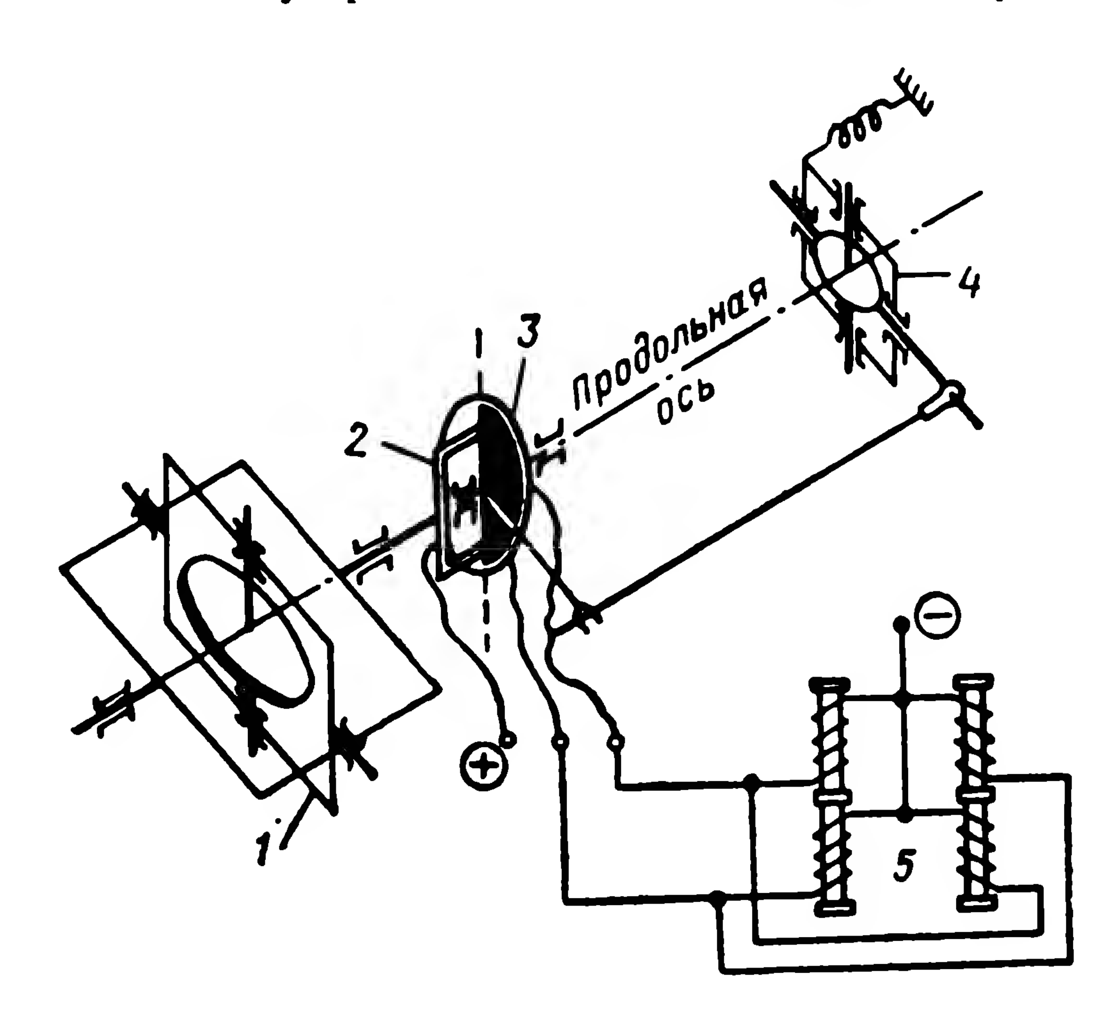
Поэтому рациональный путь выбора передаточных чисел автопилота в рассматриваемой системе заключается в следующем. Так как характеристики снаряда и зависимость скорости от времени должны быть заранее известны, то после введения их в уравнение (10.97) получим конкретные значения его коэффициентов. Затем, пользуясь фиксированными или квазификсированными коэффициентами, нужно методами СК или ЛАХ определить оптимальное значение

передаточных чисел для нескольких режимов полета снаряда. Выбрав некоторое среднее из полученных значений, следует проверить, каковы будут динамические свойства снаряда на других режимах. Если не удается с помощью одних и тех же передаточных чисел автопилота обеспечить требуемые свойства снаряда на разных режимах, следует изыскать техническую возможность изменения этих чисел в процессе полета снаряда в функции скорости, скоростного напора или, что наиболее просто, в функции времени.

Приведенный в этом параграфе материал относится к боковому движению снаряда. Однако изложенные здесь соображения и рекомендации справедливы и для продольного движения.

## § 10.9. УПРАВЛЕНИЕ УГЛОМ КРЕНА СНАРЯДА С ПОМОЩЬЮ РЕЛЕЙНЫХ АВТОПИЛОТОВ

В качестве первого примера применения релейного автопилота рассмотрим систему стабилизации угла крена снаряда. Упрощенная схема автопилота приведена на фиг. 10.14. Все устройство состоит из блока гироскопов и пары ин-




Фиг. 10.14. Электрокинематическая схема релейного автопилота.

*1* — позиционный гироскоп, *2* — щетка, *3* — диск, *4* — демпфирующий гироскоп, *5* — интерцепторы.

терцепторов крена. Интерцепторы могут располагаться на несущих плоскостях снаряда. Интерцепторы выдвигаются в противоположные стороны, вызывая вращающий момент того или иного знака относительно продольной оси снаряда. Блок гироскопов состоит из позиционного *1* и демпфирующего *4* гироскопов. Оси вращения роторов обоих гироскопов нормальны к продольной оси снаряда. На оси внешней рамки гироскопа *1* закреплены щетки *2*, которые скользят по контактному диску *3*, имеющему два токопроводящих сектора. Контактный диск связан с корпусом снаряда. Кроме того, он может поворачиваться относительно корпуса снаряда через рычажную передачу демпфирующим гироскопом. При повороте снаряда относительно продольной оси (возникновение угла крена) ползунки, связанные с внешней рамкой гироскопа, остаются неподвижными. Контактный же диск повернется вместе со снарядом. Вследствие этого

один из сегментов диска набежит на ползунок и вызовет включение обмоток электромагнитов интерцепторов *5*. При этом интерцепторы выдвигаются таким образом, чтобы создаваемый ими момент поворачивал снаряд в исходное положение, ликвидируя тем самым возникший угол крена $\gamma$. Демпфирующий гироскоп поворачивает контактный диск на угол, пропорциональный угловой скорости ($\omega = d\gamma/dt$) вращения снаряда вокруг продольной оси. Если снаряд под действием интерцепторов возвращается к исходному положению, то диск дополнительно поворачивается навстречу ползункам.

Рассмотрим движение снаряда вокруг продольной оси под действием момента, развиваемого интерцепторами крена. Если в силу каких-либо причин угол крена станет отличным от нуля, то движение снаряда с достаточной степенью точности может быть описано уравнением

$$J_x \frac{d^2\gamma}{dt} + M_x^{\omega_x} \frac{d\gamma}{dt} = M_x, \tag{10.99}$$

где $J_x$ — момент инерции снаряда относительно продольной оси;

$M_x^{\omega_x}$ — аэродинамический демпфирующий момент;

$M_x$ — момент, развиваемый интерцепторами крена.

Абсолютное значение момента, развиваемого интерцепторами, является величиной постоянной, т. е.

$$|M_x| = M_{xm} = \mathrm{const}.$$

Если учитывать изменение скорости и высоты полета, то величины $M_x^{\omega_x}$ и $M_{xm}$ являются переменными величинами. Однако изменение этих величин в процессе полета снаряда происходит гораздо медленнее протекания переходных процессов, связанных со стабилизацией снаряда относительно продольной оси. Поэтому будем рассматривать выражение (10.99) как уравнение с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим вначале работу схемы, изображенной на фиг. 10.14, без учета гироскопа демпфирования. В этом случае контактный диск *3* окажется жестко связанным с корпусом снаряда. Если предположить, что время срабатывания электромагнитов интерцепторов равно нулю и аэродинамический момент возникает без запаздывания, то при изменении знака угла крена мгновенно изменяет свой знак момент, развиваемый интерцепторами. Тогда аналогично (2.66)

$$M_x = -M_{xm}\,\mathrm{sign}(\gamma). \tag{10.100}$$

Знак минус в правой части указывает, что момент, развиваемый интерцепторами всегда стремится уменьшить угол крена. Объединив (10.99) и (10.100), найдем уравнение системы регулирования положения снаряда относительно продольной оси:

$$J_x \frac{d^2\gamma}{dt^2} + M_x^{\omega_x} \frac{d\gamma}{dt} + M_{xm}\,\mathrm{sign}(\gamma) = 0. \tag{10.101}$$

Полученное выражение аналогично уравнению (2.70), рассмотренному в § 2.6. Если учесть, что перекладка интерцепторов не может осуществляться мгновенно, то последний член в формуле (10.101) будет запаздывающим и уравнение запишется в виде

$$J_x \frac{d^2\gamma}{dt^2} + M_x^{\omega_x} \frac{d\gamma}{dt} + M_{xm}\,\mathrm{sign}_{t_3}(\gamma) = 0. \tag{10.102}$$

Введя такие новые переменные, как относительную величину угла крена

$$\bar{y} = \frac{\gamma\left(M_x^{\omega_x}\right)^2}{J_x M_{xm}},$$

безразмерное время $\tau = t \cdot \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x}$ и безразмерное время запаздывания $\Delta\tau = t_3 \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x}$, сведем уравнение (10.102) к виду (2.80):

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \frac{d\bar{y}}{d\tau} + \operatorname{sign}_{\Delta\tau}(\bar{y}) = 0. \qquad (10.103)$$

Как показано в § 2.6, такая релейная система с запаздыванием всегда будет совершать автоколебания, амплитуда которых может оказаться слишком большой, а частота слишком низкой, и система не будет работоспособной. Для подавления автоколебаний в данной системе предусмотрено корректирующее устройство в виде демпфирующего гироскопа *4* (см. фиг. 10.14), который поворачивает контактный диск на дополнительный угол, пропорциональный угловой скорости вращения снаряда.

Уравнение стабилизации снаряда с учетом действия демпфирующего гироскопа примет вид

$$J_x \frac{d^2\gamma}{dt^2} + M_x^{\omega_x} \frac{d\gamma}{dt} + M_{xm} \operatorname{sign}_{t_3}\left(\gamma + b\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0. \qquad (10.104)$$

Введя относительные единицы, сведем это уравнение к рассмотренному в § 2.5 уравнению (2.97).

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\tau^2} + \frac{d\bar{y}}{d\tau} + \operatorname{sign}_{\Delta\tau}\left(\bar{y} + \zeta\frac{d\bar{y}}{d\tau}\right) = 0. \qquad (10.105)$$

Все выводы, сделанные на основании анализа уравнений (2.80) и (2.97), справедливы и для динамики процессов стабилизации снаряда относительно продольной оси.

Используя изложенную в § 2.6 теорию релейных систем, можно дать рекомендации по выбору характеристик демпфирующего гироскопа при известных конструктивно-аэродинамических параметрах снаряда $J_x$, $M_x^{\omega_x}$ и $M_{xm}$. Для обеспечения наиболее благоприятного характера переходного процесса при достаточно малой амплитуде автоколебаний необходимо выбрать коэффициент скоростной обратной связи $\zeta$ в соответствии с формулой (2.98). В данном случае $\zeta$ является безразмерным значением коэффициента $b$ в уравнении (10.104), т. е.

$$\zeta = b\frac{M_x^{\omega_x}}{J_x}.$$

Отсюда

$$b = \zeta\frac{J_x}{M_x^{\omega_x}}. \qquad (10.106)$$

Выбрав оптимальное значение $\zeta$ на основании формулы (2.98), из формулы (10.106) получим основную характеристику демпфирующего гироскопа — угол от-

клонения его подвижной системы $b$ на единицу угловой скорости вращения снаряда относительно продольной оси.

**Пример 10.4.** Снаряд имеет следующие данные:

1) момент инерции относительно продольной оси $J_x = 31{,}4$ *кг · м²*;

2) коэффициент аэродинамического демпфирования $M_x^{\omega_x} = 274$ *кг · м² сек⁻¹*

3) максимальный момент, развиваемый интерцепторами, $M_{xm} = 5880$ *дж*;

4) время трогания электромагнитов интерцепторов $t_{\text{тр}} = 4 \cdot 10^{-3}$ *сек*;

5) время перекладки интерцепторов (из одного крайнего положения в другое) $t_{\text{пер}} = 12 \cdot 10^{-3}$ *сек*.

На основании этих данных можно определить амплитуду и период автоколебаний снаряда без гироскопа демпфирования. Эквивалентное запаздывание

$$t_3 = t_{\text{тр}} + \frac{t_{\text{пер}}}{2} = 4 \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2}\, 12 \cdot 10^{-3} = 10 \cdot 10^{-3}\ сек.$$

Запаздывание в безразмерных единицах

$$\Delta\tau = t_3 \frac{M_x^{\omega_x}}{J_x} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{31{,}4} \cdot 274 = 0{,}0875.$$

При этом запаздывании по кривым, приведенным на фиг. 2.37, получим $\bar{z}_m = 0{,}480$; $\frac{1}{\theta} = 0{,}5$; $\theta = 2{,}0$; $\bar{y}_m = 0{,}12$.

В размерных единицах:

1) период колебаний снаряда относительно продольной оси равен $\theta \frac{J_x}{M_x^{\omega_x}} = 2{,}0 \frac{31{,}4}{274} = 0{,}228$ *сек*

(частота автоколебаний 3,6 *гц*);

2) амплитуда колебаний угла крена равна

$$\bar{y}_m \cdot \frac{J_x M_{xm}}{\left(M_x^{\omega_x}\right)^2} = \frac{0{,}12 \cdot 31{,}4 \cdot 5880}{274^2} = 0{,}294\ рад = 16{,}8^\circ.$$

На основании выражения (2.98) выберем основную характеристику демпфирующего гироскопа

$$\zeta = 1 - \ln 2 \cdot e^{-\Delta\tau} = 1 - \ln 2 \cdot e^{-0{,}0875} = 0{,}365.$$

Для получения такого значения коэффициента $\zeta$ необходимо иметь

$$b = \zeta \frac{J_x}{M_x^{\omega_x}} = 0{,}365 \cdot \frac{31{,}4}{274} = 0{,}0417\ сек.$$

При $\Delta\tau = 0{,}0875$ и $\zeta = 0{,}365$ по кривым, приведенным на фиг. 2.43, находим значение $\bar{z}_2 = 0{,}015$. Остальные параметры автоколебательного процесса определяем по формулам, аналогичным (2.82) — (2.84):

$$\bar{z}_m = 1 - \left(1 - \bar{z}_2\right) e^{-\Delta\tau},$$

$$\bar{y}_m = \ln \frac{1}{1 - z_2} - z_2 (1 - \zeta),$$

$$\theta = 4\,(\Delta\tau + z_2).$$

Подставляя в эти формулы значения $z_2$ и $\Delta\tau$, получим $\bar{y}_m=0{,}0055$; $\theta=0{,}410$ или в размерных единицах:

период колебаний

$$\theta \frac{J_x}{M^{\omega_x}_x} = 0{,}410 \frac{31{,}4}{274} = 0{,}0467 \text{ сек};$$

амплитуда колебаний

$$\bar{y}_m \frac{J_x M_{xm}}{\left(M^{\omega_x}_x\right)^2} = 0{,}0055 \frac{31{,}4 \cdot 5880}{274^2} \cdot 57{,}3 = 0{,}77^\circ = 46{,}5'.$$

Таким образом, введение демпфирующего гироскопа снижает амплитуду колебаний до 46,5 угловых минут, а частоту перекладки интерцепторов повышает почти в 7 раз. Разумеется, что такие колебания никакого влияния на управление снарядом не окажут, в то время как колебания с угловой амплитудой 16,3° и частотой 3,6 *гц* следует считать недопустимыми.

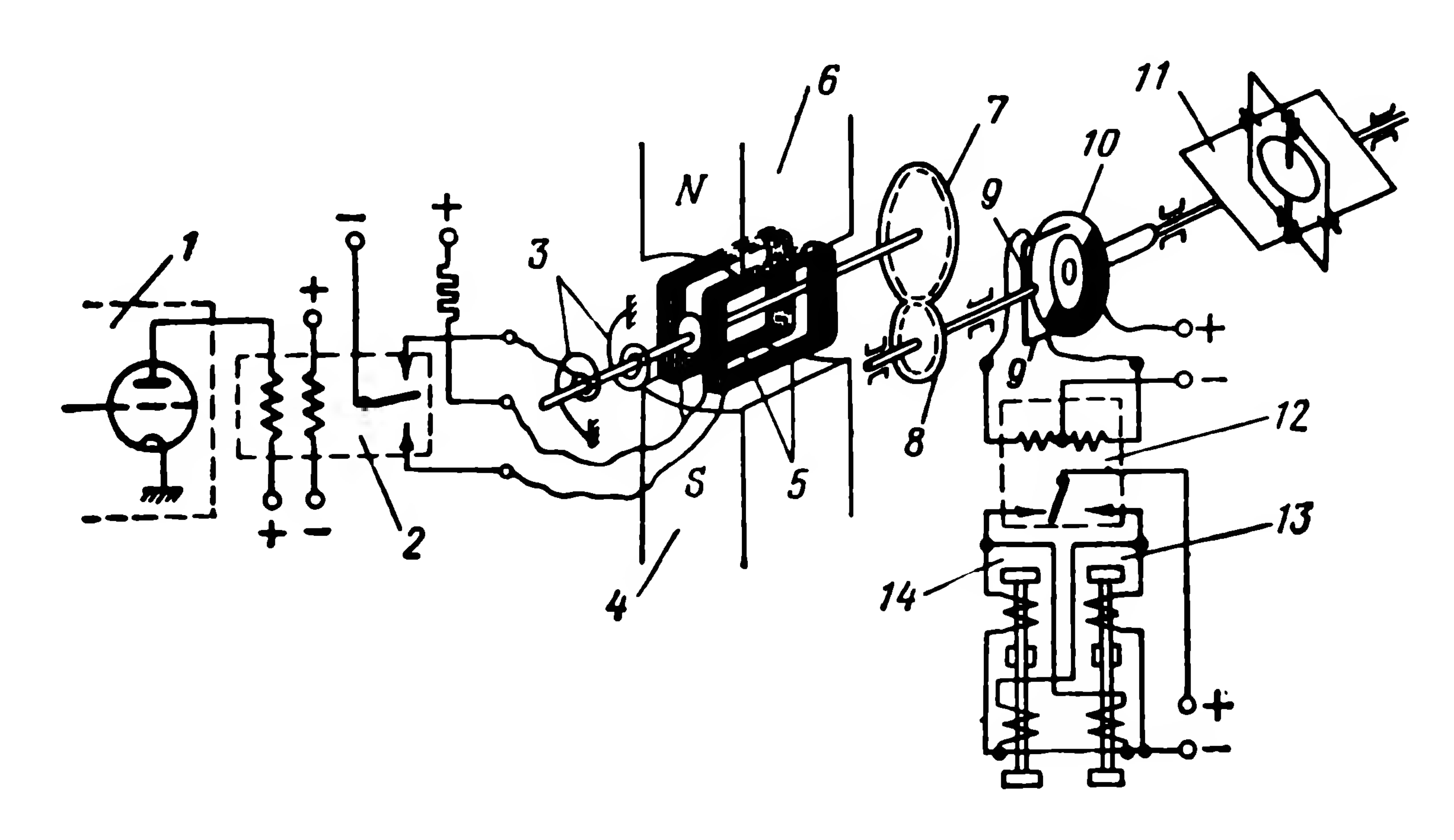
Рассмотренная система стабилизации угла крена снаряда может быть использована и для управления креном. Для этого щетки *2* (см. фиг. 10.14) необходимо связать не только с внешней рамкой гироскопа, но и с устройством, воспринимающим командные сигналы управления креном и преобразующим эти сигналы в пропорциональные механические перемещения щеток *2*. В этом случае ось внешней рамки гироскопа и задающего валика нужно связать через дифференциал.

В качестве второго примера применения релейного управления рассмотрим вибрационно-линеаризованную систему управления креном снаряда. По-прежнему речь будет идти о системе управления с электромагнитным приводом. В качестве метода подавления автоколебаний здесь используется вибрационная линеаризация за счет вынужденных колебаний. Система управления креном снаряда изображена на фиг. 10.15. В систему входят: позиционный гироскоп *11*, контактный диск *10*, жестко связанный с внешней рамкой гироскопа, магнитоэлектрическое реле *6*, поляризованное реле *12* и интерцепторы *13* и *14*. Одна половина контактного диска является проводником, а вторая — изолятором. Ось внешней рамки, на которой расположен диск, совпадает с продольной осью снаряда. По контактному диску скользят щетки *9 — 9*, посредством которых включаются обмотки управляющего двухпозиционного реле *12*. Управляющее реле своими контактами включает обмотки электромагнитов интерцепторов крена. Обмотки электромагнитов интерцепторов так подключены к контактам реле *12*, что при любом положении его подвижного контакта интерцепторы выдвинуты в противоположные стороны.

При повороте щеток *9—9* относительно диска *10* всегда будет происходить перекладка интерцепторов и скачкообразное изменение момента, вращающего снаряд относительно продольной оси. Если щетки скрепить жестко с корпусом снаряда, то получится система стабилизации крена, аналогичная рассмотренной выше (см. фиг. 10.14). Для управления креном используется устройство, поворачивающее щетки относительно корпуса снаряда. Таким устройством служит магнитоэлектрическое реле *6*, рамка которого через зубчатую пару *7* и *8* поворачивает на нужный угол щетки *9—9*. Подвижная система магнитоэлектрического реле имеет две катушки *5*, которые при протекании по ним тока поворачиваются в поле постоянного магнита *4*, преодолевая противодействующую силу двух спиральных пружин *3*. Нейтральное положение подвижной системы реле *6*, а следовательно, и щеток соответствует углу крена снаряда, равному нулю. Обмотки реле *6* подключены к контактам поляризованного реле *2* на выходе приемника *1*. Подвижный контакт этого реле, перекладываясь с частотой 10—15 *гц* поочередно включает обмотки магнитоэлектрического реле.

Если управляющий сигнал равен нулю, то в обе обмотки посылаются одинаковые по длительности импульсы постоянного напряжения. Подвижная си-

стема реле будет совершать колебательные движения около нейтрального положения. Если управляющий сигнал отличен от нуля, то длительность импульсов в обмотках 5 будет различной, что даст некоторый средний момент на катушки 5, пропорциональный величине управляющего сигнала. Этот средний момент повернет подвижную систему на угол, при котором он уравновесится моментом спиральных пружин 3. Таким образом, средние углы поворота рамки реле и щеток 9—9 оказываются пропорциональными сигналу управления. Поворотом ползунков снаряду можно задать любой угол крена.




Фиг. 10.15. Электрокинематическая схема релейного автопилота с вибрационной линеаризацией.

1 — приемник, 2 — поляризованное реле, 3 — спиральные пружины, 4 — постоянный магнит, 5 — катушки, 6 — магнитоэлектрическое реле, 7 и 8 — зубчатая пара, 9 — ползунки, 10 — контактный диск, 11 — позиционный гироскоп, 12 — двухпозиционное реле, 13 и 14 — интерцепторы.

Подвижная система реле 6 всегда будет совершать колебания с частотой перекладки контактов реле 2. Колебания будут происходить относительно среднего углового положения, которое задается управляющим сигналом. Угловые колебания с той же частотой и вполне определенной амплитудой будут совершать и щетки 9—9. Подвижная система магнитоэлектрического реле выполнена достаточно массивной. Обмотки намотаны на медном каркасе, образующем короткозамкнутый виток, и движение ее в магнитном поле оказывается значительно демпфированным. Благодаря этому колебания подвижной системы и ползунков около какого-либо среднего положения носят практически синусоидальный характер при вынуждающем периодическом моменте прямоугольной формы. Закон движения щеток 9—9, связанных с рамкой магнитоэлектрического реле, можно записать в виде

$$\psi = \psi_0(t) + \psi_m \sin \omega t,$$

где $\psi_0(t)$ — задаваемый закон изменения угла крена;
$\psi_m$ и $\omega$ — амплитуда и частота колебаний щеток 9—9 относительно угла $\psi_0(t)$.

При этом $\psi_0(t)$, а также угол крена $\gamma(t)$ должны быть медленно меняющимися функциями в сравнении с $\psi_m \sin \omega t$. Уравнение (10.99), описывающее изменение угла крена снаряда, останется справедливым и в данном случае,

только момент $M_x$, развиваемый интерцепторами, будет функцией рассогласования $\varepsilon=\psi_0-\gamma$. При мгновенном срабатывании реле и электромагнитов эта зависимость запишется следующим образом:

$$M_x = M_{xm}\,\mathrm{sign}\,(\varepsilon) = M_{xm}\,\mathrm{sign}\,[\psi_m \sin \omega t + \psi_0(t) - \gamma]. \qquad (10.107)$$

Объединив уравнения (10.99) и (10.107), получим уравнение, описывающее процесс управления углом крена снаряда:

$$J_x \frac{d^2\gamma}{dt^2} + M_x^{\omega_x} \frac{d\gamma}{dt} = M_{xm}\,\mathrm{sign}\,[\psi_m \sin \omega t + \psi_0(t) - \gamma]. \qquad (10.108)$$

Положив для упрощения

$$\psi_0(t) = \mathrm{const} = 0,$$

перепишем уравнение (10.108):

$$J_x \frac{d^2\gamma}{dt^2} + M_x^{\omega_x} \frac{d\gamma}{dt} + M_{xm}\,\mathrm{sign}\,(\gamma - \psi_m \sin \omega t) = 0. \qquad (10.109)$$

Выражение (10.109) показывает, что аргумент нелинейной функции sign содержит периодическую составляющую. Так как $\gamma$ является медленно меняющейся функцией в сравнении с $\psi_m \sin \omega t$, то на протяжении нескольких периодов $2\pi/\omega$ ее можно считать постоянной.

Функция $\mathrm{sign}\, n(\gamma - \psi_m \sin \omega t)$ будет периодической лишь при $|\gamma| < \psi_m$. Частота перекладки интерцепторов $\omega$ выбирается обычно большой (10—15 *гц*), чтобы колебания снаряда вокруг продольной оси, обусловленные периодической составляющей, имели незначительную амплитуду.

Таким образом, в рассмотренной релейной системе линеаризация осуществляется колебаниями синусоидальной формы. Следовательно, в данном случае применима формула (2.105)

$$K = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\gamma}{\psi_m}. \qquad (10.110)$$

Зависимость $K=K(\gamma)$ дается графиком на фиг. 2.47, *б*. При малых $\gamma/\psi_m$

$$K = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\psi_m} \gamma. \qquad (10.111)$$

Выражение (10.111) показывает, что коэффициент усиления релейного усилителя для медленно меняющихся сигналов равен $\frac{2}{\pi} \frac{1}{\psi_m}$. При условии, что $|\varepsilon| < \psi_m$, можно написать уравнение, описывающее изменение угла крена при переменном входном сигнале $\psi_0(t)$:

$$J_x \frac{d^2\gamma}{dt^2} + M_x^{\omega_x} \frac{d\gamma}{dt} + M_{xm} \frac{2}{\pi\psi_m} \cdot \gamma = M_{xm} \frac{2}{\pi\psi_m} \psi_0(t). \qquad (10.112)$$

Выражение (10.112) представляет собой уравнение колебательного звена

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + 2\zeta\Omega_0 \frac{d\gamma}{dt} + \Omega_0^2 \gamma = \Omega_0^2 \psi_0(t), \qquad (10.113)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\Omega_0^2 &= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{M_{xm}}{J_x\psi_m}\,;\\ \zeta &= \frac{M_x^{\omega_x}}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\psi_m}{J_xM_{xm}}}\,.\end{aligned}\right\}\qquad(10.114)$$

Выражения (10.114) показывают, что собственная частота колебаний системы $\Omega_0$ обратно пропорциональна, а степень затухания $\zeta$ прямо пропорциональна корню квадратному из $\psi_m$.

В области, где $|\psi_0-\gamma|>\psi_m$, расчет изменения угла крена необходимо проводить по уравнению:

$$J_x\frac{d^2\gamma}{dt^2}+M_x^{\omega_x}\frac{d\gamma}{dt}=\pm M_{xm}.$$

В этом случае интерцепторы полностью выдвинуты в одну сторону и на снаряд действует постоянный момент $M_{xm}$. Амплитуда первой гармоники колебаний снаряда в установившемся режиме ($\varepsilon=0$) может быть получена как частное решение уравнения

$$J_x\frac{d^2\gamma}{dt^2}+M_x^{\omega_x}\frac{d\gamma}{dt}=\frac{4}{\pi}M_{xm}\sin\omega t.\qquad(10.115)$$

Решение этого уравнения дает искомую амплитуду

$$\gamma_m=\frac{4}{\pi}\,\frac{M_{xm}}{\omega\sqrt{J_x^2\omega^2+\left(M_x^{\omega_x}\right)^2}}.\qquad(10.116)$$

Частота $\omega=\dfrac{2\pi}{T_1+T_2}$ должна выбираться такой, чтобы амплитуда колебаний снаряда была незначительной. Линейные уравнения для описания поведения системы в зоне вибраций интерцепторов были получены в предположении, что запаздывание $t_з=0$. Как говорилось в § 2.6, при $t_з=0$ и при $Z$-образной зависимости момента от угла крена автоколебаний в системе не будет. В действительности $t_з\neq 0$, и в системе неизбежно установятся автоколебания. Однако, если на вход системы воздействуют колебания $\psi_m\sin\omega t$ достаточно высокой частоты и такой амплитуды, при которой обеспечивается надежное срабатывание реле и электромагнитов, то автоколебания будут подавлены. При этом в стационарном состоянии интерцепторы будут перекладываться с частотой $\omega$, с которой и будут происходить колебания снаряда относительно продольной оси.

Для подавления автоколебаний частота внешних вынуждающих колебаний должна быть взята в несколько раз выше возможной частоты автоколебаний системы. Повышение частоты внешних колебаний $\omega$ ограничивается способностью всех релейных звеньев системы воспроизводить эту частоту. Например, электромагниты только в том случае могут перекладывать интерцепторы с частотой $\omega$, если время их срабатывания будет меньше полупериода колебаний $t_{ср}<\dfrac{\pi}{\omega}$. Релейное запаздывание $t_з$ незначительно влияет на характер переходного процесса в зоне пропорциональности, поэтому уравнение (10.112) остается приближенно справедливым и при учете запаздывания $t_з$.

**Пример 10.5.** Пусть известны следующие данные снаряда и системы управления:

1) момент инерции $J_x = 155$ *кГ · м²*;

2) коэффициент момента аэродинамического демпфирования $M_x^{\omega_x} = 677$ *кГ · м² сек⁻¹*.

3) максимальный момент, развиваемый интерцепторами, $M_{xm} = 2130$ *дж*;

4) запаздывание, вносимое реле и интерцепторами, $23 \cdot 10^{-3}$ *сек*.

Определим частоты и амплитуды автоколебаний снаряда относительно продольной оси при отсутствии линеаризующих колебаний. При относительном запаздывании

$$\Delta\tau = \frac{t_з}{J_x} \cdot M_x^{\omega_x} = \frac{0{,}023}{155} \cdot 677 = 0{,}1$$

по кривым, приведенным на фиг. 2.37, определим

$$\bar{y}_m = 0{,}14 \text{ и } \frac{1}{\theta} = 0{,}47.$$

Таким образом, амплитуда колебаний угла крена

$$\gamma_m = \bar{y}_m \cdot \frac{J_x}{M_x^{\omega_x}} \cdot \frac{M_{xm}}{M_x^{\omega_x}} = 0{,}14 \frac{155 \cdot 2130}{677^2} 57{,}3 = 5{,}8°,$$

частота колебаний

$$\frac{M_x^{\omega_x}}{\theta J_x} = \frac{677}{155} \cdot 0{,}47 = 2{,}13 \text{ гц}.$$

Колебания с такой частотой и амплитудой сильно затруднят управление снарядом.

Приведем теперь щетки в колебательное угловое движение по закону $\psi_m \sin \omega t$. Пусть амплитуда угловых колебаний $\psi_m = 25°$, а частота колебаний $f = \omega/2\pi = 10$ *гц*. Очевидно, что в этом случае автоколебания будут подавлены и интерцепторы будут перекладываться с частотой $\omega$.

Амплитуду угловых колебаний снаряда найдем по формуле (10.116):

$$\gamma_m = \frac{4}{\pi\omega} \cdot \frac{M_{xm} \cdot 57{,}3}{\sqrt{J_x^2\omega^2 + \left(M_x^{\omega_x}\right)^2}} = \frac{4 \cdot 2130 \cdot 57{,}3}{\pi \cdot 62{,}8 \sqrt{155^2 \cdot 62{,}8^2 + 677^2}} = 0{,}255°.$$

Переходный процесс при отработке какого-либо заданного угла крена в зоне пропорциональности может быть определен на основании уравнения (10.113).

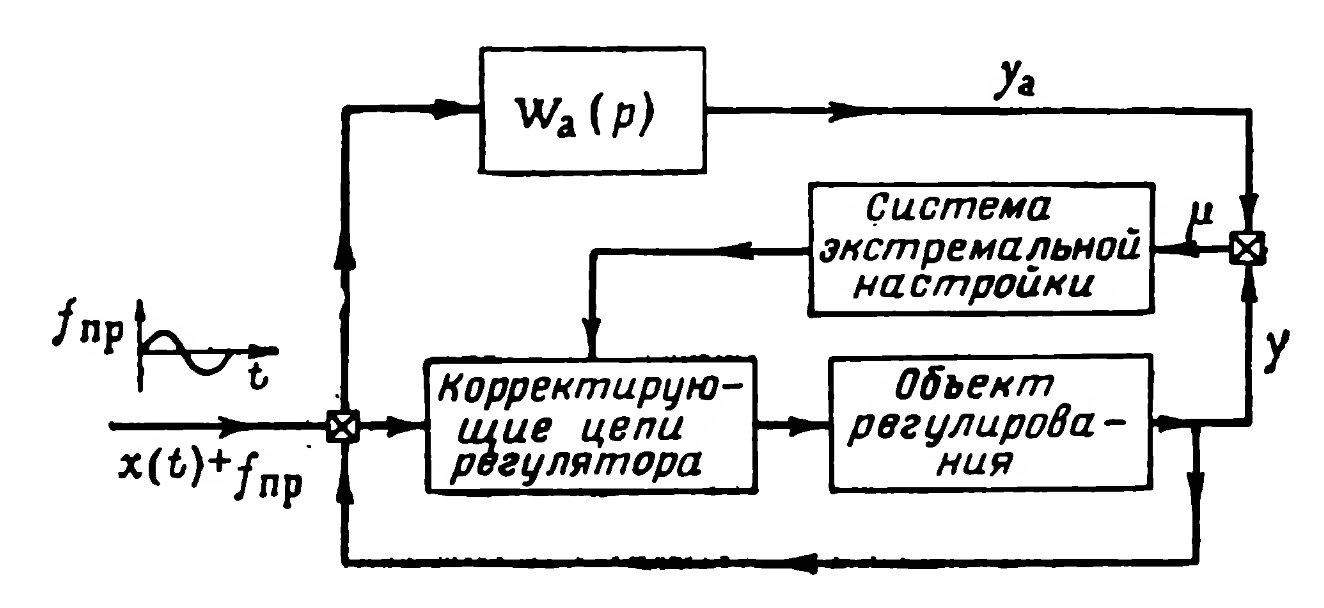
Степень затухания в зоне пропорциональности

$$\zeta = \frac{M_x^{\omega_x}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{\psi_m}{J_x M_{xm}}} = \frac{69}{2} \sqrt{\frac{\pi \cdot 25}{2 \cdot 57{,}3 \cdot 2130 \cdot 155}} = 0{,}352.$$

Степень затухания оказывается несколько малой и переходный процесс отработки угла крена в зоне пропорциональности будет носить колебательный характер. Можно увеличить $\zeta$ за счет увеличения $\psi_m$. Однако, для того чтобы получить, например, $\zeta = 0{,}7$, нужно повысить амплитуду колебаний до $\psi_m = 99°$. Это может оказаться неприемлемым. Поэтому можно повысить затухание $\zeta$ за счет введения в систему управления углом крена демпфирующего гироскопа.

## § 10.10. САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕТОМ СНАРЯДОВ

Для стабилизации динамических характеристик управляемых снарядов при изменении режима полета можно изменять передающие свойства автопилота в функции скоростного напора. Для этой цели в состав бортовой аппаратуры должен быть включен измеритель скоростного напора. При известной программе невозмущенного режима, как это имеет, например, место для активного участка баллистических ракет, можно передающие свойства автопилота изменять в функции времени. Однако существует более прогрессивный способ стабилизации




Фиг. 10.16. Структурная схема системы с экстремальной настройкой корректирующих цепей.

динамических свойств управляемых снарядов с помощью самонастраивающихся систем или самонастраивающихся автопилотов. Самонастраивающиеся системы автоматического управления могут быть:

1) с экстремальной настройкой корректирующих цепей или передаточных чисел автопилота;

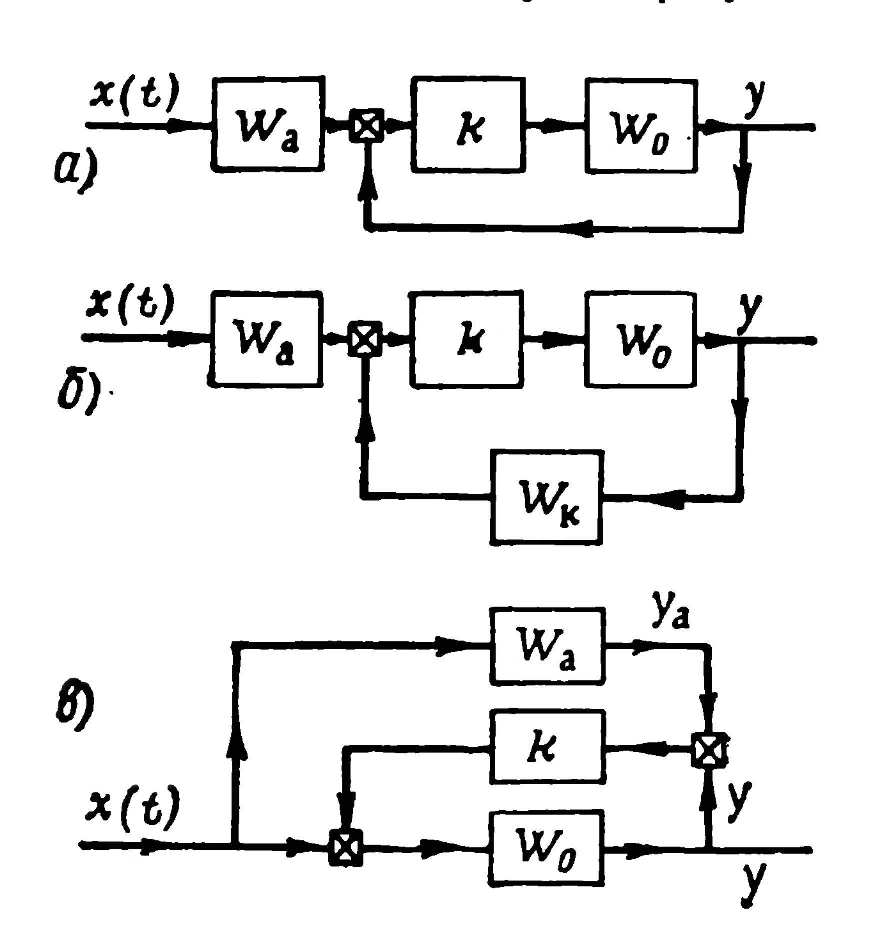
2) с высоким коэффициентом усиления и нелинейными характеристиками.

Структурная схема системы первого вида изображена на фиг. 10.16. Система, кроме объекта и регулятора, включает в себя аналог (модель) снаряда с желаемыми динамическими характеристиками и систему экстремальной настройки корректирующих цепей или передаточных чисел регулятора. На вход основной системы и модели с передаточной функцией $W_a(p)$, кроме входного сигнала $x(t)$, подается специальный пробный сигнал $f_{пр}$ (гармонический сигнал, последовательность импульсов или какой-либо другой). Выход модели — аналога $y_a$ и выход системы $y$ сравнивается между собой и образуется разность $\mu$. Сигнал $\mu$ поступает в систему экстремальной настройки. Система экстремальной настройки воздействием на параметры корректирующих цепей $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ — осуществляет поиск минимума $\mu$ или какого-либо из его функционалов. Когда $\mu$ принимает минимальное значение, выход эталона $y_a$ оказывается близким к выходу системы $y$, т. е. передаточная функция системы становится близкой к передаточной функции аналога, которая неизменна и выбрана в соответствии с требованиями к системе регулирования. Таким образом происходит автоматическое приближение динамических свойств системы регулирования к желаемым эталонным свойствам. Пробный сигнал $f_{пр}$ выбирается так, чтобы его составляющая на выходе системы лежала в допустимых пределах. При непрерывном воздействии на вход случайного сигнала $x(t)$, содержащего и высокочастотную часть спектра, можно обойтись и без пробного сигнала.

Экстремальная система настройки не может мгновенно осуществлять перенастройку корректирующих цепей при внезапном изменении параметров объекта.

Имеет место некоторый переходный процесс самонастройки, длительность которого в несколько раз больше переходной функции аналога $H_a(t)$. Это является недостатком системы, сказывающимся при интенсивном изменении параметров объекта (например, в первые секунды старта баллистической ракеты).

От этого недостатка свободны самонастраивающиеся системы второго вида, в которых используются некоторые особенности систем с обратной связью, содержащих усилитель с весьма большим коэффициентом усиления (в пределе — бесконечно большим). Этот усилитель может быть или реальным физическим усилителем или возникнуть в результате местной положительной обратной связи,




Фиг. 10.17. Структурные схемы систем, инвариантных к свойствам объекта управления.

создаваемой при реализации принципа инвариантности в системах автоматического регулирования. На фиг. 10.17 приведены три схемы с обратной связью. содержащие усилитель с большим коэффициентом усиления. Для этих схем имеем следующие передаточные функции:

$$\Phi(p) = \frac{W_0 W_a k}{1 + W_0 k} = \left.\frac{W_0 W_a}{\frac{1}{k} + W_0}\right|_{k \to \infty} = W_a \text{ (см. фиг. 10.17, } a),$$

$$\Phi(p) = \frac{W_a W_0 k}{1 + W_k W_0 k} = \left.\frac{W_a W_0}{\frac{1}{k} + W_k W_0}\right|_{k \to \infty} = W_a \text{ (см. фиг. 10.17, } б),$$

$$\Phi(p) = \frac{W_0 + W_a W_0 k}{1 + k W_0} = \left.\frac{\frac{W_0}{k} + W_a W_0}{\frac{1}{k} + W_0}\right|_{k \to \infty} = W_a \text{ (см. фиг. 10. 17, } в).$$

Как видно из этих выражений, во всех предельных случаях динамические свойства системы совпадают с динамическими свойствами эталона и не зависят от свойств объекта регулирования с передаточной функцией $W_0$. Иными словами, свойства системы в целом инвариантны по отношению к меняющимся свойствам объекта регулирования. В схемах *а* и *в* могут возникнуть недоразу

мения, связанные с устойчивостью системы при больших $k$. В связи с этим в состав звеньев, образующих $W_0$, должны быть введены звенья, обеспечивающие устойчивость при больших $k$. В схеме *б* устойчивость может быть обеспечена выбором $W_к$.

Как известно, бесконечно большой коэффициент усиления реализуется также в релейных системах автоматического регулирования при идеальном скользящем режиме *. Под идеальным скользящим режимом будем понимать скользящий режим, получающийся при релейных элементах с характеристиками вида *а* и *в* (фиг. 10.18). В идеальном скользящем режиме релейный элемент с характеристикой *а* переключается, а релейный элемент с характеристикой *в* включается и отключается с бесконечно большой частотой. В действительности переключения или колебания с бесконечно большой частотой реализованы быть не могут, поскольку реальное реле обладает тем или иным запаздыванием (электрической, механической или электромеханической природы). При реальном реле будет иметь место реальный скользящий режим с конечной частотой переключений реле. При отсутствии возмущений этот режим будет сходиться к автоколебаниям около положения равновесия релейной системы. Чем меньше запаздывание реле, тем выше частота и ниже амплитуда автоколебаний и тем выше коэффициент усиления $k$ релейного элемента для медленно меняющихся сигналов. При характеристиках релейных элементов вида *б* и *г* могут возникнуть только реальные скользящие режимы. Запаздывание реле учитывается введением последовательно с релейным элементом передаточного (транспортного) запаздывания с передаточной функцией $e^{-p\tau}$, где $\tau$ — время срабатывания реле. При этом нужно иметь в виду особенность, связанную с описанием свойств реле передаточной функцией $e^{-p\tau}$. Все периодические решения релейной системы с частотами выше $\pi/\tau$ отбрасываются как физически нереализуемые, поскольку реле не может переключаться с частотой, большей $\pi/\tau$.

Несмотря на то, что идеальный скользящий режим, как и бесконечно большой коэффициент усиления, физически нереализуемы, этими представлениями вполне можно пользоваться для целей синтеза самонастраивающихся систем второго вида. Системы, в которых с помощью реле реализуется большой коэффициент усиления, будем называть нелинейными или релейными самонастраивающимися системами.

Теперь следует выяснить условия, при которых в релейной системе может быть реализован скользящий режим. Иначе говоря, необходимо выяснить, при каких условиях в замкнутой релейной системе передаточная функция вход — выход (фиг. 10.19, *в*) будет получаться близкой к единице. Условия скользящего режима близки к условиям устойчивости состояния равновесия релейной системы. В состоянии равновесия реле с идеальной характеристикой вида *а* совершает колебания бесконечно большой частоты и коэффициент усиления релейного элемента при этом равен бесконечности. Поэтому условия устойчивости релейной системы могут быть получены из условий устойчивости систем с бесконечно большим коэффициентом усиления.

Прежде чем приводить условия устойчивости релейных систем, введем понятие предельной системы. Предельная система (ее структура и уравнения) образуется из релейной системы заменой релейного элемента усилителем с бесконечно большим коэффициентом усиления. Найдем в качестве примера передаточные функции предельной системы для выхода $y$ от входного сигнала $x(t)$ и возмущения $F(t)$ релейной системы, структурная схема которой приведена на фиг. 10.19, *а* (на фиг. 10.19, *б* и *в* представлены преобразованные структурные схемы).

---

* А. А. Красовский, Г. С. Поспелов, Основы автоматики и технической кибернетики, Госэнергоиздат, 1962;

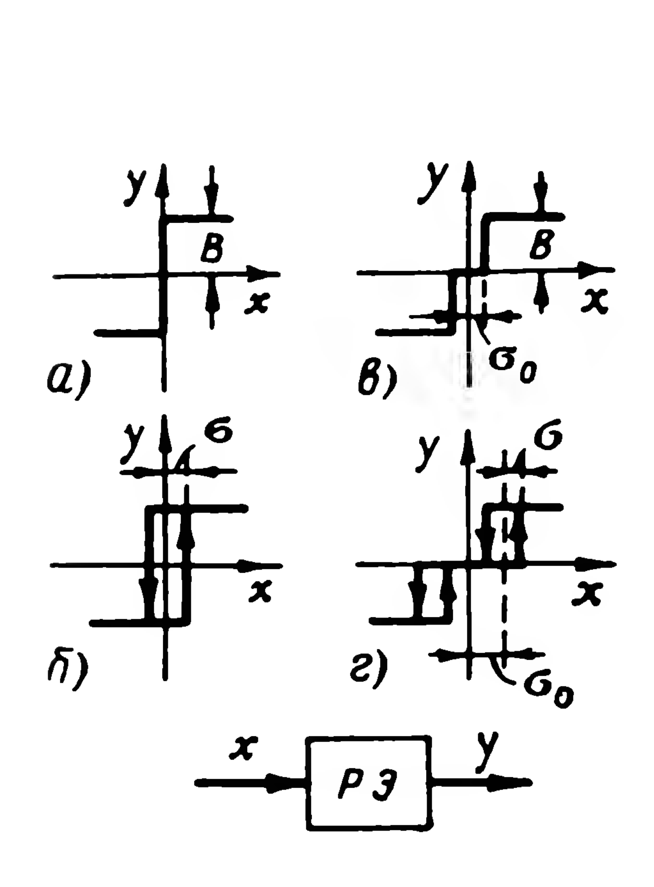
Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.

Для входа $x(t)$

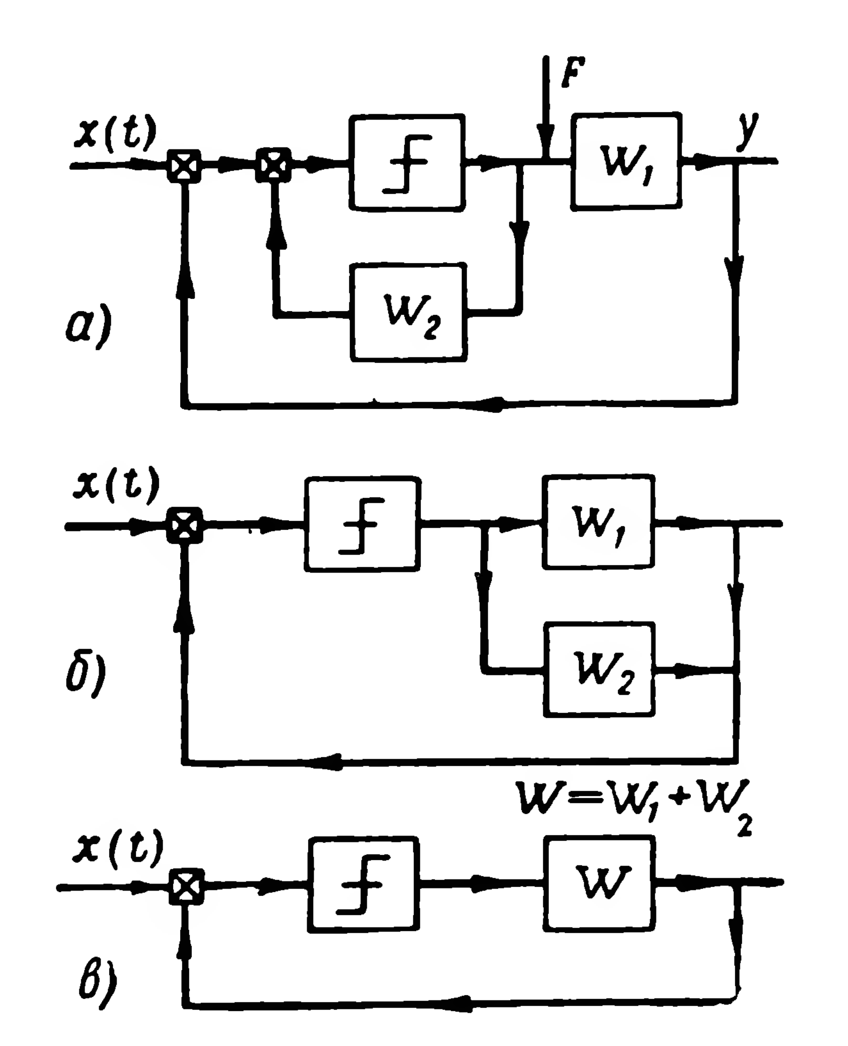
$$\Phi_x(p) = \frac{kW_1}{1 + k(W_1 + W_2)}\bigg|_{k\to\infty} = \frac{W_1}{W_1 + W_2}.$$

Для возмущения $F(t)$

$$\Phi_F(p) = \frac{W_1}{1 + W_1 \dfrac{k}{1 + kW_2}} = \frac{(1 + kW_2)W_1}{1 + k(W_1 + W_2)}\bigg|_{k\to\infty} = \frac{W_1W_2}{W_1 + W_2}.$$




Фиг. 10.18. Характеристика релейного элемента.




Фиг. 10.19. Структурные схемы с релейным элементом.

Определим теперь характеристическое уравнение предельной системы. Это уравнение получается, если приравнять нулю знаменатель передаточной функции:

$$1 + kW(p) = 0, \tag{10.117}$$

где

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) = \frac{Q(p)}{P(p)} = \frac{b_0 + b_1p + \ldots + b_mp^m}{a_0 + a_1p + \ldots + a_np^n} \tag{10.118}$$

— передаточная функция линейной части системы.

Из (10.117) и (10.118) найдем две формы характеристического уравнения

$$P(p) + kQ(p) = 0, \tag{10.119}$$

$$\frac{1}{k}P(p) + Q(p) = 0. \tag{10.120}$$

При $k \to \infty$ получим характеристическое уравнение предельной системы

$$Q(p) = 0. \tag{10.121}$$

Из выражения (10.121) вытекает, что предельная система устойчива, если все нули передаточной функции линейной части системы $W(p)$ лежат слева от мнимой оси комплексной плоскости. Однако устойчивость предельной системы является только одним из необходимых условий устойчивости системы с большим коэффициентом усиления и устойчивости релейной системы.

Степень характеристического уравнения (10.119) равна $n$ степени полинома $P(p)$. В то же время степень характеристического уравнения (10.121) предельной системы равна $m<n$. Таким образом, при $k\to\infty$ $n-m$ корней (10.119) уходят в бесконечность. Важно установить, как эти $n-m$ корней будут уходить в бесконечность. Если они будут удаляться в бесконечность в левой полуплоскости, то при устойчивой предельной системе реальная система будет устойчива и при любом большом (но конечном) $k$. Если же они в бесконечность будут уходить через правую полуплоскость комплексной плоскости, то система при большом $k$ будет неустойчива, несмотря на устойчивость предельной системы. Ряд простых критериев позволяют установить это обстоятельство. Так, если степень $P(p)$ не выше второй, то система будет устойчивой при любом сколь угодно большом $k$. Поэтому релейную систему всегда можно сделать устойчивой, если $P(p)$ имеет степень не выше второй.

По аналогии с амплитудно-фазовой характеристикой $W(j\omega)$ системы второго порядка получим рекомендации о виде амплитудно-фазовой характеристики устойчивой релейной системы любого порядка.

Релейная система устойчива, если амплитудно-фазовая характеристика линейной части $W(j\omega)$ расположена в нижней полуплоскости и ее вид подобен виду годографа $W(j\omega)$ системы не выше второго порядка. Этому критерию эквивалентен следующий*: все нули $W(p)$ должны лежать в левой полуплоскости; разность $n-m\leqslant 2$; при $n-m=1$ $d_0>0$, а при $n-m=2$ $d_0>0$ и $d_1<0$; здесь $d_0$ и $d_1$ — первые два коэффициента разложения $W(p)$ по степеням $p^{-1}$. Это разложение $W(p)$ в ряд имеет вид

$$W(p)=\frac{b_0+b_1p+\ldots+b_mp^m}{a_0+a_1p+\ldots+a_np^n}=\frac{1}{p^{n-m}}[d_0+d_1p^{-1}+d_2p^{-2}+\ldots], \quad (10.122)$$

причем

$$d_0=\frac{b_m}{a_n}; \quad (10.123)$$

$$d_1=\frac{1}{a_n^2}[b_{m-1}a_n-a_{n-1}b_m]. \quad (10.124)$$

Так как

$$d_0=\dot H(0),\quad \text{а}\quad d_1=\ddot H(0)\ \text{при}\ n-m=1\ \text{и}\ H(0)=0;$$

$$\text{а}\quad d_0=\ddot H(0),\quad \text{а}\quad d_1=\dddot H(0)\quad \text{при}\quad n-m=2\ \text{и}\ H(0)=\dot H(0)=0,$$

где $H(t)$ — переходная функция линейной части, то возникает третья формулировка устойчивости релейной системы:

предельная система должна быть устойчива, а также должны выполняться условия

$$\dot H(0)>0\quad \text{при}\quad H(0)=0;$$
$$\ddot H(0)>0,\quad \dddot H(0)<0\quad \text{при}\quad H(0)=\dot H(0)=0.$$

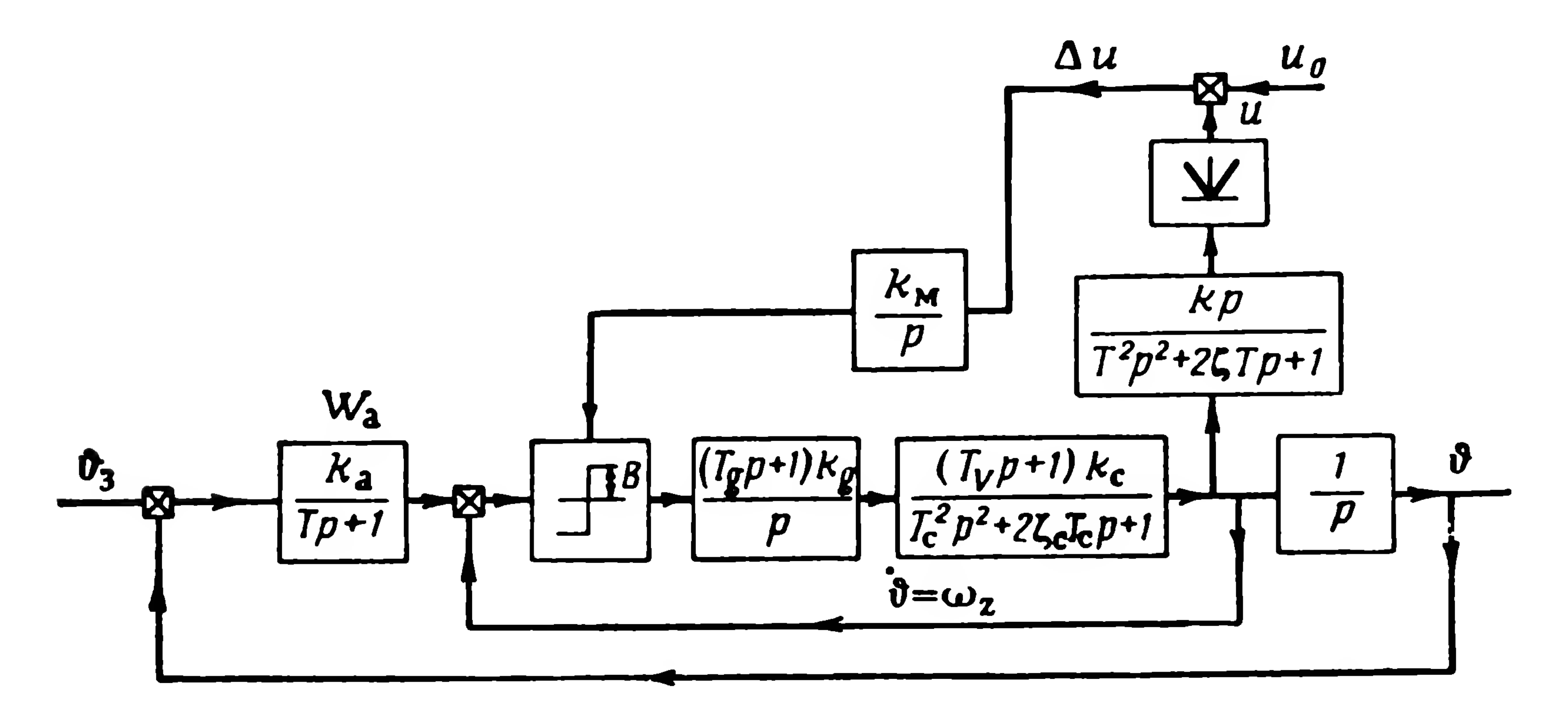
---

* Я. З. Цыпкин, Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.

Условия существования непрерывного скользящего режима более жесткие, чем условия устойчивости релейной системы. Скользящий режим будет иметь место при устойчивой предельной системе и при $n-m=1$, когда $d_0>0$ или $\dot{H}(0)>0$ при $H(0)=0$.

После сделанных замечаний можно перейти к формированию самонастраивающегося автопилота. На фиг. 10.20 приведена релейная схема регулирования угла тангажа. Реле управляет сервомотором с изодромной обратной связью, имеющим передаточную функцию

$$W_g(p)=\frac{T_g p+1}{T_{g1}p+1}\,\frac{k_g}{p}\approx\frac{T_g p+1}{p}k_g. \qquad (10.125)$$




Фиг. 10.20. Структурная схема самонастраивающегося автопилота.

Постоянная времени $T_{g1}$ может быть сделана достаточно малой и ею можно пренебречь. Передаточная функция линейной части релейной системы имеет вид

$$W(p)=\frac{(T_g p+1)(T_v p+1)k_c k_g}{\left(T_c^2p^2+2\zeta_c T_c p+1\right)p}. \qquad (10.126)$$

Как показывает выражение (10.126), условия устойчивости предельной системы выполняются. Выполняется и условие $n-m=3-2=1$. Таким образом, в системе, представленной на фиг. 10.20, будет иметь место скользящий режим и усиление по контуру угловой скорости $\omega_z$ будет равно единице. Такие условия будут выполняться и для полета вне атмосферы, когда передаточная функция по угловой скорости оказывается равной $k_c/p$. При усилении по контуру угловой скорости, равному единице, передаточная функция замкнутой системы для угла тангажа примет вид

$$\Phi(p)=\frac{k_a}{T_a p^2+p+k_a}. \qquad (10.127)$$

При выбранной эталонной передаточной функции передающие свойства системы оказались эквивалентны передающим свойствам колебательного звена. Коэффициенты $k_a$ и $T_a$ выбираются так, чтобы собственная частота $\sqrt{k_a/T_a}$

и коэффициент затухания $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{k_a T_a}}$ были равны желаемым значениям. Поскольку $k_a$ и $T_a$ относятся к свойствам модели, то динамические свойства системы регулирования угла тангажа являются неизменными и независимыми от динамических свойств снаряда. Нужно иметь в виду, что этот вывод справедлив при условии, что усиление и частота переключений релейного элемента равны бесконечности. В действительности запаздывание реле, неучтенные нелинейности и динамические звенья с малыми значениями параметров, например $T_{g1}$ в формуле (10.125), приведут к высокочастотным автоколебаниям. Коэффициент усиления релейного элемента будет меньше бесконечности, и некоторое влияние динамических свойств объекта может сказываться на динамических свойствах всей системы. Это влияние будет проявляться в изменении частоты и амплитуды автоколебаний из-за изменения свойств объекта. Частота автоколебаний должна быть достаточно высокой и превышать существенно резонансную частоту объекта $1/T_c = \omega_0$. При высокой частоте амплитуда колебаний угловой скорости должна быть невелика и лежать в допустимых для объекта пределах.

Достаточно высокая частота автоколебаний обеспечивается за счет корректирующих цепей в контуре угловой скорости снаряда. При этом оказывается, что частота автоколебаний практически не зависит от свойств снаряда, т. е. от коэффициентов $T_V$, $k_c$, $T_c$ и $\zeta_c$. Изменение свойств снаряда или режима полета снаряда изменяют только амплитуду автоколебаний угловой скорости. Для того чтобы амплитуда автоколебаний при всех режимах полета была бы стабильной, образуется специальный контур стабилизации амплитуды (фиг. 10.20). Выходной сигнал угловой скорости подается в полосовой фильтр с передаточной функцией

$$\frac{kp}{T^2p^2 + 2\zeta Tp + 1},$$

где $\omega = 1/T$ — частота автоколебаний снаряда, практически неизменная при всех режимах полета. Сигнал после полосового фильтра выпрямляется в детекторе и сравнивается с задающим сигналом $u_0$. Разность $\Delta u = u_0 - u$ приводит в действие сервомотор с передаточной функцией $k_м/p$, изменяющий параметр $B$ релейного элемента. Изменяя величину задающего сигнала $u_0$, можно задать желаемое значение амплитуды автоколебаний. Вместо релейного элемента используют также усилитель с изменяющимся коэффициентом усиления. Величина коэффициента усиления усилителя изменяется сервомотором так же, как это показано на фиг. 10.20.

Применение усилителя с большим и меняющимся коэффициентом усиления вместо реле позволяет вообще избежать автоколебаний и построить систему, которая будет при всех условиях поддерживать неизменный запас устойчивости в контуре угловой скорости. Система с заданным запасом устойчивости не нуждается в настройке автопилота каждого образца снаряда, обеспечивающей отсутствие автоколебательных режимов. Разумеется, что передаточная функция контура угловой скорости не будет в этом случае равна единице. Однако полоса пропускания этого контура останется большой и сохранится необходимая инвариантность динамических контуров угла тангажа от режима полета.

*Глава XI*

# УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ СНАРЯДА ОТНОСИТЕЛЬНО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

## § 11.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В некоторых случаях наведение снарядов на цель сводится к заданию «жесткой» траектории, проходящей через цель. Задать траекторию — это значит иметь возможность измерить боковое отклонение центра тяжести снаряда от этой траектории. Как уже говорилось в гл. III—V, траектория может быть задана равносигнальной зоной радиолуча и различными средствами автономной радионавигации. Вне зависимости от технических средств задания траектории и, следовательно, от способов измерения отклонения снаряда от нее возникает специфическая задача динамики — задача автоматической стабилизации центра тяжести снаряда на траектории. Необходимо установить, какие сигналы следует вводить в автопилот, как эти сигналы преобразовать, как выбрать передаточные числа автопилота, чтобы наиболее быстро возвратить снаряд на траекторию.

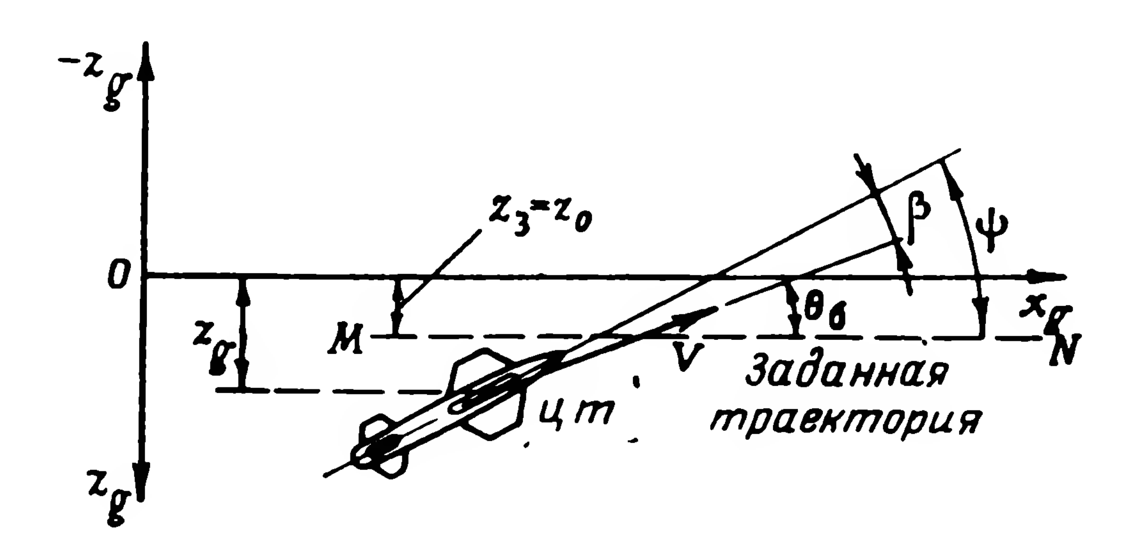
В настоящей главе будут рассмотрены динамические свойства систем автоматического регулирования центра тяжести снаряда относительно заданной траектории. Как и в предыдущих главах, раздельно рассматриваются продольное и боковое движения снаряда.

## § 11.2. УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНТРОМ ТЯЖЕСТИ КРЕСТОКРЫЛОГО СНАРЯДА В БОКОВОМ ДВИЖЕНИИ

При выборе параметров системы управления сложных с точки зрения динамики объектов всегда желательно решать эту задачу в несколько этапов, разделив сложную многоконтурную структурную схему системы на несколько более простых контуров. Такое разделение не всегда возможно, но если оно делается, то только на основании тщательного изучения динамических характеристик объекта управления. В отношении снарядов как объектов управления в гл. VIII неоднократно указывалось, что движения относительно центра тяжести протекают значительно (в 5—

10 раз) быстрее, чем движения центра тяжести. Это обстоятельство позволяет выбрать параметры автопилота раздельно для управления движением центра тяжести снаряда и относительно центра тяжести. Вторая задача рассматривалась в § 10. 5—10. 8.

В качестве первого из примеров выбора параметров автопилота для управления движением центра тяжести рассмотрим крестокрылый снаряд, стабилизированный по углу крена. Эта задача




Фиг. 11.1. Схема угловых и линейных координат, характеризующих положение снаряда относительно прямолинейной траектории в боковом движении.

поясняется на фиг. 11. 1. Пусть $MN$ — заданная прямолинейная траектория, по которой должен двигаться снаряд. В этом случае заданное значение координаты центра тяжести снаряда по оси $oz_g$ есть $z_3=z_0$.

В гл. XIV рассматривается случай, когда заданная траектория перемещается равномерно и параллельно самой себе. Это будет означать, что $z_3=k_1t$, где $k_1=\text{const}$. Другие виды $z_3$ как функции времени могут служить для целей приближенного представления управления снарядом относительно криволинейных траекторий, поскольку в области, для которой справедливы линейные уравнения динамики, нормальное ускорение снаряда можно считать равным $d^2z_g/dt^2$. К стабилизации снаряда относительно назначенных криволинейных траекторий можно приближенно свести, например, процесс наведения по радиолучу. Способ образования функций $z_3(t)$ для этого случая будет приведен в гл. XVI. Во всяком случае входные функции типа $z_3=z_0$, $z_3=k_1t$ и $z_3=k_2t^2$ можно считать первыми членами ряда, в который разлагается более сложная функция $z_3(t)$. Положение снаряда в боковом движении характеризуется линейной координатой центра тяжести $z_g$ и угловыми координатами $\psi$ и $\beta$. Считаем, что чувствительные элементы системы управления снаряда измеряют ошибку $z=z_3-z_g$ и угловую координату $\psi$.

Для упрощенного исследования динамики процесса управления центром тяжести сделаем предположение о мгновенной баланси-

ровке снаряда. При таком предположении уравнение моментов [второе уравнение в системе (8.44)] превращается в алгебраическое, связывающее угол скольжения с углом отклонения руля. Таким образом, уравнения объекта управления принимают вид *

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\theta_б}{dt} - k_\beta \beta = 0; \\ &n_\beta \beta = n_{\delta_н} \delta_н; \\ &\frac{dz_g}{dt} = V_e \theta_б, \end{aligned}\right\} \tag{11.1}$$

где

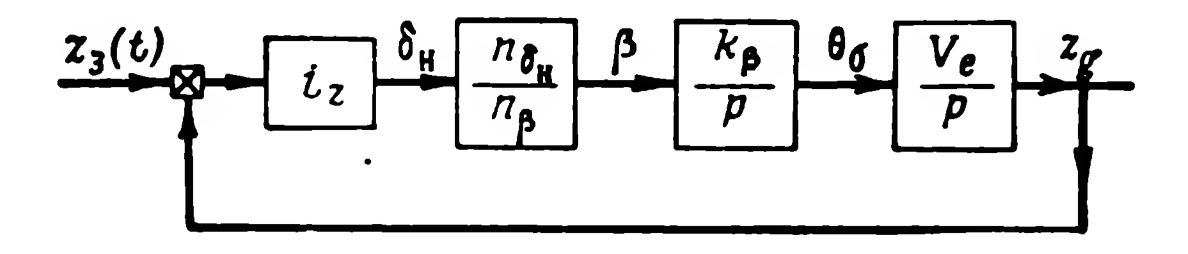
$$\theta_б = \psi - \beta.$$

Для образования контура управления боковым движением снаряда к системе (11.1) нужно добавить уравнения системы управления и автопилота, которые для начала возьмем в простейшем виде

$$\delta_н = i_z (z_з - z_g), \tag{11.2}$$

где $i_z$ — передаточное число по отклонению в *рад/м* или *град/м*.

На фиг. 11.2 представлена структурная схема системы, соответствующая уравнениям (11.1) и (11.2). Из структурной схемы




Фиг. 11.2. Структурная схема системы управления центром тяжести, соответствующая уравнениям (11.1) и (11.2).

следует, что в одноконтурной цепи рассматриваемой системы содержится два интегрирующих звена. Такая система является неустойчивой, поэтому простейший закон управления (11.2) использован быть не может. Для получения устойчивой системы управления центром тяжести снаряда закон управления (11.2) необходимо дополнить корректирующими сигналами. Такими сигналами могут быть или сигнал, пропорциональный производной

* В принятой системе координат (см. фиг. 11.1) положительный угол $\theta_б$ приводит к отрицательному значению боковой скорости $dz_g/dt$. Однако, поскольку при рассмотрении одного плоского движения знак выходной координаты $z_g$ не имеет значения, минус в левой части последнего уравнения системы (11.1) опущен.

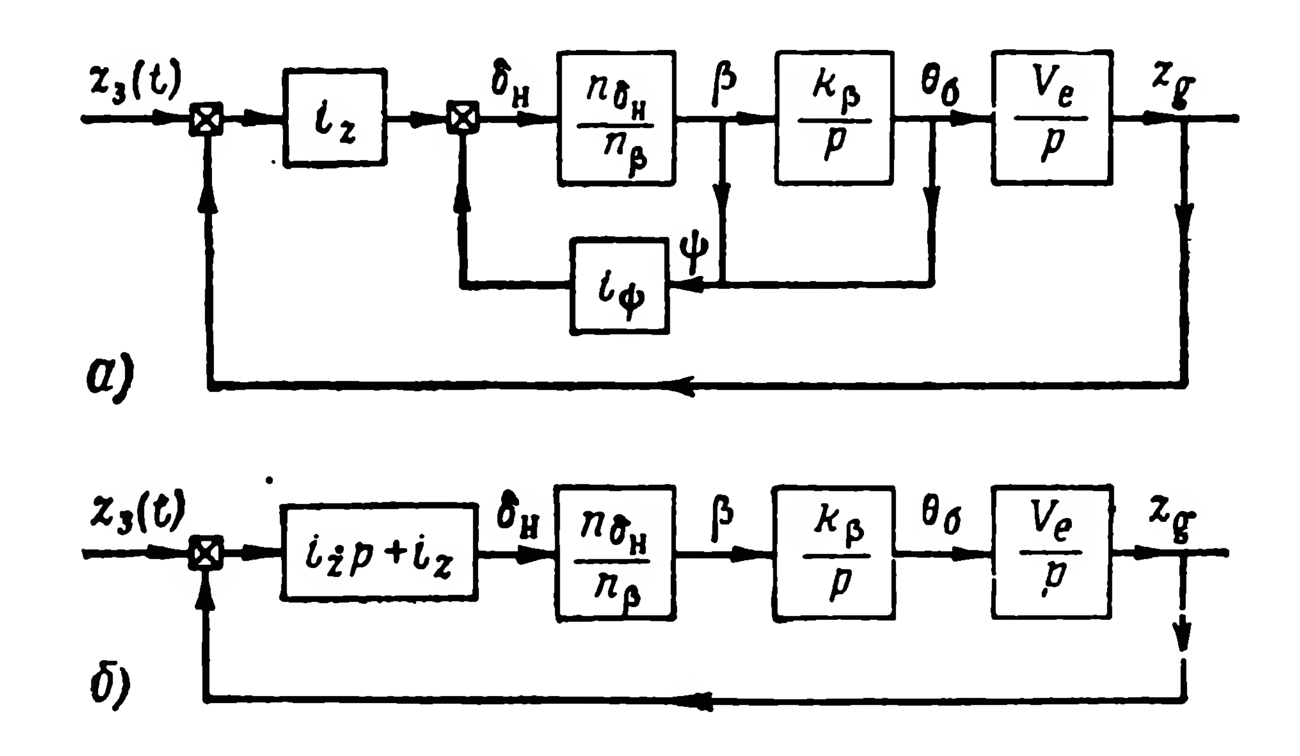
отклонения $z=z_з-z_g$, или сигнал угла $\theta_б$, который при отсутствии бокового ветра и постоянной скорости снаряда пропорционален производной выходной величины $z_g$. Вместо угла $\theta_б$ можно взять угол $\psi$ — угол между направлением траектории и продольной осью снаряда. Законы управления, соответствующие этим двум случаям корректирующих сигналов, имеют вид

$$\delta_н = i_z(z_з - z_g) + i_{\dot z}\left(\frac{dz_з}{dt} - \frac{dz_g}{dt}\right); \qquad (11.3)$$

$$\delta_н = i_z(z_з - z_g) - i_\psi \psi, \qquad (11.4)$$

где $i_{\dot z}$ — передаточное число по производной отклонения в *рад · сек/м* или *град · сек/м*;

$i_\psi$ — передаточное число по углу рыскания.




Фиг. 11.3. Структурные схемы системы управления центром тяжести с законами управления (11.3) и (11.4).

Структурные схемы для системы регулирования центра тяжести снаряда с законами управления (11.3) и (11.4) приведены на фиг. 11.3, *б* и *а* соответственно. В первом случае устойчивость обеспечивается сигналом производной от отклонения, а во втором — за счет охвата одного из интегрирующих звеньев жесткой обратной связью.

Объединяя уравнения снаряда (11. 1) и уравнение автопилота (11.3) и исключая все переменные, кроме $z_g$, получим общее уравнение всей системы

$$\frac{d^2 z_g}{dt^2} + a_1 \frac{dz_g}{dt} + a_2 z_g = a_1 \frac{dz_з}{dt} + a_2 z_з, \qquad (11.5)$$

где

$$a_1 = \frac{i_z k_\beta n_{\delta_н} V_e}{n_\beta};$$

$$a_2 = \frac{i_z k_\beta n_{\delta_н} V_e}{n_\beta}.$$

Соответственно система с законом управления (11.4) описывается уравнением

$$a_0 \frac{d^2 z_g}{dt^2} + a_1 \frac{dz_g}{dt} + a_2 z_g = a_2 z_з + b_1 \frac{dz_з}{dt}, \tag{11.6}$$

где

$$a_0 = 1 + \frac{n_{\delta_н}}{n_\beta} i_\psi;$$

$$a_1 = \frac{n_{\delta_н}}{n_\beta} k_\beta i_\psi + \frac{n_{\delta_н}}{n_\beta} i_z V_e;$$

$$a_2 = \frac{n_{\delta_н}}{n_\beta} k_\beta i_z V_e;$$

$$b_1 = \frac{n_{\delta_н}}{n_\beta} i_z V_e.$$

Как видно из структуры уравнений (11.5) и (11.6) и их коэффициентов, «жесткость стабилизации» снаряда на траектории, характеризуемая величиной собственной частоты колебаний $\Omega_0 = \sqrt{a_2/a_0}$, определяется передаточным числом $i_z$. Коэффициент же затухания колебаний снаряда на траектории $\zeta = a_1/2a_0\Omega$ определяется в одном случае передаточным числом $i_{\dot z}$, а в другом $i_\psi$.

Можно и иначе подойти к упрощенному рассмотрению задачи управления центром тяжести снаряда. Предположим, что автопилот, управляющий углом рыскания, имеется на снаряде, причем его параметры выбраны в соответствии с методикой, изложенной в § 10.5. Если пренебречь временем поворота снаряда на заданный угол рыскания по сравнению с временем процесса управления центром тяжести и положить $\beta \approx 0$, то вместо уравнения моментов и уравнения автопилота получим простое соотношение

$$\psi = \psi_з. \tag{11.7}$$

Простейший закон изменения угла рыскания при управлении боковым отклонением будет иметь вид

$$\psi_з = i_z (z_з - z_g). \tag{11.8}$$

Объединяя третье уравнение системы (11. 1) с выражениями (11. 7) и (11. 8) (с учетом равенства $\theta_б = \psi$) и исключая все переменные, кроме $z_g$, получим уравнение

$$\frac{dz_g}{dt} + i_z V_e z_g = i_z V_e z_з. \tag{11.9}$$

Структура уравнения (11. 9) показывает, что упрощенная система управления центром тяжести снаряда описывается в этом случае уравнением инерционного звена. Однако при таком упрощенном представлении теряются некоторые важные черты процесса управления. Гораздо лучше отвечают существу динамики управления уравнения (11. 5) и (11. 6) и соответствующие им структурные схемы, изображенные на фиг. 11. 3.

Рассмотрим кратко реакцию систем с этими структурными **схемами на** управляющие $z_з(t)$ и возмущающие воздействия. Система со структурной схемой, приведенной на фиг. 11. 3, *б*, как содержащая два интегрирующих звена в разомкнутой цепи, является дважды астатической по отношению к входному сигналу $z_з(t)$. Это значит, что при линейной входной функции

$$z_з = k_1 t \tag{11.10}$$

установившаяся ошибка $z_{уст}$ будет равна нулю. Система со структурой, изображенной на фиг. 11.3, *а*, не будет обладать этим свойством и будет иметь установившуюся ошибку при $z_з = k_1 t$.

Частное решение неоднородного уравнения (11. 6), описывающее установившийся режим слежением, для этого случая имеет вид

$$z_g = -\frac{i_\psi}{i_z V_e} k_1 + k_1 t. \tag{11.11}$$

Таким образом, при изменении значения $z_з$ по закону (11. 10) получается погрешность в боковом отклонении

$$z_{уст} = z_з - z_g = \frac{i_\psi}{i_z V_e} k_1 . \tag{11.12}$$

Погрешность в боковом отклонении при квадратичной зависимости $z_з$ от времени ($z_з = k_2 t^2$) для системы, описываемой уравнением (11. 5), равна

$$z_{уст} = \frac{2k_2}{a_2}. \tag{11.13}$$

Система, описываемая уравнением (11. 6), при квадратичной функции $z_з = k_2 t^2$ будет иметь в установившемся режиме линейно-

нарастающую ошибку. Таким образом, для снарядов, предназначенных для движения по подвижным траекториям, следует рекомендовать закон управления типа (11.3).

Рассмотрим теперь систему управления боковым отклонением центра тяжести крестокрылого снаряда без упрощений, т. е. учитывая переходные процессы в угловом движении снаряда. Для этого объединим уравнения снаряда (8.44) и уравнение автопилота, которое запишем в достаточно общем виде. В результате получим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\beta}{dt} + k_\beta\beta - \frac{d\psi}{dt} = 0,\\
&\frac{d^2\psi}{dt^2} + n_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} + n_{\dot\beta}\frac{d\beta}{dt} + n_\beta\beta = n_{\delta_н}\delta_н + \frac{\Delta M_в}{J_y},\\
&\frac{dz_g}{dt} = V_e(\psi - \beta),\\
&\delta_н = i_{\dot z}\left(\frac{dz_з}{dt} - \frac{dz_g}{dt}\right) + i_z(z_з - z_g) + \dot q_z\int_0^t (z_з - z_z)\,dt -\\
&- i_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} - i_\psi\psi.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.14)$$

В правой части уравнения моментов введен возмущающий момент $\Delta M_в$. В законе управления автопилота, кроме основного, позиционного сигнала $(z_з - z_g)$, введены также корректирующие сигналы, пропорциональные производной от этого сигнала, и сигнал от угла рыскания и его производной. Наконец, в закон управления введен сигнал, пропорциональный интегралу от рассогласования по боковому отклонению. Назначение этого сигнала — обеспечить астатизм системы при внешних воздействиях. Как было указано выше, система со структурной схемой на фиг. 11.3, *а* (с корректирующим сигналом по $\psi$) имеет меньшую точность по сравнению с системой со структурной схемой на фиг. 11.3, *б* $\left(\text{с корректирующим сигналом } \frac{dz_з}{dt} - \frac{dz_g}{dt}\right)$. Интегральный член в законе управления как раз и вводится для придания первой системе свойств (в смысле реакции на $z_з(t)$ в установившемся режиме) второй системы, несмотря на наличие корректирующего сигнала по углу $\psi$.

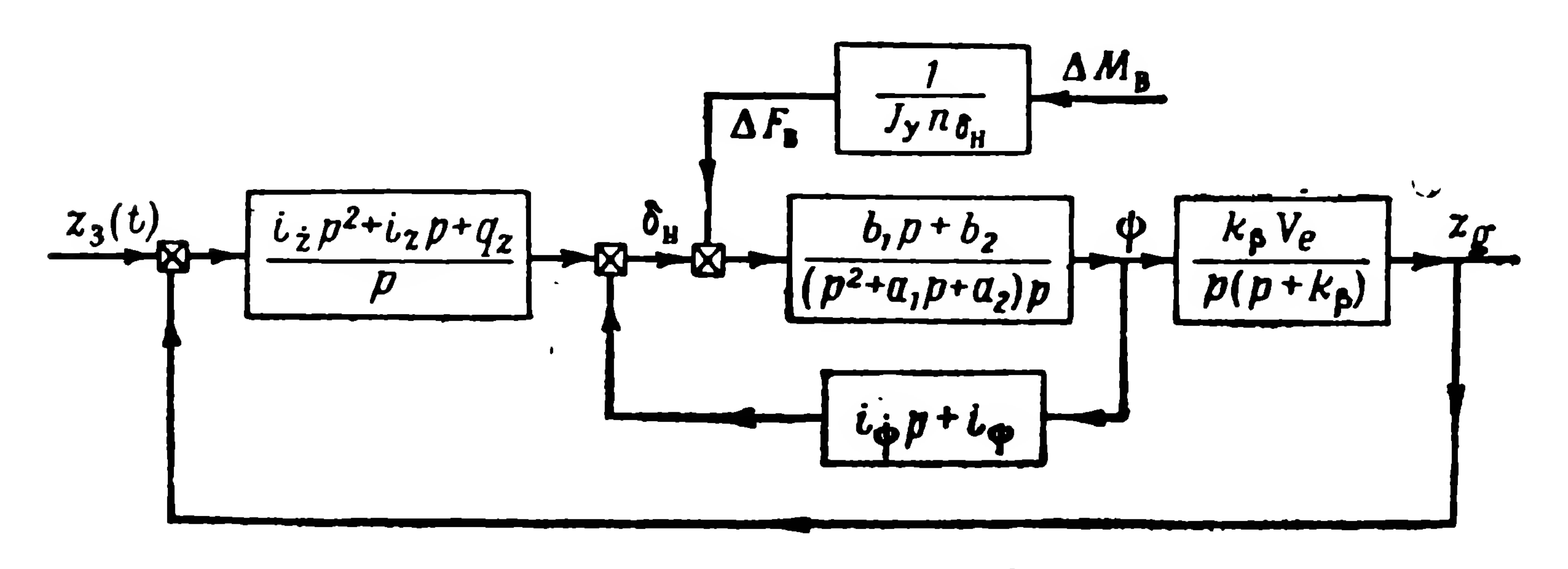
На фиг. 11.4 представлена структурная схема, соответствующая системе уравнений (11.14). Значение коэффициентов $a_1$, $a_2$, $b_1$ и $b_2$ определяется формулами (10.48), а передаточная функция для приведения внешнего момента $\Delta M_в$ к рулю — формулой (10.55).

Исключая из уравнений (11. 14) все переменные, кроме $z_g$, найдем следующее общее уравнение системы управления боковым отклонением центра тяжести снаряда:

$$\frac{d^5 z_g}{dt^5} + (a_1 + i_{\dot\psi} b_1)\frac{d^4 z_g}{dt^4} + (a_2 + i_{\dot\psi} b_2 + i_\psi b_1)\frac{d^3 z_g}{dt^3} +$$

$$+ (i_\psi b_2 + i_{\dot z} b_2 V_e)\frac{d^2 z_g}{dt^2} + i_z b_2 V_e \frac{dz_g}{dt} + q_z b_2 V_e z_g =$$

$$= i_{\dot z} b_2 V_e \frac{d^2 z_з}{dt^2} + i_z b_2 V_e \frac{dz_з}{dt} + q_z b_2 V_e z_з - \frac{k_\beta V_e}{J_y}\frac{d\Delta M_в}{dt}. \qquad (11.15)$$




Фиг. 11.4. Структурная схема, соответствующая системе уравнений **(11.14).**

Структура уравнения (11. 15) позволяет сделать следующие выводы о свойствах рассматриваемой системы. Прежде всего эта система астатична к постоянному возмущающему моменту $\Delta M_в$, так как производная от такого момента будет равна нулю. Астатичность системы также имеет место по отношению к внешнему постоянному сигналу $z_з$ и к сигналу, зависящему от времени линейно. Лишь при внешнем сигнале, пропорциональном квадрату времени ($z_з = k_2 t^2$), в установившемся режиме появляется погрешность, определяемая формулой

$$z_{уст} = \frac{2k_2 i_\psi}{q_z V_e}. \qquad (11.16)$$

Рассмотрение коэффициентов левой части уравнения (11. 15) показывает, что в каждый из них входит, по крайней мере, одно новое из передаточных чисел автопилота, что позволяет выбрать эти коэффициенты независимо друг от друга. Таким образом, метод СК дает возможность определить требуемые величины передаточных чисел автопилота для получения необходимых динамических свойств системы. Единственное ограничение на длительность переходного процесса будет накладывать диапазон линей-

ности отдельных элементов системы (угол отклонения руля, ограничения по углу скольжения, перегрузке и т. п.).

Рассмотрим пример выбора параметров системы управления центром тяжести.

**Пример. 11.1.** В качестве объекта управления возьмем снаряд № 2, параметры которого приведены в табл. 10.1. Пусть скорость снаряда $V_e$=300 *м/сек*. Необходимо выбрать параметры системы управления так, чтобы время регулирования ($t_р$) движения центра тяжести составляло 15 *сек* *. Передаточная функция для системы управления центром тяжести на основании уравнения (11.15) имеет вид

$$\Phi_{z_g/z_3}(p) = \frac{i_{\dot z}\, b_2 V_e p^2 + i_z b_2 V_e p + q_z b_2 V_e}{p^5 + (a_1 + i_{\dot\psi}\, b_1)p^4 + (a_2 + i_{\dot\psi}\, b_2 + i_\psi b_1)\, p^3 + (i_\psi b_2 + i_{\dot z}\, b_2 V_e)p^2 +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{+ i_z b_2 V_e p + q_z b_2 V_e}\,. \qquad (11.\ 17)$$

Коэффициенты числителя и знаменателя перед квадратом оператора $p$ отличаются друг от друга на небольшую величину $i_\psi b_2 \ll i_{\dot z}\, b_2 V_e$. Поэтому выражение (11.17) отнесем к типовой функции (2.12) и для выбора коэффициентов используем табл. 2.4. На основании этой таблицы получим характеристическое уравнение для дифференциального уравнения пятого порядка

$$p^5 + 18\Omega_0 p^4 + 69\Omega_0^2\, p^3 + 69\Omega_0^3\, p^2 + 18\Omega_0^4\, p + \Omega_0^5 = 0. \qquad (11.\ 18)$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты знаменателя передаточной функции (11.17) коэффициентам характеристического уравнения (11.18), получим систему алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &a_1 + i_{\dot\psi}\, b_1 = 18\Omega_0;\\ &a_2 + i_{\dot\psi}\, b_2 + i_\psi b_1 = 69\Omega_0^2;\\ &i_\psi b_2 + i_{\dot z} b_2 V_e = 69\Omega_0^3;\\ &i_z b_2 V_e = 18\Omega_0^4;\\ &q_z b_2 V_e = \Omega_0^5. \end{aligned}\right\} \qquad (11.\ 19)$$

Значение «собственной частоты» системы $\Omega_0$ определяем на основании соотношения

$$\Omega_0 = \frac{\tau_p}{t_p} = \frac{9{,}2}{15} = 0{,}613\ 1/сек,$$

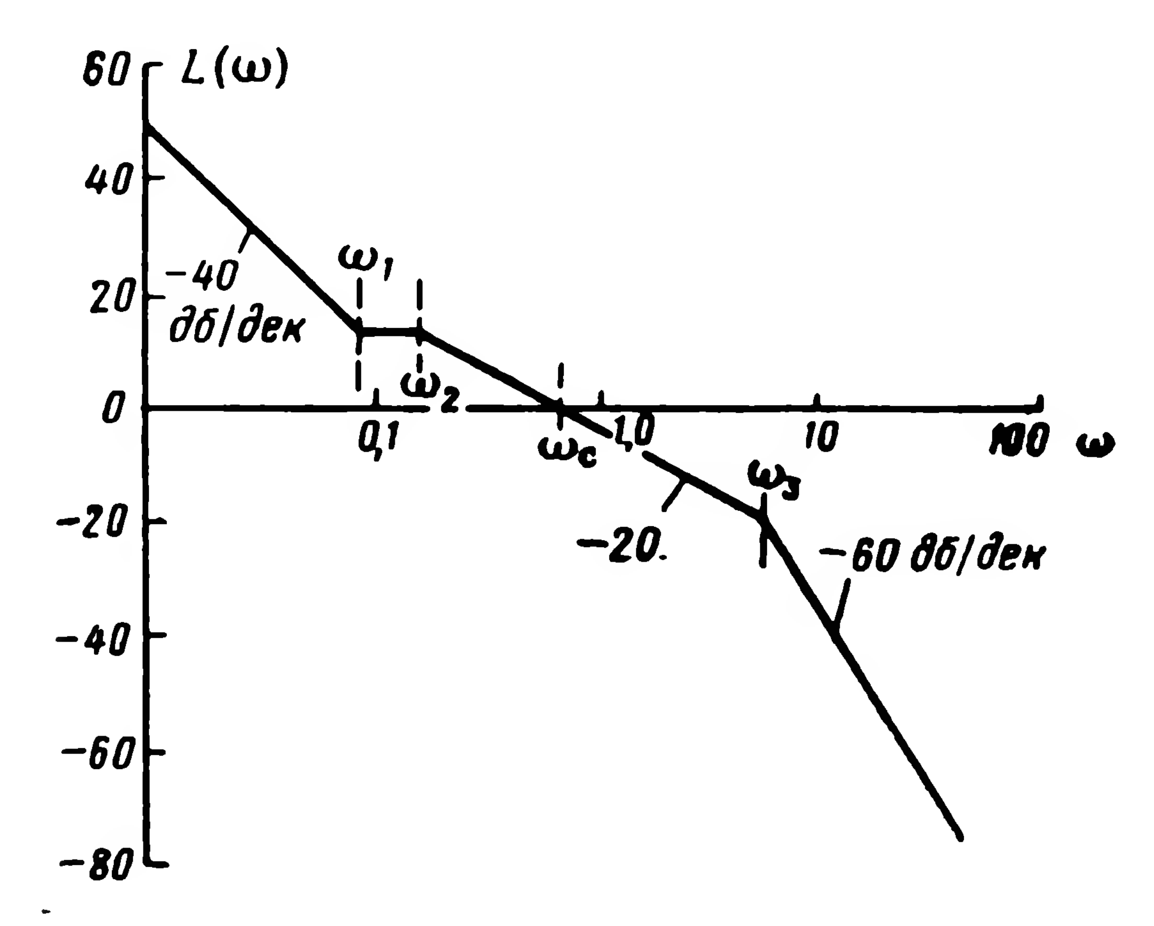
где $\tau_p$ =9,2 взято по кривой стандартного переходного процесса для системы пятого порядка с аналогичной структурой, приведенной на фиг. 2.8.

* Нетрудно убедиться, что обеспечить время регулирования, существенно меньшее, чем 15 *сек*, для снаряда № 2 нельзя, если резко не увеличить передаточные числа, что связано с уменьшением диапазона линейности системы; получить время регулирования, большее 15 *сек*, не составляет никаких затруднений, причем диапазон линейности системы при этом возрастет.

Подставляя полученное значение $\Omega_0$ в уравнения (11.19) и решая их поочередно, начиная с первого, получим следующие значения передаточных чисел автопилота: $i_{\dot\psi}=1{,}86$ *сек*; $i_\psi=1{,}58$; $i_{\dot z}=0{,}023$ *рад·сек/м*$=1{,}33$ *град·сек/м*; $i_z=4{,}53\cdot10^{-3}$ *рад/м*$=0{,}26$ *град/м*; $q_z=1{,}54\cdot10^{-4}$ *рад/м·сек*$=8{,}83\times\times10^{-3}$ *град/м·сек*.

Построим ЛАХ для рассмотренной системы. На основании структурной схемы, представленной на фиг. 11.4, найдем передаточную функцию разомкнутой системы

$$W_{z_g/z_3}(p)=\frac{b_2V_e\,(i_{\dot z}\,p^2+i_zp+q_z)}{p^2\,[p^3+(a_1+i_{\dot\psi}\,b_1)\,p^2+(a_2+i_{\dot\psi}\,b_2+i_\psi b_1)\,p+i_\psi b_2]}\,. \qquad (11.20)$$




Фиг. 11.5. ЛАХ, соответствующая передаточной функции (11.22).

Подставив в выражение (11.20) значение параметров снаряда и передаточных чисел автопилота, получим

$$W_{z_g/z_3}(p)=\frac{570\,(0{,}023p^2+4{,}53\cdot10^{-3}p+1{,}54\cdot10^{-4})}{p^2\,(p^3+11{,}04p^2+26p+3{,}34)}\,. \qquad (11.21)$$

Для построения ЛАХ передаточную функцию (11.21) следует привести к виду

$$W_{z_g/z_3}(p)=\frac{k\left(T_1^2p^2+2\zeta_1T_1p+1\right)}{p^2\left(T_3^2p^2+2\zeta_3T_3p+1\right)(T_2p+1)}=$$

$$=\frac{0{,}0265\,(12{,}3^2p^2+2\cdot1{,}2\cdot12{,}3p+1)}{p^2\,(0{,}202^2p^2+2\cdot1{,}1\cdot0{,}202p+1)\,(7{,}4p+1)}\,. \qquad (11.22)$$

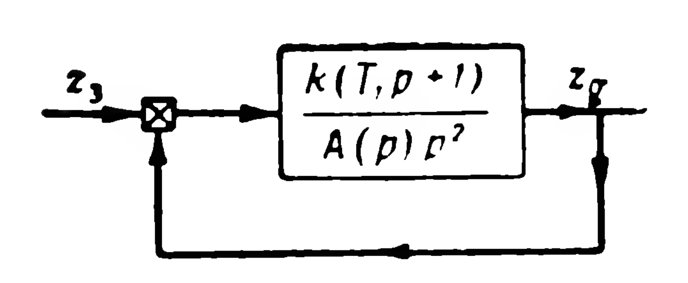
Итак, для построения ЛАХ системы имеем коэффициент усиления разомкнутой системы $K=0{,}0265$ и сопрягающие частоты:

$$\omega_1=1/T_1=1/12{,}3=0{,}079\ 1/\textit{сек};\quad \omega_2=1/T_2=1/7{,}4=0{,}135\ 1/\textit{сек};$$

$$\omega_3=1/T_3=1/0{,}202=4{,}9\ 1/\textit{сек}.$$

По таким данным на фиг. 11.5 построена ЛАХ системы. Как видно из этой ЛАХ, высокие динамические свойства рассмотренной системы обусловлены большим (занимающим больше декады) участком характеристики с наклоном 20 *дб/дек*, причем $\omega_з/\omega_c \approx 10$. Очевидно, что такого большого отношения $\omega_з/\omega_c$ можно добиться лишь за счет большой частоты $\omega_з$, характеризующей быстродействие контура угла рыскания, т. е. обеспечивающей быстрое протекание короткопериодических движений снаряда.

В некоторых случаях сигнал, пропорциональный боковому отклонению $(z_з - z_g)$, содержит высокочастотную помеху значительного уровня. Снаряд, являясь сглаживающим фильтром, не реагирует на такую помеху, но получить производную от такого сигнала, как это требуется в соответствии с законом управления, довольно сложно. Часто можно обеспечить достаточно высокие динамические свойства системы управления центром тяжести снаряда и без сигнала по производной от бокового отклонения. На фиг. 11.6 приведена структурная схема системы управления для случая, когда автопилот работает по закону




Фиг. 11.6. Структурная схема системы с законом управления (11.23).

$$\delta_н = + i_z (z_з - z_g) + q_z \int_0^t (z_з - z_g) dt - i_{\dot\psi} \frac{d\psi}{dt} - i_\psi \psi. \qquad (11.23)$$

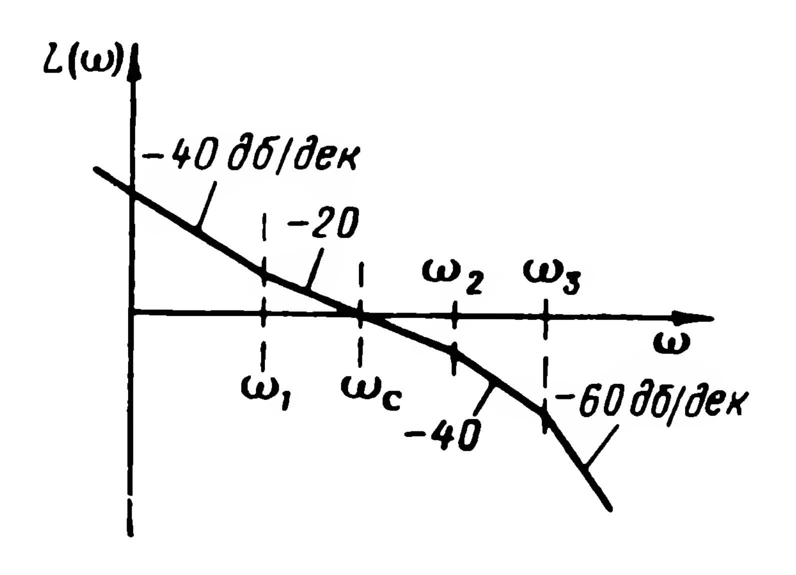
Отдельные обозначения на фиг. 11.6 можно определить следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} &k = \frac{V_e q_z}{i_\psi} \, 1/сек^2, \\ &T_1 = \frac{i_z}{q_z} \; сек, \\ &A(p) = \frac{1}{i_\psi b_2} [p^3 + (a_1 + i_{\dot\psi} b_1) p^2 + (a_2 + i_{\dot\psi} b_2 + \\ &+ i_\psi b_1) p + i_\psi b_2]. \end{aligned}\right\} \qquad (11.24)$$

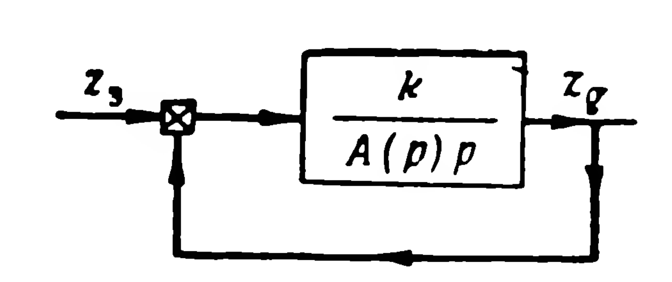
Для системы, представленной на фиг. 11.6, нельзя выбрать параметры автопилота методом СК, как это было сделано для системы, структурная схема которой изображена на фиг. 11.4. В коэффициенте при $d^2 z_g/dt^2$ будет отсутствовать передаточное число $i_z$ и поэтому независимый выбор всех передаточных чисел станет невозможным. Метод СК может быть использован для

приближенного решения наилучшего значения передаточных чисел методом проб.

В указанном случае более просто использовать метод ЛАХ по следующей методике. Параметры контура управления углом рыскания ($i_{\dot\psi}$ и $i_\psi$) выбираются заранее в соответствии с рекомендациями, изложенными в § 10.5. Для пояснения способа




Фиг. 11.7. ЛАХ, соответствующая структурной схеме на фиг. 11.6.




Фиг. 11.8. Структурная схема системы с законом управления (11.25).

выбора оставшихся параметров схемы $k$ и $T_1$, а через них и передаточных чисел $i_z$ и $q_z$ рассмотрим ЛАХ системы, вид которой приведен на фиг. 11.7. Для выбора параметров $k$ и $T_1$ необходимо обеспечить соответствующее положение и длину участка с наклоном 20 *дб/дек*. Прежде всего частота сопряжения $\omega_1 = 1/T_1$ должна удовлетворять соотношению $\omega_1 \leqslant 0{,}1\omega_3$. Кроме того, частота сопряжения $\omega_2$, равная наименьшему корню полинома $A(p)$, должна быть в 4—5 раз больше частоты среза $\omega_c$. Чтобы выполнить эти условия при достаточно высокой частоте среза $\omega_c$, которая определяет быстродействие всей системы, необходимо повышать частоты $\omega_2$ и $\omega_3$, т. е. форсировать угловые движения снаряда.

Рассмотрим также передаточную функцию и ЛАХ системы без интегрального члена в законе управления. Такой закон может применяться в тех случаях, когда нужна более простая система управления, а небольшие погрешности по боковому отклонению снаряда от заданной траектории не играют существенной роли.

Закон управления автопилота в этом случае имеет вид

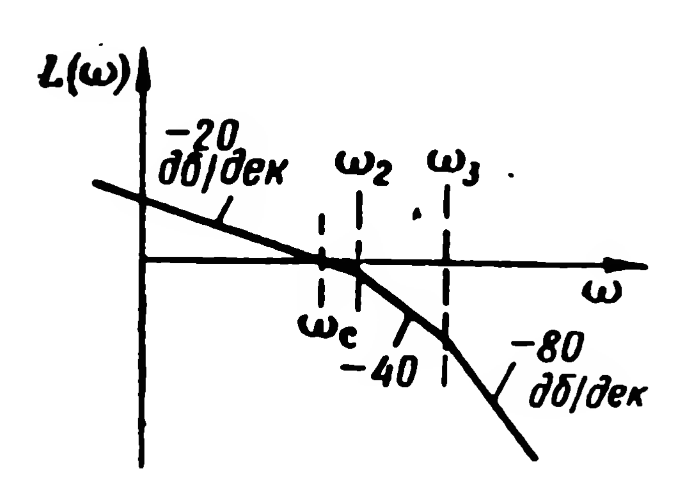
$$\delta_н = i_z(z_з - z_g) - i_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} - i_\psi\psi. \qquad (11.25)$$

Структурная схема для системы управления центром тяжести,

использующей закон (11.25), приведена на фиг. 11.8. Значение $A(p)$ определяется формулой (11.24), а величина $k$ равна

$$k = \frac{V_e i_z}{i_\psi}. \tag{11.26}$$

На фиг. 11.9 приведена ЛАХ, соответствующая структурной схеме фиг. 11.8. Если параметры контура управления углом рыскания выбраны заранее, то форма ЛАХ и частоты сопряжения $\omega_2$ и $\omega_3$ являются неизменными. При изменении коэффициента усиления, который для рассматриваемой системы совпадает с частотой среза $\omega_c$, ЛАХ будет лишь подниматься или опускаться относительно оси абсцисс.




Фиг. 11.9. ЛАХ, соответствующая структурной схеме, приведенной на фиг. 11.8.

Для увеличения быстродействия системы следует увеличивать частоту среза $\omega_c = k$. Но при этом для получения удовлетворительного качества переходных процессов в системе необходимо выполнить условие $\omega_2 \geqslant (4 \div 5)\omega_c$. Это условие при повышении $\omega_c$ можно, очевидно, выполнить, как и в предыдущих случаях, за счет форсирования переходных процессов короткопериодического движения.

## § 11.3. УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНТРОМ ТЯЖЕСТИ ПЛОСКОКРЫЛОГО СНАРЯДА В БОКОВОМ ДВИЖЕНИИ

Общая постановка задачи об управлении центром тяжести снаряда в боковом движении относительно заданной траектории остается такой же, как показано на фиг. 11.1. Отличие этой задачи для плоскокрылого снаряда заключается в том, что развороты такого снаряда в плоскости $xoz_g$ необходимо выполнять с креном, так как только при крене обеспечивается создание значительной боковой силы. Указанное отличие обусловливает некоторые особенности в методике выбора параметров системы управления плоскокрылым снарядом по сравнению с крестокрылым, рассмотренным в предыдущем параграфе. Пояснению этой методики и посвящен настоящий параграф.

Анализ системы управления центром тяжести плоскокрылого снаряда начнем опять-таки с максимально возможных упрощений, которые позволяют сделать рассматриваемую задачу наглядной, не искажая качественной стороны процессов. Эти упрощения заключаются в предположении о том, что система управления рулем направления обеспечивает полет без скольжения $\left(\beta = \frac{d\beta}{dt} =\right.$

$=0$), и в пренебрежении временем переходных процессов по крену, так как эти процессы имеют продолжительность, по крайней мере, на порядок меньшую, чем процессы управления центром тяжести. С учетом этих допущений из общей системы уравнений бокового движения плоскокрылого снаряда (8.42) получим *

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi}{dt} - k_\gamma \gamma = 0; \\ &\frac{dz_g}{dt} = V_e \psi. \end{aligned}\right\} \tag{11.27}$$

При сделанных упрощениях второе и третье уравнения системы (8.42) выпадают из рассмотрения. Кроме того, в первом уравнении не учтен член $a_e \frac{d\gamma}{dt}$, который в большинстве случаев для снарядов мал по сравнению с другими членами этого уравнения. Закон управления автопилота в этом случае вырождается в соотношение между сигналом крена и сигналами, обеспечивающими управление центром тяжести. Рассмотрим два возможных закона управления, аналогичных (11.3) и (11.4):

$$-i_\gamma \gamma + i_{\dot z} \left(\frac{dz_з}{dt} - \frac{dz_g}{dt}\right) + i_z (z_з - z_g) = 0 \tag{11.28}$$

и

$$-i_\gamma \gamma - i_\psi \psi + i_z (z_з - z_g) = 0. \tag{11.29}$$

Системы с законами управления (11.28) и (11.29) по своим свойствам полностью совпадают с рассмотренными выше системами, имеющими законы (11.3) и (11.4). У них одинаковая реакция на управляющее воздействие $z_з(t)$. Некоторые несущественные особенности отличают систему с законом (11.4) от системы с законом (11.29), поскольку в последнем случае $\beta=0$ и $\psi=\theta_б$.

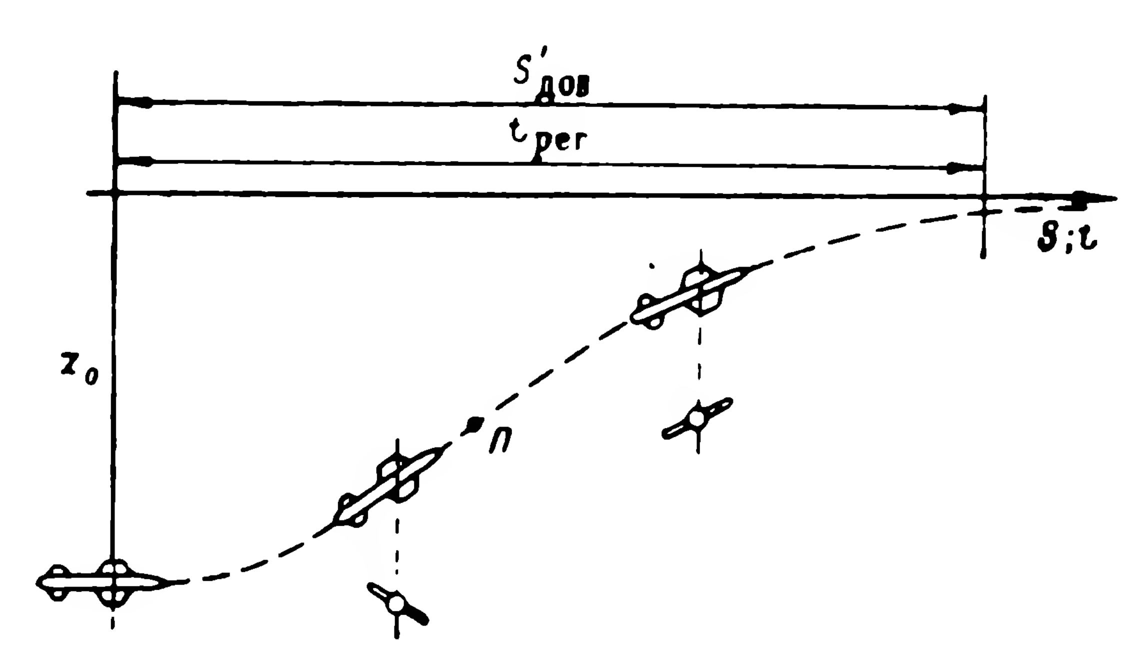
Общее уравнение системы управления центром тяжести при законе управления (11.28) имеет вид

$$\frac{d^2 z_g}{dt^2} + g\frac{i_{\dot z}}{i_\gamma}\frac{dz_g}{dt} + g\frac{i_z}{i_\gamma} z_g = g\frac{i_{\dot z}}{i_\gamma}\frac{dz_з}{dt} + g\frac{i_z}{i_\gamma} z_з. \tag{11.30}$$

Из выражения (11.30) вытекает, что при оговоренных выше допущениях и законе управления (11.28) движение центра тяжести снаряда описывается дифференциальным уравнением второго порядка, причем коэффициенты этого уравнения не зависят от скорости и высоты полета. Следовательно, время переходных

* По тем же причинам, что и в формуле (11.1), опущен минус перед производной $z_g$; кроме этого, вместо угла крена удобнее рассматривать его отрицательную величину.

процессов по координате $z_g$ не зависит от этих параметров. Пройденный за время переходного процесса путь прямо пропорционален скорости полета и кривые переходного процесса, построенные по оси абсцисс в масштабе $S=V_e t$, есть траектории полета снаряда.




Фиг. 11.10. Схема двойного доворота снаряда на заданную траекторию.

Выход снаряда на заданную траекторию при начальных условиях $z_g=z_0$; $\frac{dz_g}{dt}=0$ осуществляется с помощью так называемого двойного доворота (фиг. 11.10). В зависимости от масштаба по оси абсцисс кривая на фиг. 11.10 может быть или графиком переходного процесса $[z_g=f(t)]$ или траекторией снаряда $[z_g=f(S)]$. Название маневра, изображенного на фиг. 11.10, указывает на то, что на начальном участке траектории снаряд доворачивает в одну сторону при определенном знаке угла крена, а после точки перегиба П направление доворота и знак угла крена приобретают противоположные значения.

При законе управления (11.29) общее уравнение системы управления центром тяжести снаряда получается в следующей форме:

$$\frac{d^2 z_g}{dt^2}+\frac{g i_\psi}{V_e i_\gamma}\frac{dz_g}{dt}+\frac{g i_z}{i_\gamma}z_g=\frac{g i_z}{i_\gamma}z_з. \qquad (11.31)$$

В уравнении (11.31) коэффициент затухания зависит от скорости полета, уменьшаясь при ее увеличении. Подобную зависимость коэффициента затухания от скорости легко объяснить, если учесть, что демпфирование в системе определяется углом $\psi$, введенным в закон управления (11.29). Между тем из второго уравнения (11.27) вытекает, что

$$\psi=\frac{1}{V_e}\frac{dz_g}{dt}. \qquad (11.32)$$

Таким образом, при данной скорости изменения отклонения $dz_g/dt$ угол $\psi$ будет тем меньше, чем больше скорость полета $V_e$.

Характер траектории снаряда при системе управления, определяемой уравнением (11.31), такой же, как и при системе управления, соответствующей уравнению (11.30). График на фиг. 11.10 остается справедливым и для уравнения (11.31), только в этом случае при различных скоростях полета будет меняться не только масштаб по оси абсцисс ($S = V_e t$), но и характер кривой, так как в соответствии с изложенным выше коэффициент затухания зависит от скорости.

Перейдем к анализу системы управления движением центра тяжести плоскокрылого снаряда относительно заданной траектории с учетом реальных характеристик движения относительно оси $x_1$, т. е. с учетом запаздывания в установлении заданного угла крена. В этом случае для описания объекта необходимо взять следующие уравнения из системы (8.42)*:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi}{dt} - a_e \frac{d\gamma}{dt} - k_\gamma \gamma = 0; \\ &\frac{d^2\gamma}{dt^2} + l_\gamma^{\cdot} \frac{d\gamma}{dt} = l_{\delta_э} \delta_э + \frac{\Delta M_в}{J_x}; \\ &\frac{dz_g}{dt} = V_e \psi. \end{aligned}\right\} \qquad (11.33)$$

Во второе из уравнений (11.33) введен внешний возмущающий момент относительно оси $x_1$.

Исследуем свойства системы управления центром тяжести снаряда при различных законах управления его автопилота. В качестве первого закона выберем следующий:

$$\delta_э = - i_\gamma^{\cdot} \frac{d\gamma}{dt} - i_\gamma \gamma + i_{\dot z} \left( \frac{dz_з}{dt} - \frac{dz_g}{dt} \right) + i_z (z_з - z_g). \qquad (11.34)$$

Сигнал, пропорциональный угловой скорости крена $d\gamma/dt$, введен в закон (11.34) для улучшения демпфирования движения относительно оси $x_1$. Сигнал, пропорциональный углу крена $\gamma$, является основным сигналом обратной связи в контуре управления креном, который сравнивается с позиционным и стабилизирующим сигналами, пропорциональными боковому отклонению центра тяжести $(z_з - z_g)$ и его производной $\left( \frac{dz_з}{dt} - \frac{dz_g}{dt} \right)$.

* Система уравнений (11.33) получена из (8.42) в предположении, что $\beta = d\beta/dt = 0$, т. е. что угол скольжения устраняется рулем направления; рассматривается также отрицательное значение угла крена и опущен знак минус у производной $z_g$.

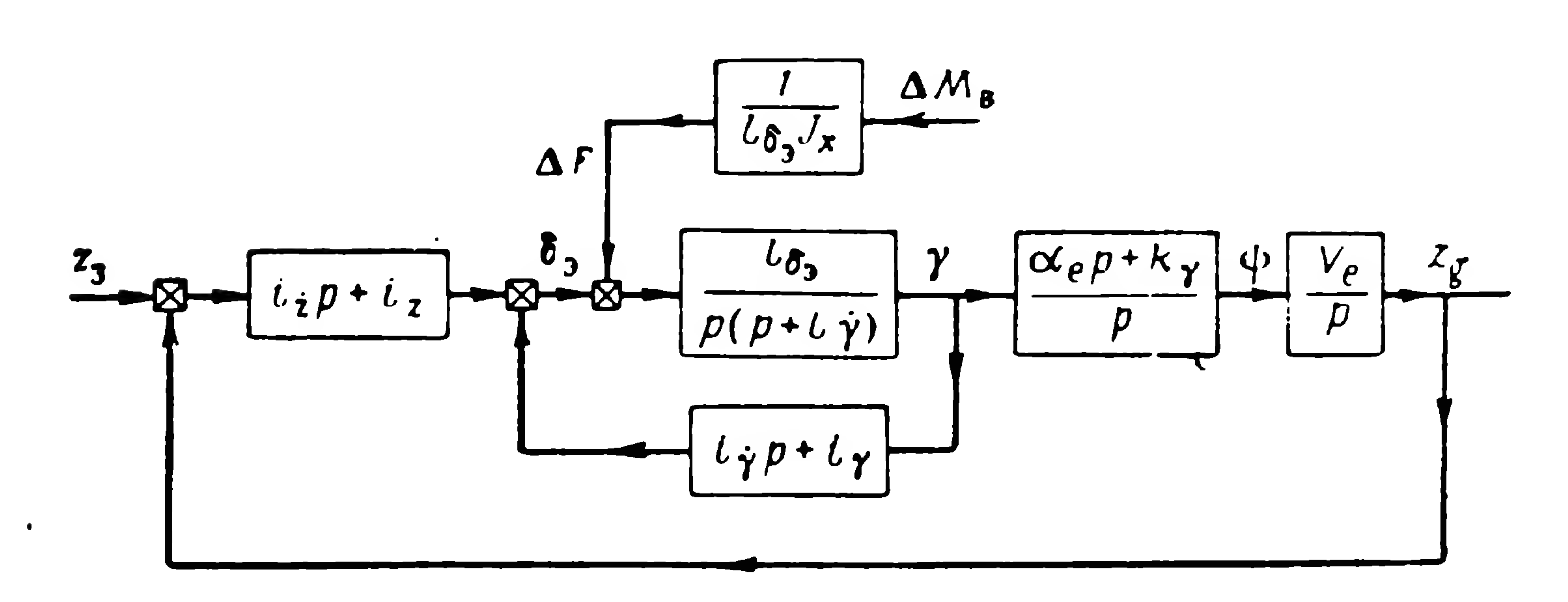
На фиг. 11.11 приведена структурная схема системы управления центром тяжести с законом управления (11.34). Объединяя уравнения снаряда (11.33) и автопилота (11.34), получим общее дифференциальное уравнение рассматриваемой системы

$$\frac{d^4z_g}{dt^4} + (l_{\dot\gamma} + i_{\dot\gamma}\, l_{\delta_э})\frac{d^3z_g}{dt^3} + (i_\gamma l_{\delta_э} + i_{\dot z} V_e l_{\delta_э} a_e) \times$$

$$\times \frac{d^2z_g}{dt^2} + V_e (i_{\dot z}\, l_{\delta_э} k_\gamma + i_z l_{\delta_э} a_e) \frac{dz_g}{dt} + i_z l_{\delta_э} k_\gamma V_e z_g =$$

$$= i_{\dot z}\, l_{\delta_э} V_e a_e \frac{d^2z_з}{dt^2} + V_e (i_{\dot z}\, l_{\delta_э}\, k_\gamma + i_z l_{\delta_э} a_e) \frac{dz_з}{dt} +$$

$$+ i_z l_{\delta_э} k_\gamma V_e z_з + \frac{a_e V_e}{J_x} \frac{d\Delta M_в}{dt} + \frac{k_\gamma V_e}{J_x} \Delta M_в. \qquad (11.35)$$

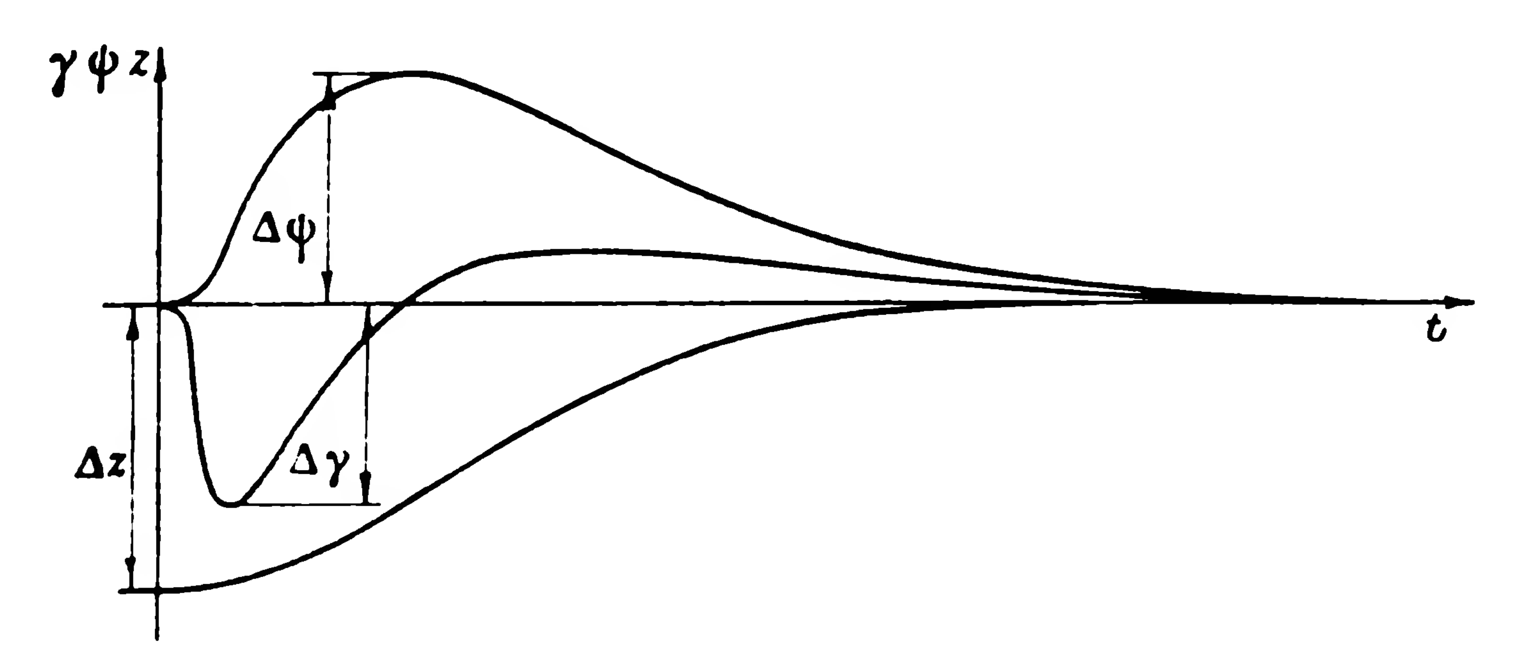



Фиг. 11.11. Структурная схема системы с законом управления (11.34).

Структура уравнения (11.35) позволяет сделать следующие выводы о системе управления центром тяжести с законом (11.34). Эта система астатична к изменению заданного значения бокового отклонения с постоянной скоростью ($z_з = kt$) и статична по отношению к постоянному возмущающему моменту $\Delta M_в$. Выбор передаточных чисел автопилота может быть выполнен методом СК. Очевидно, что, как и в рассмотренных в предыдущем параграфе системах управления центром тяжести крестокрылого снаряда, увеличение быстродействия системы, описываемой уравнением (11.35), ограничивается в первую очередь предельным углом крена. По мере увеличения «собственной частоты» системы $\Omega_0 = \sqrt[4]{i_z k_\gamma V_e l_{\delta_э}}$ будет увеличиваться ее быстродействие, но лишь в таком диапазоне изменения ($z_з - z_g$), в котором угол крена не начнет ограничиваться заданным предельным значением. Этот

диапазон, естественно, будет сокращаться при увеличении «собственной частоты» и быстродействия системы.

На фиг. 11.12 в качестве примера приведены кривые, характеризующие процессы изменения отклонения $\Delta z = z_з - z_g$, углов рыскания $\psi$ и крена $\gamma$ в случае управления центром тяжести плоскокрылого снаряда с помощью описанной системы управления.




Фиг. 11.12. Графики переходного процесса при управлении центром тяжести в боковом движении.

Если получение производной от сигнала, пропорционального боковому отклонению, сопряжено с техническими трудностями, обусловленными высоким уровнем помех в этом сигнале, то для автопилота может быть применен следующий закон управления:

$$\delta_э = -i_{\dot\gamma} \frac{d\gamma}{dt} - i_\gamma \gamma - i_\psi \psi + i_z (z_з - z_g). \qquad (11.36)$$

Структурная схема системы с законом управления (11.36) приведена на фиг. 11.13.

Объединяя уравнения снаряда (11.33) и автопилота (11.36), получим общее уравнение системы управления центром тяжести

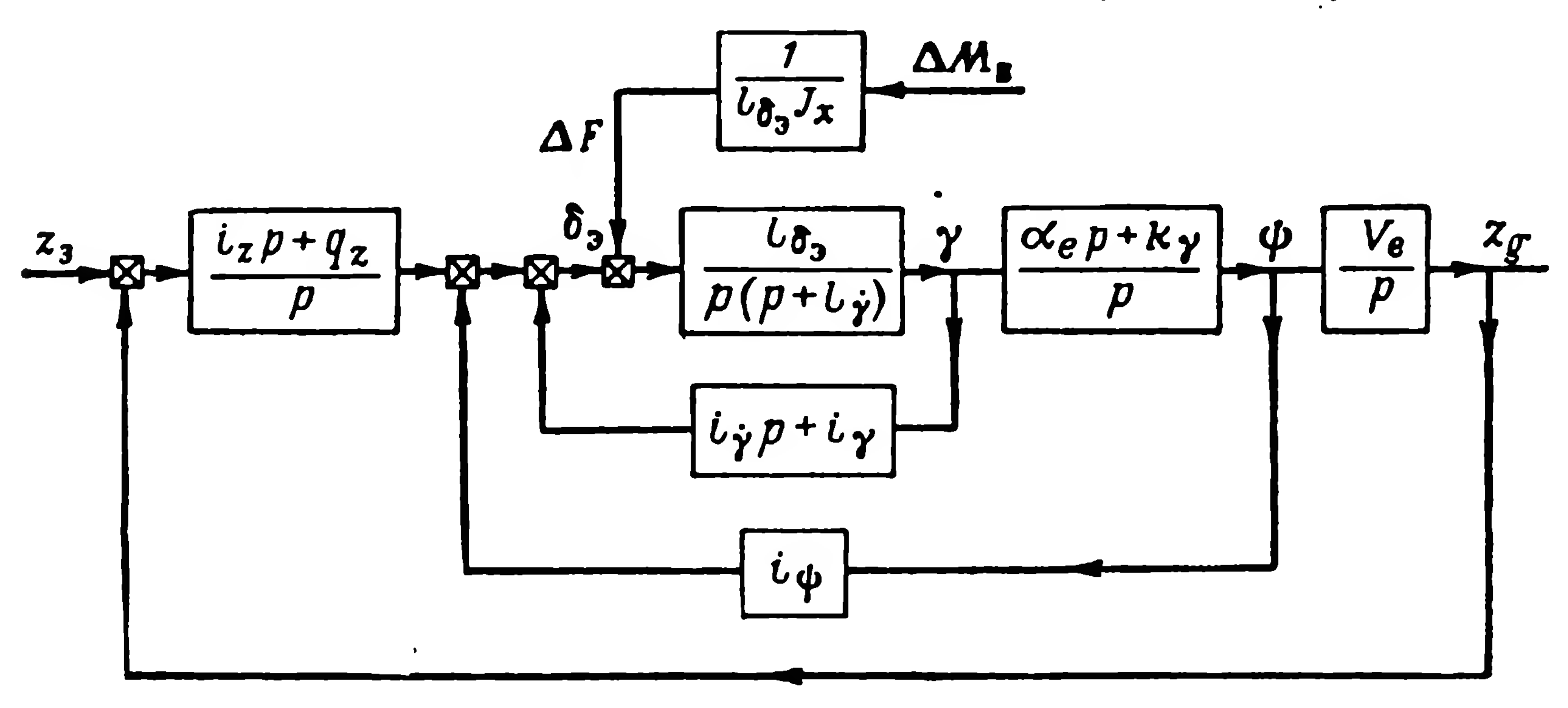
$$\frac{d^4 z_g}{dt^4} + (l_{\dot\gamma} + i_{\dot\gamma} l_{\delta_э}) \frac{d^3 z_g}{dt^3} + (i_\gamma l_{\delta_э} + i_\psi l_{\delta_э} \alpha_e) \frac{d^2 z_g}{dt^2} +$$

$$+ (i_\psi l_{\delta_э} k_\gamma + i_z l_{\delta_э} \alpha_e V_e) \frac{dz_g}{dt} + i_z l_{\delta_э} k_\gamma V_e z_g =$$

$$= i_z l_{\delta_э} \alpha_e V_e \frac{dz_з}{dt} + i_z l_{\delta_э} k_\gamma V_e z_з + \frac{\alpha_e V_e}{J_x} \frac{d\Delta M_в}{dt} + \frac{k_\gamma V_e}{J_x} \Delta M_в. \qquad (11.37)$$

В отличие от уравнения (11.35), где коэффициенты при нулевой и первой производных увеличиваются пропорционально при увеличении скорости полета, в уравнении (11.37) основная часть коэффициента при первой производной ($i_\psi l_{\delta_э} k_\gamma \gg i_z l_{\delta_э} \alpha_e V_e$) не зависит от скорости, тогда как коэффициент при нулевой произ-

водной пропорционален этой скорости. Таким образом, как и в рассмотренной выше упрощенной задаче при законе управления (11.36), демпфирование системы уменьшается с увеличением скорости полета. Кроме того, система, описываемая уравнением (11.37), статична по отношению к внешнему сигналу, изменяю-




Фиг. 11.13. Структурная схема системы с законом управления (11.36).

щемуся с постоянной скоростью ($z_з = kt$). Как было указано, система, описываемая уравнением (11.35), астатична по отношению к подобному сигналу.

В обеих системах постоянный внешний момент вызывает погрешность, определяемую формулой

$$z_{уст} = \frac{\Delta M_в}{i_z l_{\delta_э} J_x}. \qquad (11.38)$$

Чтобы ликвидировать погрешность от внешнего момента, необходимо ввести в закон управления интеграл от рассогласования по боковому отклонению

$$\delta_э = -i_{\dot\gamma}\frac{d\gamma}{dt} - i_\gamma \gamma - i_\psi \psi + i_z(z_з - z_g) + q_z \int_0^t (z_з - z_g)\, dt. \qquad (11.39)$$

Структурная схема системы с законом управления (11.39) приведена на фиг. 11.14. Объединяя уравнения снаряда (11.33) и автопилота (11.39), найдем общее уравнение системы

$$\frac{d^5 z_g}{dt^5} + (l_{\dot\gamma} + i_{\dot\gamma} l_{\delta_э}) \frac{d^4 z_g}{dt^4} + (i_\gamma l_{\delta_э} + i_\psi l_{\delta_э} \alpha_e) \frac{d^3 z_g}{dt^3} +$$

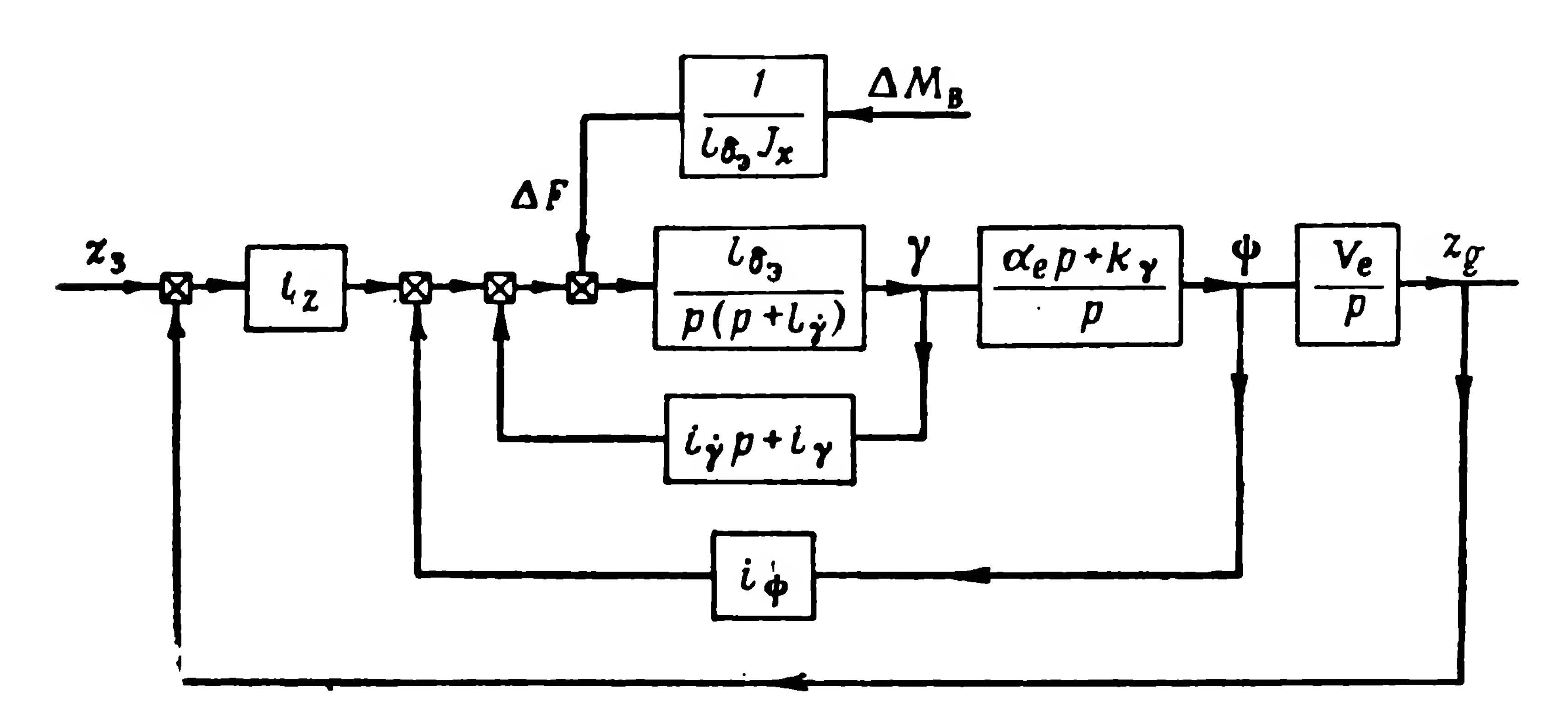
$$+ (i_\psi l_{\delta_э} k_\gamma + i_z l_{\delta_э} \alpha_e V_e) \frac{d^2 z_g}{dt^2} + V_e (i_z l_{\delta_э} k_\gamma + q_z l_{\delta_э} \alpha_e) \frac{d z_g}{dt} +$$

$$+ q_z l_{\delta_э} k_\gamma V_e z_g = i_z l_{\delta_э} a_e V_e \frac{d^2 z_з}{dt^2} + V_e (i_z l_{\delta_э} k_\gamma +$$

$$+ q_z l_{\delta_э} a_e) \frac{dz_з}{dt} + q_z l_{\delta_э} k_\gamma V_e z_з + \frac{a_e V_e}{J_x} \frac{d^2 \Delta M_в}{dt^2} +$$

$$+ \frac{k_\gamma V_e}{J_x} \frac{d \Delta M_в}{dt}. \qquad (11.40)$$

Структура уравнения (11.40) показывает, что за счет введения в закон управления интегрального члена система управления центром тяжести стала астатичной к постоянному внешнему мо-




Фиг. 11.14. Структурная схема системы с законом управления (11.39).

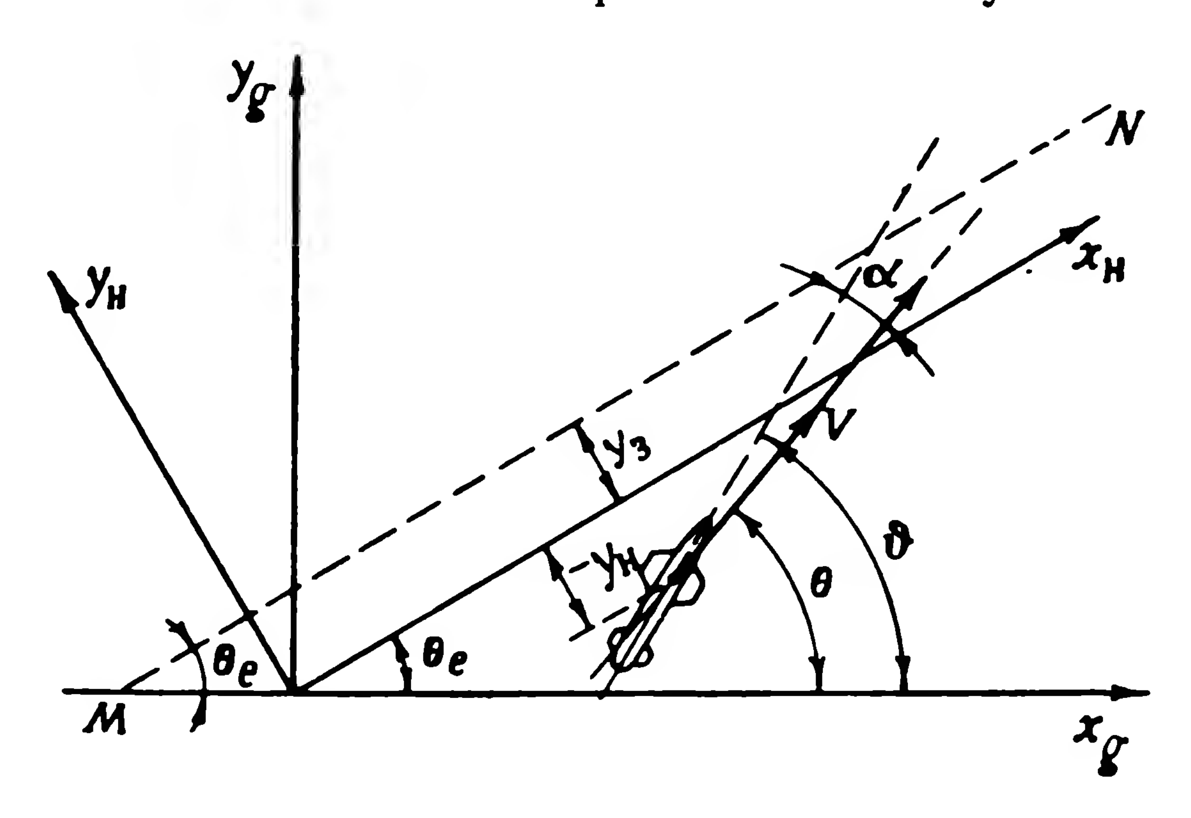
менту $\Delta M_в$ и к внешнему сигналу, линейно зависящему от времени ($z_з = kt$).

Выбор передаточных чисел в системах, описываемых уравнениями (11.37) и (11.40), наиболее просто можно произвести методом СК. Использование того или иного закона управления из числа рассмотренных в этом параграфе определяется конкретными требованиями, предъявляемыми к системе управления центром тяжести плоскокрылого снаряда.

В этом параграфе не рассмотрено использование акселерометра, измеряющего боковое ускорение снаряда, для создания корректирующих сигналов. Такой сигнал, пропорциональный $V \frac{d\theta_б}{dt}$, а также интеграл и производная от этого сигнала могут быть с успехом применены в системе управления центром тяжести снаряда.

## § 11.4. УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНТРОМ ТЯЖЕСТИ СНАРЯДА В ПРОДОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ

Задача управления центром тяжести снаряда относительно заданной траектории в продольном движении в своих основных чертах сходна с рассмотренной в § 11.2 задачей об управлении центром тяжести крестокрылого снаряда в боковом движении. Для некоторых режимов полета (например, для горизонтального полета) продольное движение центра тяжести путем допущения о




Фиг. 11.15. Угловые и линейные координаты, характеризующие положение снаряда относительно прямолинейной траектории в продольном движении.

постоянстве скорости полета может быть сведено к боковому (для крестокрылого снаряда), как это было сделано в § 10.6 для угловых движений снаряда. Нужно лишь в уравнениях, описывающих различные задачи управления центром тяжести, параметры бокового движения изменить на соответствующие параметры продольного движения.

Однако, если снаряду задана наклонная траектория, то в уравнениях продольного движения появляются новые по сравнению с боковым члены, которые могут оказать существенное влияние на характер этого движения. Кроме того, в задаче о продольном движении можно учесть изменение скорости полета снаряда во время возмущенного движения, чего нельзя сделать в задаче о боковом движении в той форме, как она изложена в настоящей книге.

Постановка задачи об управлении движением центра тяжести относительно заданной траектории поясняется на фиг. 11.15. Пусть прямая $MN$ есть заданная траектория движения снаряда, имеющая наклон $\theta_e$. В общем случае она может не совпадать с неподвижной

наклонной системой координат $x_н$, $y_н$, которая введена в отличие от земной системы $x_g$, $y_g$. Если заданная траектория криволинейна, то, как указывалось в § 11.2, зная ее форму и скорость снаряда, можно определить $y_з$ как функцию времени.

Система уравнений продольного движения с учетом того, что в ней необходимо выделить линейное отклонение снаряда от заданной наклонной траектории, получена из (8.26) и имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&a_\theta\Delta\theta + a_\alpha\Delta\alpha + \frac{d\Delta V}{dt} + a_V\Delta V + a_y\Delta y_g = a_\delta\Delta\delta_д;\\
&\frac{d\Delta\theta}{dt} - b_\theta\Delta\theta - b_\alpha\Delta\alpha - b_V\Delta V + b_y\Delta y_g = b_\delta\Delta\delta_д;\\
&\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + c_{\dot\vartheta}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\dot\alpha}\frac{d\Delta\alpha}{dt} + c_\alpha\Delta\alpha + c_V\Delta V = c_\delta\Delta\delta_в;\\
&\frac{d\Delta y_g}{dt} = V_e\sin\theta_e + \frac{dy_н}{dt}\cos\theta_e;\\
&\frac{dy_н}{dt} = V_e\Delta\theta;\\
&\Delta\vartheta = \Delta\theta + \Delta\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.41)$$

Уравнение для $d\Delta x_g/dt$, которое входило в формулу (8.26), не введено в систему (11.41), так как оно является изолированным и может быть проинтегрировано отдельно, когда система (11.41) решена и получено $\Delta\theta=\Delta\theta(t)$. Систему уравнений (11.41) можно без внесения существенных погрешностей упростить следующим образом. Так как коэффициенты $a_y$ и $b_y$ обычно бывают малы, то членами с этими коэффициентами в первом и втором уравнениях можно пренебречь (при малых углах наклона заданной траектории). Если такое допущение вызывает существенную ошибку (при больших углах наклона заданной траектории), то, зная скорость снаряда, можно приближенно вычислить $\Delta y(t)$ как функцию времени и перенести члены с $\Delta y$ в правую часть, считая их заданными функциями времени. В обоих этих случаях четвертое уравнение выпадает из рассмотрения.

Останавливаясь в качестве примера на первом из изложенных выше методов упрощения решаемой задачи, получим систему уравнений *

* Правые части первых двух уравнений системы (11.42) в отличие от системы (11.41), записанной для общего случая, превратились в нули, так как полагаем, что двигатель снаряда не регулируется, т. е. $\Delta\delta_д=0$. В третье уравнение введен внешний момент $\Delta M_в$.

$$\left.\begin{aligned}
&a_\theta\,\Delta\theta + a_\alpha\Delta\alpha + \frac{d\ V}{dt} + a_V\Delta V = 0;\\
&\frac{d\Delta\theta}{dt} - b_\theta\Delta\theta - b_\alpha\Delta\alpha - b_V\Delta V = 0;\\
&\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + c_{\dot\vartheta}\,\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\dot\alpha}\,\frac{d\Delta\alpha}{dt} + c_\alpha\Delta\alpha + c_V\Delta V = c_\delta\Delta\delta_\text{в} + \frac{\Delta M_\text{в}}{J_z}\,;\\
&\frac{dy_\text{н}}{dt} = V_e\Delta\theta;\\
&\Delta\vartheta = \Delta\theta + \Delta\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.42)$$

Четвертое уравнение системы (11.42) является изолированным и может рассматриваться отдельно. Однако так обстоит дело только до тех пор, пока изучается движение снаряда без системы управления. При учете системы управления это уравнение оказывается связанным с остальными.

Если в системе уравнений (11.42) пренебречь изменением скорости и влиянием веса $\left(\Delta V = \frac{d\Delta V}{dt} = b_\theta = 0\right)$, то, как указывалось в начале параграфа, уравнения продольного движения станут полностью аналогичны уравнениям бокового движения крестокрылого снаряда (8.44). Задача управления центром тяжести для этого случая подробно исследована в § 11.2.

Рассмотрим, какие особенности появляются в задаче управления центром тяжести при учете изменения скорости и влияния силы веса. Вначале максимально упростим рассматриваемую задачу. Для этого, как и в § 8.4, сделаем предположение о мгновенной балансировке снаряда. В этом случае уравнение моментов превращается в алгебраическое и система (11.42) приобретает вид

$$\left.\begin{aligned}
&a_\theta\Delta\theta + a_\alpha\Delta\alpha + \frac{d\Delta V}{dt} + a_V\Delta V = 0;\\
&\frac{d\Delta\theta}{dt} - b_\theta\Delta\theta - b_\alpha\Delta\alpha - b_V\Delta V = 0;\\
&c_\alpha\Delta\alpha + c_V\Delta V = c_\delta\Delta\delta_\text{в} + \frac{\Delta M_\text{в}}{J_z}\,;\\
&\frac{dy_\text{н}}{dt} = V_e\Delta\theta.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.43)$$

Возьмем автопилот с простейшим законом управления

$$\Delta\delta_\text{в} = i_y(y_\text{з} - y_\text{н}). \qquad (11.44)$$

Объединяя уравнения снаряда (11.43) и автопилота (11.44),

получим общее уравнение системы управления центром тяжести снаряда относительно наклонной траектории

$$\frac{d^3y_н}{dt^3} + a_1 \frac{d^2y_н}{dt^2} + \left(a_2 + i_yV_e \frac{b_\alpha c_\delta}{c_\alpha}\right)\frac{dy_н}{dt} + i_yV_ec_3 \frac{c_\delta}{c_\alpha} y_н =$$
$$= i_yV_e \frac{b_\alpha c_\delta}{c_\alpha} \frac{dy_з}{dt} + i_yV_ec_3 \frac{c_\delta}{c_\alpha} y_з + \frac{b_\alpha V_e}{J_z c_\alpha} \frac{d\Delta M_в}{dt} + \frac{c_3V_e\Delta M_в}{J_z c_\alpha}. \quad (11.45)$$

Значения коэффициентов $a_1$ и $a_2$ определяются формулами (8.37). Уравнение (11.45) показывает, что если снаряд без системы управления устойчив ($a_1>0$ и $a_2>0$), то с простейшим законом управления можно управлять боковым отклонением его центра тяжести относительно наклонной траектории в вертикальной плоскости. Этот результат принципиально отличается от того, который был получен при рассмотрении бокового движения крестокрылого снаряда, у которого система управления центром тяжести с простейшим законом управления (11.2) оказалась неустойчивой.

В § 8.4 указывалось, что у некоторых снарядов на различных режимах полета (например, при кабрировании) коэффициенты $a_1$ и $a_2$ могут оказаться отрицательными. Если отрицательным станет $a_1$, то движение и с системой управления, как это следует из формулы (11.45), станет также неустойчивым. При отрицательном $a_2$ вопрос об устойчивости решается неравенствами Гурвица.

Если $a_2 < i_yV_e \frac{b_\alpha c_\delta}{c_\alpha}$, то система сохранит устойчивость.

Уравнение (11.45) показывает, что при использовании простейшего закона управления трудно обеспечить нужные динамические свойства системы, так как можно влиять лишь на два коэффициента этого уравнения, причем с помощью только одного передаточного числа $i_y$. Кроме того, система, описываемая уравнением (11.45), статична по отношению к внешнему возмущающему моменту $\Delta M_в$.

Введем в закон управления ряд корректирующих сигналов и в том числе интегральный сигнал для устранения статизма. При этом в качестве уравнений объекта возьмем полную систему уравнений (11.42). Поэтому в закон управления нужно ввести корректирующие сигналы и для движения относительно центра тяжести. С учетом этих замечаний закон управления приобретет вид

$$\Delta\delta_в = -i_{\dot\vartheta} \frac{d\Delta\vartheta}{dt} - i_\vartheta\Delta\vartheta - i_{\dot\theta} \frac{d\Delta\theta}{dt} - i_\theta\Delta\theta + i_y(y_з - y_н) +$$
$$+ q_y \int_0^t (y_з - y_н)\,dt. \quad (11.46)$$

Сигналы, пропорциональные отклонению угла наклона траектории и производной от этого угла, введены в закон управления взамен стабилизирующих сигналов по первой и второй производным от линейного отклонения $y_н$. Эти сигналы могут быть получены с помощью акселерометра. Сигнал акселерометра пропорционален $V\dfrac{d\Delta\theta}{dt}$, а интеграл от него $V\Delta\theta$. Для компенсации составляющей ускорения, обусловленной наклоном траектории, необходимо вводить компенсирующий сигнал с позиционного гироскопа через синусно-косинусный потенциометр.

Объединяя уравнения объекта управления (11.42) и автопилота (11.46), найдем общее уравнение рассматриваемой системы *

$$\frac{d^6y_н}{dt^6}+a_1\frac{d^5y_н}{dt^5}+a_2\frac{d^4y_н}{dt^4}+a_3\frac{d^3y_н}{dt^3}+$$
$$+a_4\frac{d^2y_н}{dt^2}+a_5\frac{dy_н}{dt}+a_6y_н=b_1\frac{d^2y_з}{dt^2}+a_5\frac{dy_з}{dt}+a_6y_з+$$
$$+\frac{b_\alpha V_e}{J_z}\frac{d^2\Delta M_в}{dt^2}+\frac{c_3V_e}{J_z}\frac{d\Delta M_в}{dt}, \qquad (11.47)$$

где

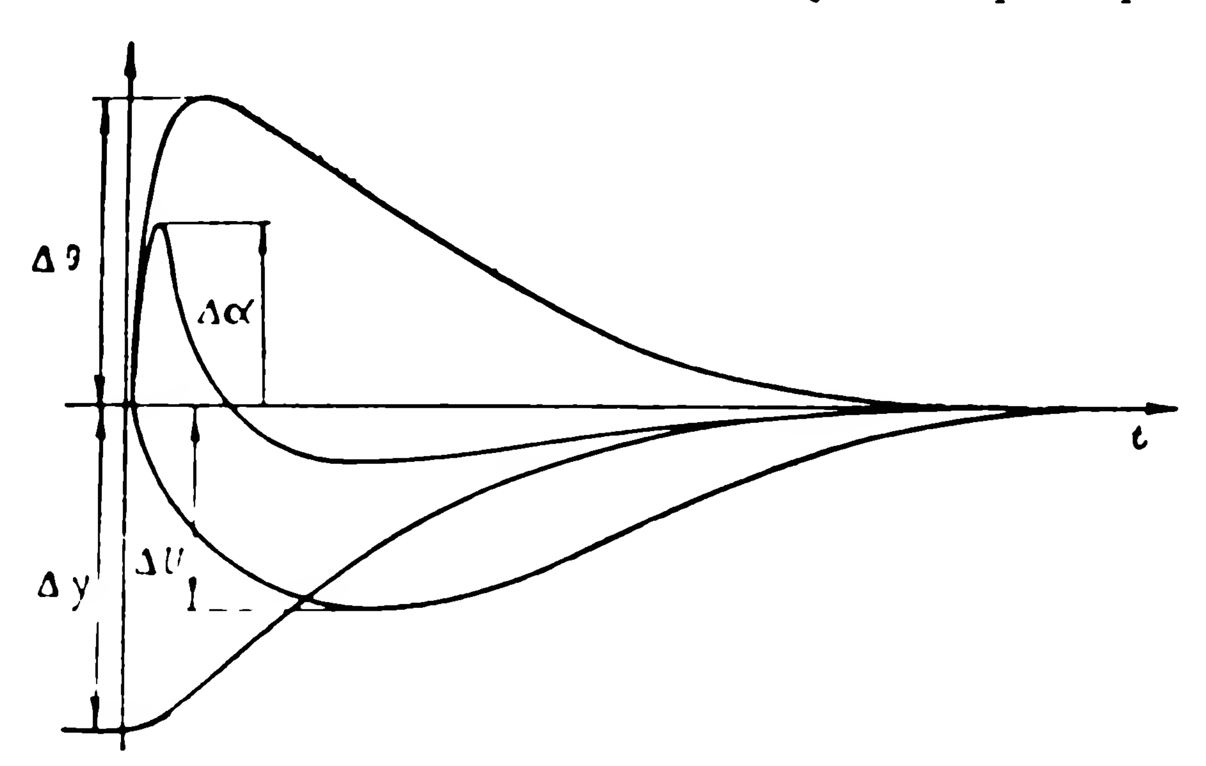
$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= a_V+b_\alpha-b_\theta+c_{\dot\vartheta}+c_{\dot\alpha}+i_{\dot\vartheta}c_\delta;\\
a_2 &= c_1+b_\alpha c_{\dot\vartheta}+c_\alpha+i_\vartheta c_\delta+(c_{\dot\vartheta}+c_{\dot\alpha}+\\
&+i_{\dot\vartheta}c_\delta)(a_V-b_\theta)+(i_{\dot\theta}+i_{\dot\vartheta})b_\alpha c_\delta;\\
a_3 &= (c_\alpha+i_\vartheta c_\delta)(a_V-b_\theta)+(c_{\dot\vartheta}+i_{\dot\vartheta}c_\delta)c_3+\\
&+(c_{\dot\vartheta}+c_{\dot\alpha}+i_{\dot\vartheta}c_\delta)c_2-a_\alpha c_V+i_\vartheta c_\delta b_\alpha+\\
&+i_\theta b_\alpha c_\delta+i_{\dot\theta}c_\delta c_3;\\
a_4 &= (c_\alpha+i_\vartheta c_\delta)c_2-c_Vc_4+i_\vartheta c_\delta c_3+\\
&+i_yb_\alpha c_\delta V_e+i_\theta c_\delta c_3;\\
a_5 &= q_yb_\alpha c_\delta V_e+i_yc_\delta c_3V_e;\\
a_6 &= q_yc_\delta c_3V_e;\\
b_1 &= i_yb_\alpha c_\delta V_c.
\end{aligned}\right\} \qquad (11.48)$$

Выражения для коэффициентов уравнения (11.47) показывают, что в каждый из этих коэффициентов входит, по крайней мере,

* Значения коэффициентов $c_1$, $c_2$, $c_3$ и $c_4$ определяются формулами (8.30).

одно новое передаточное число автопилота, в результате чего можно выбрать нужные значения этих коэффициентов методом СК. За счет введения в закон управления интегрального члена система стала астатичной к постоянному возмущающему моменту $\Delta M_{в}$. Кроме того, система астатична и к управляющему сигналу, линейно зависящему от времени ($y_з = kt$).

Если требования к системе управления центром тяжести снаряда могут быть снижены, то закон управления можно упростить, что сделает менее сложной и всю систему. Например, если не иг-




Фиг. 11.16. Графики переходного процесса при управлении центром тяжести в продольном движении.

рают существенной роли отклонения от заданной траектории, вызываемые внешним моментом, или этот момент очень мал, то можно отказаться от интегрального члена в законе управления, в результате чего порядок уравнения (11.47) снизится на единицу. Можно также попытаться обеспечить приемлемые динамические свойства системы, используя лишь сигнал по углу тангажа ($\Delta\vartheta$), отказавшись от сигнала по углу наклона траектории ($\Delta\theta$) и т. п.

На фиг. 11.16 в качестве примера приведены кривые, характеризующие процессы изменения линейного отклонения $\Delta y = y_з - y_н$ изменений углов атаки $\Delta\alpha$ и наклона траектории $\Delta\theta$, а также скорости $\Delta V$ при управлении центром тяжести снаряда в вертикальной плоскости.

## § 11.5. УПРАВЛЕНИЕ ЦЕНТРОМ ТЯЖЕСТИ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА

Управление центром тяжести снаряда относительно заданной траектории во многих практически важных случаях происходит при довольно быстро изменяющейся скорости полета. Такое положение может иметь место при вводе снаряда сразу после старта в радиолуч, при управлении баллистическими ракетами на активном участке траектории, при взлете самолетов-снарядов и т. п.

Поэтому целесообразно рассмотреть особенности работы систем управления центром тяжести для тех случаев, когда снаряд имеет переменную скорость полета. Эта скорость предварительно вычисляется как функция времени из условия, что снаряд точно удерживается на заданной траектории.

В качестве примера рассмотрим управление боковым движением центра тяжести крестокрылого снаряда, стабилизированного относительно продольной оси. Как и в предыдущих параграфах, путем ряда допущений максимально упростим задачу, что особенно необходимо в данном случае, так как движение снаряда теперь описывается линейными уравнениями с переменными коэффициентами. Для упрощения системы уравнений (8.56), описывающих боковое движение снаряда, имеющего переменную скорость, сделаем предположение о мгновенной балансировке снаряда, т. е. пренебрежем временем переходных процессов в короткопериодическом движении. Кроме того, будем полагать, что изменения углов $\beta$ и $\psi$ невелики и, следовательно, можно $\sin\beta$ и $\sin\psi$ заменить самими углами. С учетом этих упрощений и принятого правила знаков система уравнений (8.56) приобретает вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\beta}{dt} - c_z^{\beta} s \frac{\rho V}{2m}\beta = 0;\\ &\beta = \frac{m_y^{\delta}}{m_y^{\beta}}\delta_{н};\\ &\frac{dz_g}{dt} = V(\psi - \beta). \end{aligned}\right\} \qquad (11.49)$$

Для управления снарядом используем автопилот со следующим законом управления:

$$\delta_{н} = i_{\dot z}\left(\frac{dz_з}{dt} - \frac{dz_g}{dt}\right) + i_z(z_з - z_g). \qquad (11.50)$$

Объединяя уравнения снаряда (11.49) и автопилота (11.50) и исключая все переменные, кроме $z_g$, получим общее уравнение рассматриваемой системы *

$$\frac{d^2 z_g}{dt^2} + \left[-\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} + i_{\dot z} c_z^{\beta} S \frac{\rho V^2}{2m}\frac{m_y^{\delta}}{m_y^{\beta}}\right]\frac{dz_g}{dt} + i_z c_z^{\beta} S \frac{\rho V^2}{2m} \times$$

$$\times \frac{m_y^{\delta}}{m_y^{\beta}} z_g = i_{\dot z} c_z^{\beta} S \frac{\rho V^2}{2m}\frac{m_y^{\delta}}{m_y^{\beta}}\frac{dz_з}{dt} + i_z c_z^{\beta} S \frac{\rho V^2}{2m}\frac{m_y^{\delta}}{m_y^{\beta}} z_з. \qquad (11.51)$$

Так как $c_z^{\beta} < 0$ и $m_y^{\beta} < 0$, то при выполнении условия

$$i_{\dot z} c_z^{\beta} S \frac{\rho V^2}{2m}\frac{m_y^{\delta}}{m_y^{\beta}} > \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} \qquad (11.52)$$

* При получении уравнения (11.51) масса снаряда считалась неизменной.

уравнение (11.51) соответствует устойчивой системе управления центром тяжести. Очевидно, что при очень малой скорости полета (с ускорением) одно из слагаемых $\left(\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}\right)$ коэффициента при первой производной от $z_g$ может стать большим, а так как оно имеет отрицательный знак, то движение центра тяжести снаряда будет неустойчивым. Но при большом ускорении снаряд может пройти этап неустойчивости центра тяжести настолько быстро, что за это время не успеют накопиться сколько-нибудь существенные отклонения от заданного закона движения центра тяжести. При большой скорости движения это слагаемое становится малым, тогда как второе слагаемое растет пропорционально квадрату скорости полета. В этом режиме первым слагаемым можно пренебречь.

Как и в § 10.8, где рассматривалось короткопериодическое движение снаряда, имеющего переменную скорость, допустим, что на ограниченном участке эту скорость можно считать равнопеременной, т. е. $V=j(t_0 \pm t)$, причем знак плюс относится к ускоренному, а знак минус — к замедленному движениям. Подставим это значение скорости в уравнение (11.51) и проанализируем его методом квазификсированных коэффициентов. После подстановки уравнение (11.51) приобретает вид

$$\frac{d^2z_g}{dt^2} + \left[\mp\frac{1}{t_0 \pm t} + i_z^{\cdot} j^2 b (t_0 \pm t)^2\right]\frac{dz_g}{dt} + i_z j^2 b (t_0 \pm t)^2 z_g =$$

$$= i_z^{\cdot} j^2 b (t_0 \pm t)^2 \frac{dz_з}{dt} + i_z j^2 b (t_0 \pm t)^2 z_з, \qquad (11.53)$$

где

$$b = c_z^\beta S \frac{\rho}{2m}\frac{m_y^\delta}{m_y^\beta}.$$

Применяя к уравнению (11.53) метод квазистационарных коэффициентов, на основании табл. 8.5 получим

$$\frac{d^2z_g}{dt^2} + i_z^{\cdot} j^2 b t_0^2 \frac{dz_g}{dt} + i_z j^2 b t_0^2 z_g = i_z^{\cdot} j^2 b t_0^2 \frac{dz_з}{dt} + i_z j^2 b t_0^2 z_з. \qquad (11.54)$$

Сравнивая уравнения (11.53) и (11.54), видим, что за счет введения по табл. 8.5 поправки в коэффициент при первой производной в нем исчезло первое слагаемое, учитывающее влияние ускорения на демпфирование бокового движения центра тяжести.

Из уравнения (11.54) вытекают выражения для собственной частоты

$$\Omega_0 = j t_0 \sqrt{i_z b} \qquad (11.55)$$

и относительного коэффициента затухания

$$\zeta = \frac{i_z^{\cdot}\sqrt{b}}{2\sqrt{i_z}} j t_0. \qquad (11.56)$$

Формулы (11.55) и (11.56) показывают, что в рассмотренной системе управления снарядом, движущимся с ускорением или замедлением, собственная частота и относительный коэффициент затухания прямо пропорциональны ско-

рости в данный момент времени $V_0 = jt_0$. С увеличением скорости эти характеристики растут, а с уменьшением — убывают.

Анализ продольного движения центра тяжести снаряда, имеющего переменную скорость, несколько сложнее, чем бокового, так как в уравнения (8.52), описывающие это движение, входят дополнительные члены, обусловленные влиянием на снаряд силы веса и проекции силы тяги на продольную ось. Однако с качественной стороны влияние переменной скорости полета на продольное движение центра тяжести снаряда такое же, как и на рассмотренное в этом параграфе боковое движение.

---

## *Глава XII*

# ДВИЖЕНИЕ СНАРЯДОВ В НЕСПОКОЙНОЙ АТМОСФЕРЕ

## § 12.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Анализ движения снарядов, приведенный в предыдущих главах, выполнен в предположении, что воздушная среда, в которой происходит полет, неподвижна относительно Земли. Такое предположение является вполне приемлемым при решении многих задач динамики управляемых снарядов. К таким задачам относится выбор параметров системы управления снарядом и определение основных составляющих его движения.

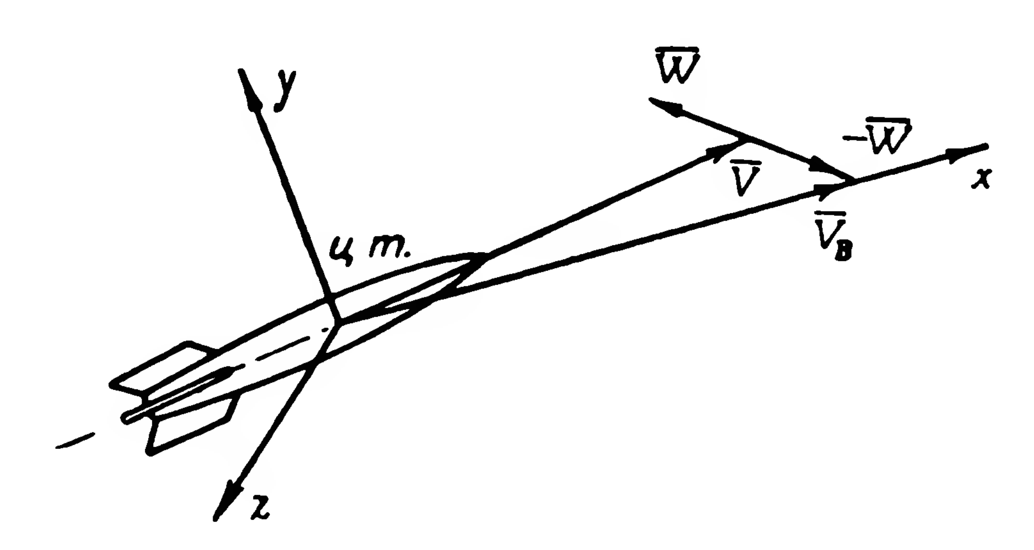
Однако при использовании управляемых снарядов возникает ряд задач, которые требуют учета возможного движения воздуха относительно земной поверхности. В первую очередь сюда следует отнести задачи о рассеивании траекторий управляемых снарядов под действием ветра. В них основную роль играют упорядоченные и, главным образом, горизонтальные потоки воздуха относительно Земли. Эти потоки вызываются неравномерным распределением атмосферного давления (градиентом давления) на участках протяжением в несколько десятков и сотен километров. В других проблемах, связанных с выбором запаса прочности корпуса снаряда и виброустойчивости аппаратуры, на нем установленной, основную роль играет так называемая турбулентность атмосферы. Турбулентностью называется хаотическое движение воздуха, причем отдельные порывы имеют протяженность от нескольких километров и меньше (до нескольких метров). Порывы очень малой протяженности (порядка метра и меньше), хотя и имеют место в атмосфере, однако их интенсивность мала и на снаряд, летящий с большой скоростью, они действуют с высокой частотой, а поэтому заметного влияния на характеристики движения не оказывают.

Турбулентность атмосферы порождается процессами вихреобразования, связанными с поглощением и рассеиванием энергии, которые непрерывно протекают при перемещении больших воздушных масс в любом направлении. Как показывают эксперименты, турбулентные порывы воздуха, начиная с высоты в несколько сот метров над поверхностью Земли, являются изотропными, т. е. не имеют каких-либо преимущественных направлений.

В настоящей главе дается методика учета влияния движения воздуха относительно Земли на полет управляемых снарядов.

## § 12.2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕСПОКОЙНОЙ АТМОСФЕРЫ

При полете снаряда в неподвижной атмосфере векторы его воздушной и путевой скоростей совпадают друг с другом. Если снаряд, путевая скорость которого равна $\overline{V}$, движется в атмосфере,




Фиг. 12.1. Треугольник скорости ветра, путевой и воздушной скоростей снаряда.

имеющей относительно Земли скорость $\overline{W}$, то его воздушная скорость определяется уравнением

$$\overline{V}_в = \overline{V} - \overline{W}. \qquad (12.1)$$

Соотношение (12.1) поясняется на фиг. 12.1. Отрицательный знак перед вектором скорости ветра в формуле (12.1) объясняется тем, что в аэродинамике снарядов принято рассматривать вектор скорости снаряда относительно воздуха, а не противоположный ему вектор скорости воздуха относительно снаряда.

В соответствии с изложенным в § 12.1 вектор скорости воздуха относительно Земли или, короче, вектор ветра будем полагать состоящим из двух составляющих

$$\overline{W} = \overline{W}_0 + \overline{W}_с. \qquad (12.2)$$

где $\overline{W}_0$ — постоянная составляющая скорости ветра, учитывающая упорядоченные потоки воздуха большой протяженности;

$\overline{W}_с$ — переменная (случайная) составляющая скорости ветра, учитывающая турбулентные порывы воздуха.

Математическое описание постоянной составляющей скорости ветра, естественно, очень несложно. Вектор постоянного ветра можно разложить по осям координат, которые используются для описания движения снаряда, и учесть при составлении уравнений движения.

Эксперименты показывают, что переменная составляющая вет-

ра есть случайная функция координат $x$, $y$, $z$ данной точки атмосферы и времени $t$. Для анализа этой составляющей разложим вектор $\overline{W}_{\text{c}}$ $(x, y, z, t)$ по осям координат, связанным произвольно ориентированной неподвижной системы:

$$\overline{W}_{\text{c}}(x, y, z, t) = iw_{\text{c}x}(x, y, z, t) + jw_{\text{c}y}(x, y, z, t) + kw_{\text{c}z}(x, y, z, t),$$

где

$w_{\text{c}x}$, $w_{\text{c}y}$, $w_{\text{c}z}$ — проекции $\overline{W}_{\text{c}}$ на соответствующие оси;

$i$, $j$, $k$ — единичные орты по осям $x, y, z$.

Проекции вектора $\overline{W}_{\text{c}}(x, y, z, t)$ есть случайные функции тех же аргументов, что и сам вектор.

Чтобы упростить описание движения снаряда под действием случайной составляющей ветра, сделаем следующие допущения:

1) полагаем, что скорость случайной составляющей ветра одинакова для всех точек поверхности снаряда; такое допущение вполне приемлемо для снарядов не слишком больших размеров;

2) случайная составляющая ветра обусловлена турбулентностью атмосферы, которую считаем изотропной, что справедливо для высот от $(500 \div 1000)$ *м* и выше.

На основании допущения об изотропности атмосферной турбулентности можно утверждать, что случайные функции $w_{\text{c}x}$, $w_{\text{c}y}$, $w_{\text{c}z}$ должны быть одинаковыми в вероятностном смысле. Поэтому вероятностные характеристики, полученные для любой из этих функций, могут считаться справедливыми и для двух других.

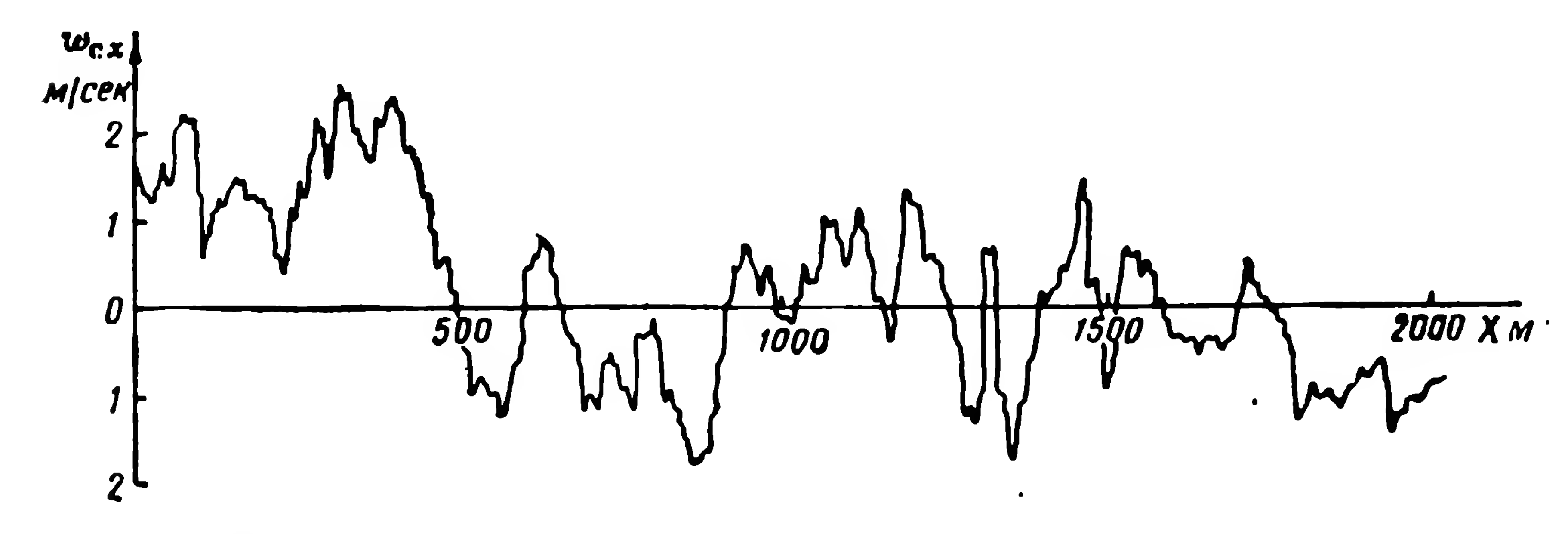
Если рассматривать турбулентную атмосферу с точки зрения оценки ее воздействия на быстролетящий снаряд, то можно сделать ряд упрощений при математическом описании случайной составляющей ветра. Вследствие малости проекций случайного ветра $w_{\text{c}x}$, $w_{\text{c}y}$, $w_{\text{c}z}$ по сравнению со скоростью снаряда можно свести поле скоростей турбулентных порывов к застывшей, неизменной в пространстве модели. Для такого поля между координатами $x$ и $t$ устанавливается однозначная связь через скорость полета снаряда:

$$x = Vt.$$

Кроме того, на основании приведенного выше допущения будем в пределах размера снаряда пренебрегать зависимостью скорости случайного ветра от координат $y$ и $z$. Все эти упрощения позволяют при анализе движения снаряда рассматривать вектор случайного ветра только как функцию одной переменной: координаты $x$ или времени $t$. На основании этого вместо (12.3) получим

$$\overline{W}_{\text{c}}(x) = \overline{W}_{\text{c}}(t) = iw_{\text{c}x}(x) + jw_{\text{c}y}(x) + kw_{\text{c}z}(x) = \\ = iw_{\text{c}x}(t) + jw_{\text{c}y}(t) + kw_{\text{c}z}(t). \qquad (12.4)$$

Для иллюстрации характера случайных функций $w_{cx}$, $w_{cy}$, $w_{cz}$ на фиг. 12.2 приведена экспериментально снятая кривая * $w_{cx}$ $(x)$. Многочисленные эксперименты ** показывают, что в пределах расстояний в несколько десятков, а иногда и сотен километров сохраняются более или менее неизменные метеорологические условия и рассматриваемая функция скорости случайного ветра яв-




Фиг. 12.2. Осциллограмма случайной составляющей ветра, совпадающая с направлением полета.

ляется стационарной случайной функцией. В этом случае вероятностные характеристики этой функции не зависят от времени $t$ и, следовательно, от значения координаты $x$.

Для анализа стационарных случайных процессов с успехом применяются понятия корреляционной функции и спектральной плотности, рассмотренные в § 2.5. Приведем здесь сответствующие формулы с теми переменными, которые используются ниже:

$$R(\varkappa) = \int_0^\infty S(\Omega) \cos \Omega\varkappa d\Omega; \qquad (12.5)$$

$$S(\Omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\varkappa) \cos \Omega\varkappa d\varkappa; \qquad (12.6)$$

$$\sigma_w^2 = R(0) = \int_0^\infty S(\Omega)\, d\Omega, \qquad (12.7)$$

---

* Ю. П. Доброленский, Турбулентность атмосферы как источник возмущений для систем автоматического управления самолетом, Изв. АН СССР, «Энергетика и автоматика», 1961, № 5.

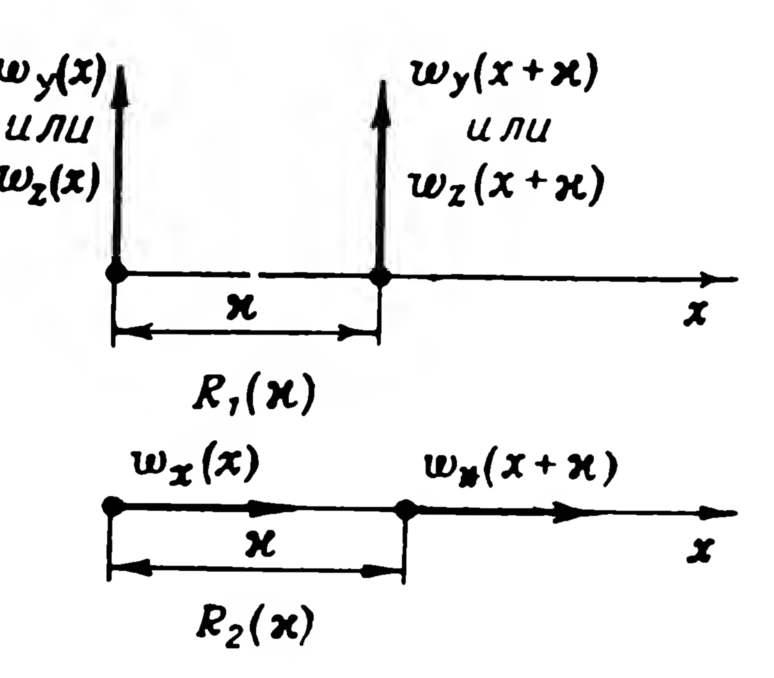
** H. Press, M. T. Meadows, I. Hadlock, A. Reevaluation of Date Atmospheric Turbulence and Airplane Gust Loads for Application in Spectral Calculations, NACA Report, No. 1272, 1956.

где $\varkappa$ — независимая переменная, имеющая смысл приращения линейной пространственной координаты $x$, совпадающей с направлением полета и измеряемой в *м*;

$\Omega$ — пространственная угловая частота, измеряемая в *рад/м* и связанная с угловой частотой $\omega$ соотношением

$$\Omega = \frac{\omega}{V}. \tag{12.8}$$

Использование в формулах (12.5)—(12.7) пространственной угловой частоты $\Omega$ вместо временной угловой частоты $\omega$ основано на уже упоминавшемся представлении о поле скоростей турбулентных порывов как о застывшей, неподвижной в пространстве модели. Преимущество такого подхода к рассматриваемой задаче заключается в возможности определить это поле скоростей турбулентных порывов с помощью пространственных координат. Указанное представление делает аналитические выражения, описывающие поле турбулентных скоростей, универсальными, т. е. пригодными для исследования динамики снаряда, летящего с любой скоростью.




Фиг. 12.3. К положению двух составляющих случайного ветра относительно направления полета.

В теории изотропной турбулентности получены аналитические выражения для корреляционных функций и спектральных плотностей составляющих вектора случайного ветра. Данные экспериментального исследования турбулентности атмосферы хорошо совпадают с этими теоретическими результатами.

Теория изотропной турбулентности * показывает, что достаточно двух корреляционных функций (или двух спектральных плотностей) для описания всех составляющих случайного ветра. Смысл этих функций и различие между ними поясняются на фиг. 12.3, из которой следует, что:

$R_1(\varkappa)$ — корреляционная функция для проекций скорости ветра, нормальных к направлению координаты $x$, по которой исследуется корреляционная связь;

$R_2(\varkappa)$ — корреляционная функция для проекции скорости ветра, совпадающей с направлением координаты $x$.

Следовательно, для проекции ветра $w_{cx}(\varkappa)$ нужно пользоваться корреляционной функцией $R_2(\varkappa)$, а для проекций $w_{cy}(\varkappa)$ и $w_{cz}(\varkappa)$ — корреляционной функцией $R_1(\varkappa)$.

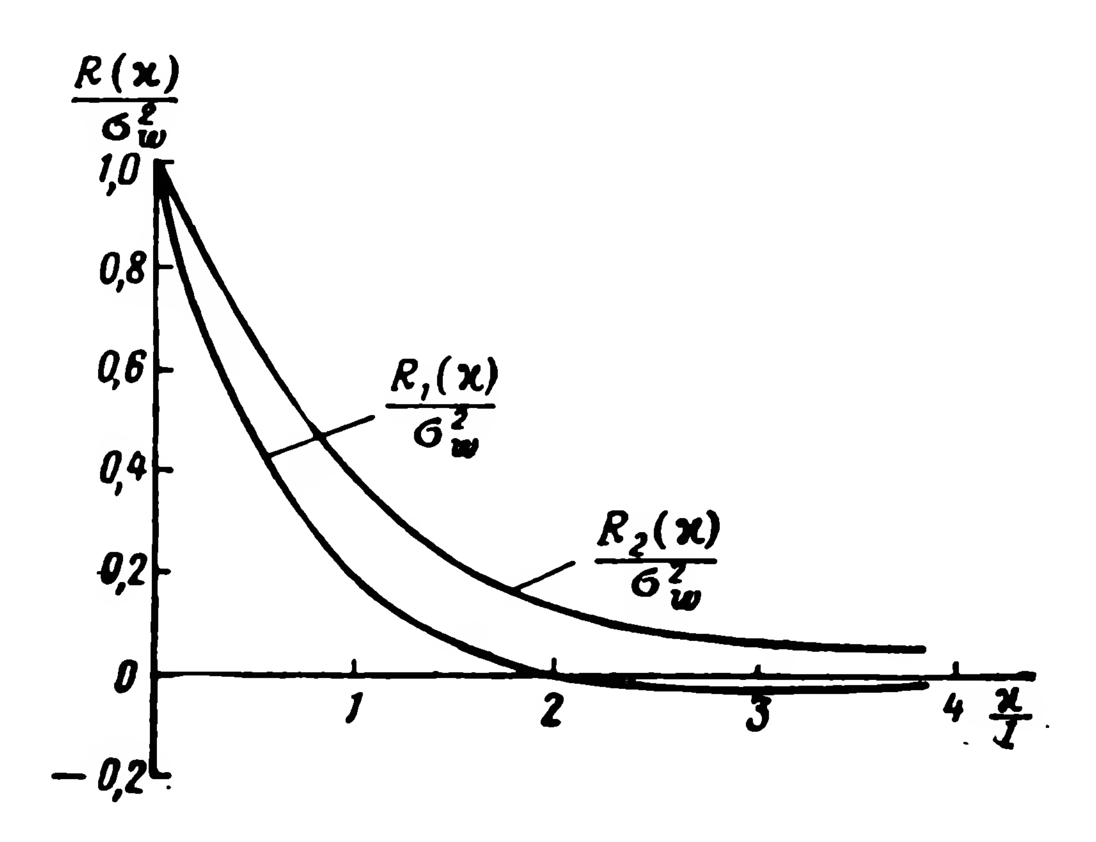
* Дж. Бэтчелор, Теория однородной турбулентности, ИЛ, 1955.

Аналитические выражения для этих функций имеют вид

$$R_1(\varkappa) = \sigma_w^2 (1 - \varkappa/2L) e^{-\varkappa/L}; \tag{12.9}$$

$$R_2(\varkappa) = \sigma_w^2 e^{-\varkappa/L}. \tag{12.10}$$

Формулы (12.9) и (12.10) имеют два параметра: среднее значение квадрата скорости случайного ветра (дисперсию) $\sigma_w^2$, которое характеризует интенсивность турбулентности, и так называемый масштаб турбулентности $L$, пропорциональный среднему раз-




Фиг. 12.4. Графики нормированных корреляционных функций случайных составляющих ветра.

меру возмущений атмосферы. По этим формулам на фиг. 12.4 построены графики нормированных корреляционных функций $R_1(\varkappa)/\sigma_w^2$ и $R_2(\varkappa)/\sigma_w^2$. Графики на фиг. 12.4 показывают, что масштаб турбулентности $L$ характеризует затухание корреляционной связи для скорости случайного ветра.

Наличие аналитических выражений для корреляционных функций $R_1(\varkappa)$ и $R_2(\varkappa)$ позволяет на основании формулы (12.7) получить аналитические выражения для соответствующих им спектральных плотностей. Эти спектральные плотности определяются формулами

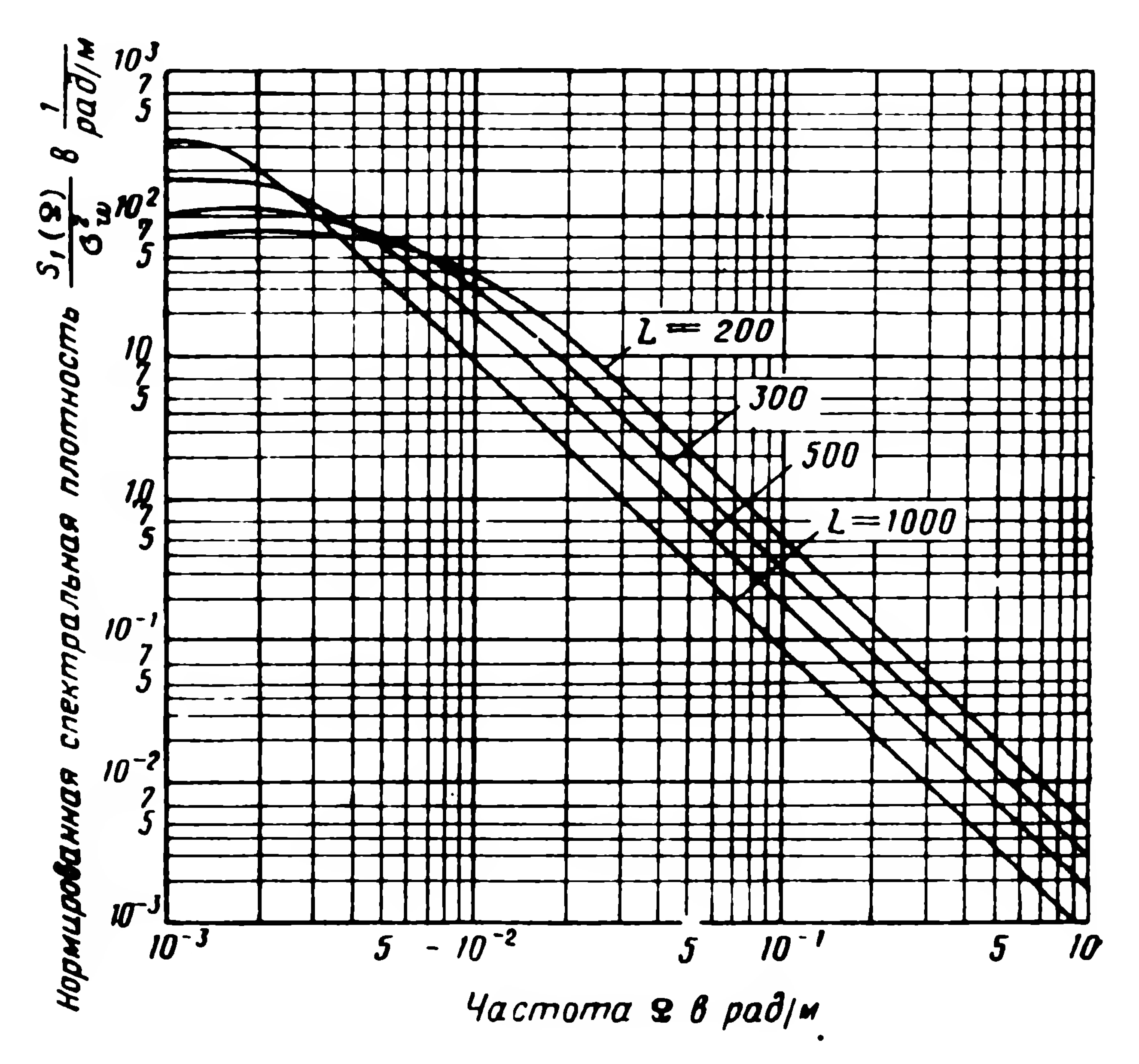
$$S_1(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{L}{\pi} \frac{1 + 3\Omega^2 L^2}{(1+\Omega^2 L^2)^2} \tag{12.11}$$

и

$$S_2(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{L}{\pi} \frac{2}{1 + \Omega^2 L^2}. \tag{12.12}$$

Графики нормированных спектральных плотностей $S_1(\Omega)/\sigma_w^2$ и $S_2(\Omega)/\sigma_w^2$ приведены на фиг. 12.5 и 12.6 соответственно.

В формулы (12.11) и (12.12) входят те же параметры, что и в формулы (12.9) и (12.10): $\sigma_w^2$ и $L$. Очевидно, что масштаб турбулентности $L$ должен зависеть от условий погоды и высоты полета снаряда. Однако достаточных экспериментальных данных по




Фиг. 12.5. Графики нормированной спектральной плотности случайной составляющей ветра, построенные по формуле (12.11).

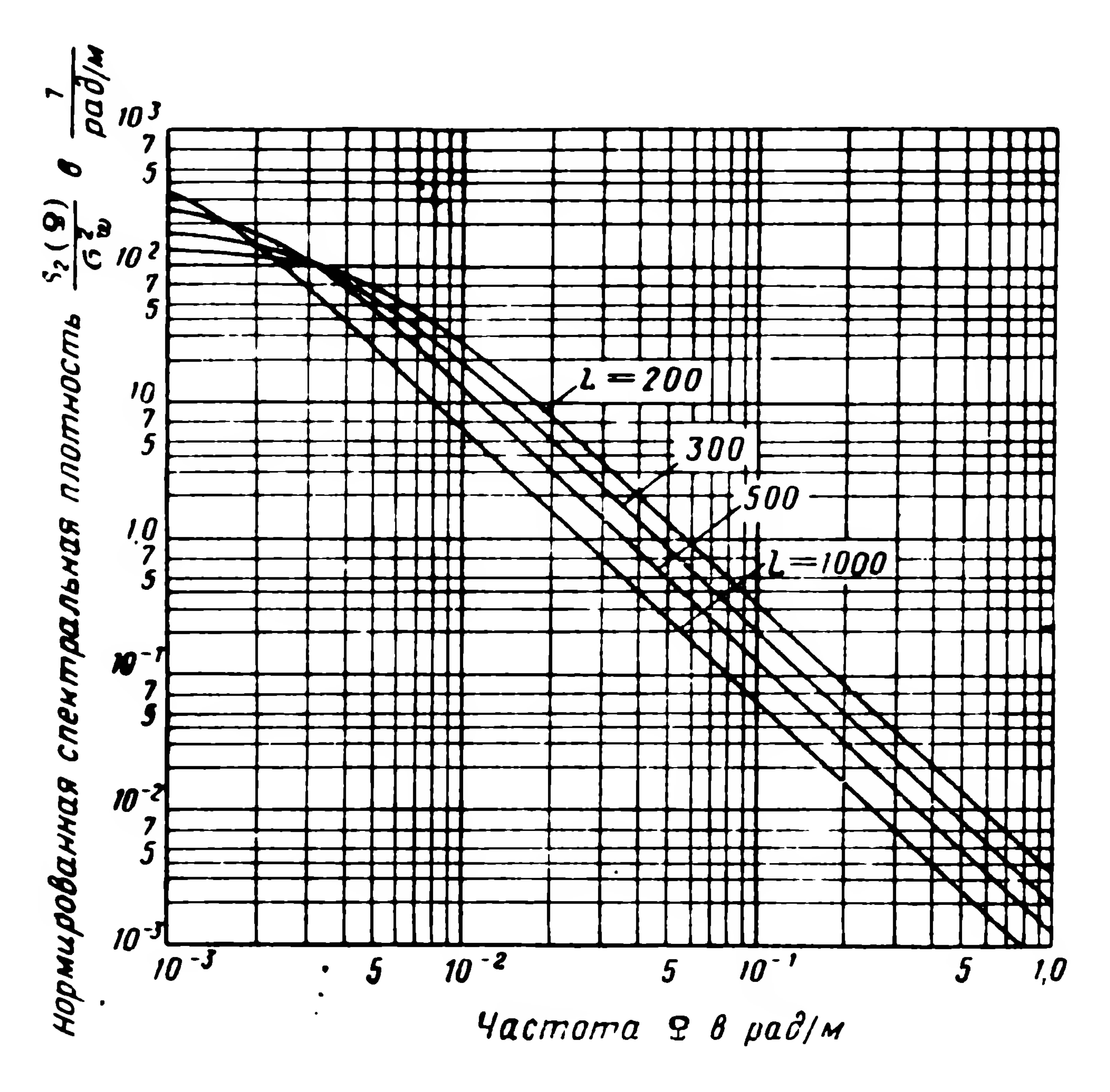
этому вопросу в настоящее время нет. Поэтому ниже будет использоваться наиболее вероятное значение $L = 300$ *м* *.

При постоянном масштабе турбулентности $L$ состояние атмосферы характеризуется одним параметром — среднеквадратичным значением случайного ветра $\sigma_w$. Достаточно выяснить, как зависит величина $\sigma_w$ от условий погоды и высоты полета, чтобы получить полные данные о состоянии турбулентной атмосферы. В настоящее время еще не собран достаточный экспериментальный мате-

* См. сноску ** на стр. 374.

риал, который позволял бы получить достоверные зависимости $\sigma_w$ от условий погоды и высоты полета. В качестве иллюстративного материала приведем доступные данные по этому вопросу *.

На фиг. 12.7 приведены графики функции распределения вероятности среднеквадратичного значения случайного ветра для различных высот полета. Эти графики дают вероятность превышения данной величины $\sigma_w$. Сравнение кривых функций распределе-




Фиг. 12.6. Графики нормированной спектральной плотности случайной составляющей ветра, построенные по формуле (12.12).

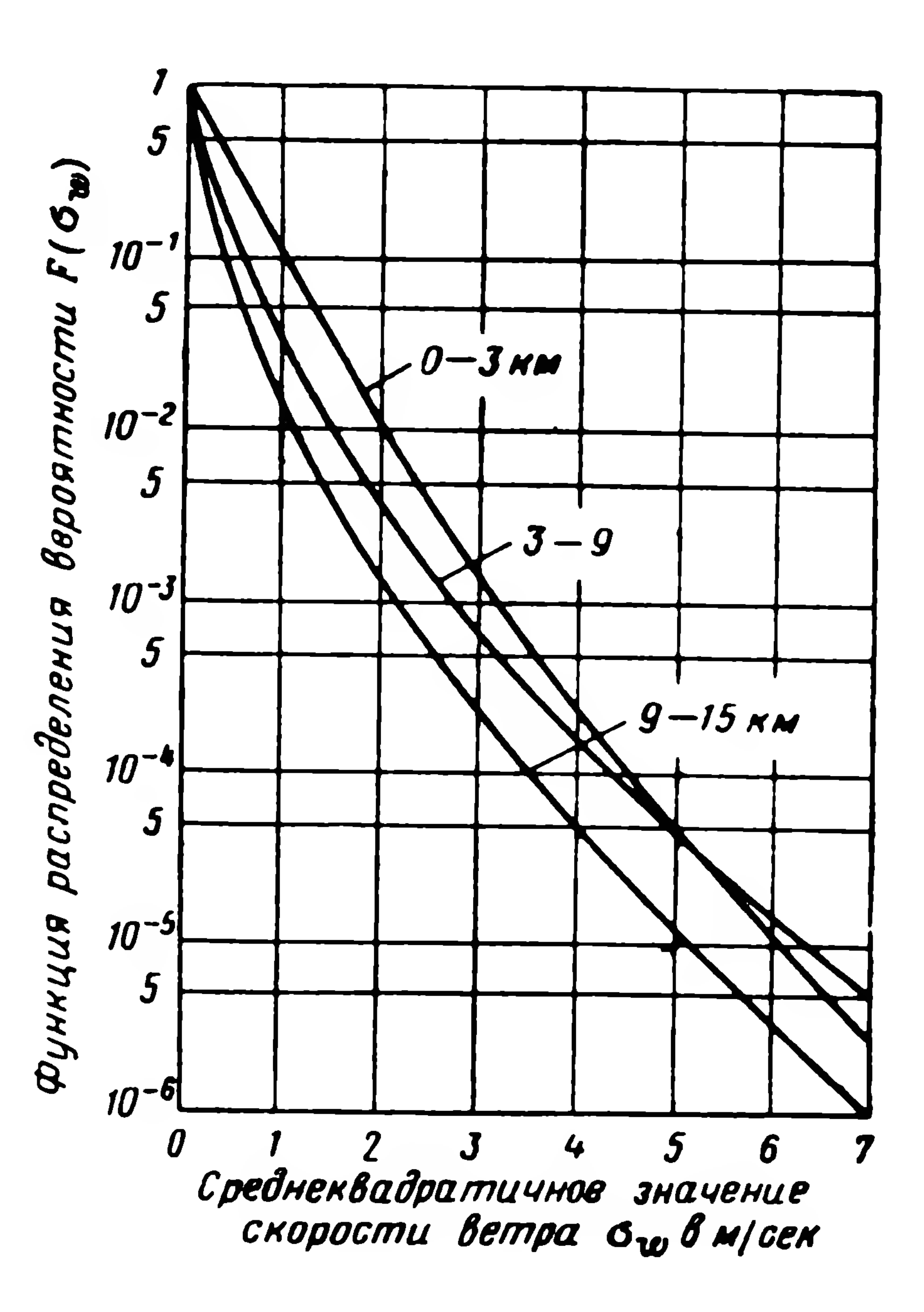
ния вероятности для различных высот дает возможность сделать следующий вывод. С увеличением высоты время полета в сравнительно спокойной атмосфере довольно значительно возрастает. Так, например, время полета в практически спокойной атмосфере ($\sigma_w < 0{,}5$ *м/сек*) для высот 0—3 *км* составляет около 70% от общего времени полета, а для высот 9—15 *км* — около 93%. Время полета в сильно возмущенной атмосфере ($\sigma_w > 2{,}5$ *м/сек*) для высот полета 0—3 *км* составляет около 0,4%, тогда как для высот 9—15 *км* оно равно всего 0,05%, т. е. примерно в 10 раз меньше.

---

* См. сноску ** на стр. 374.

Для рассмотрения вопроса о влиянии условий погоды на среднеквадратичное значение скорости случайного ветра введем следующие условные характеристики турбулентности атмосферы:

1) практически спокойная атмосфера ($\sigma_w < 0{,}5$ *м/сек*);
2) турбулентность ясной погоды;
3) турбулентность кучевых облаков;
4) грозовая турбулентность.

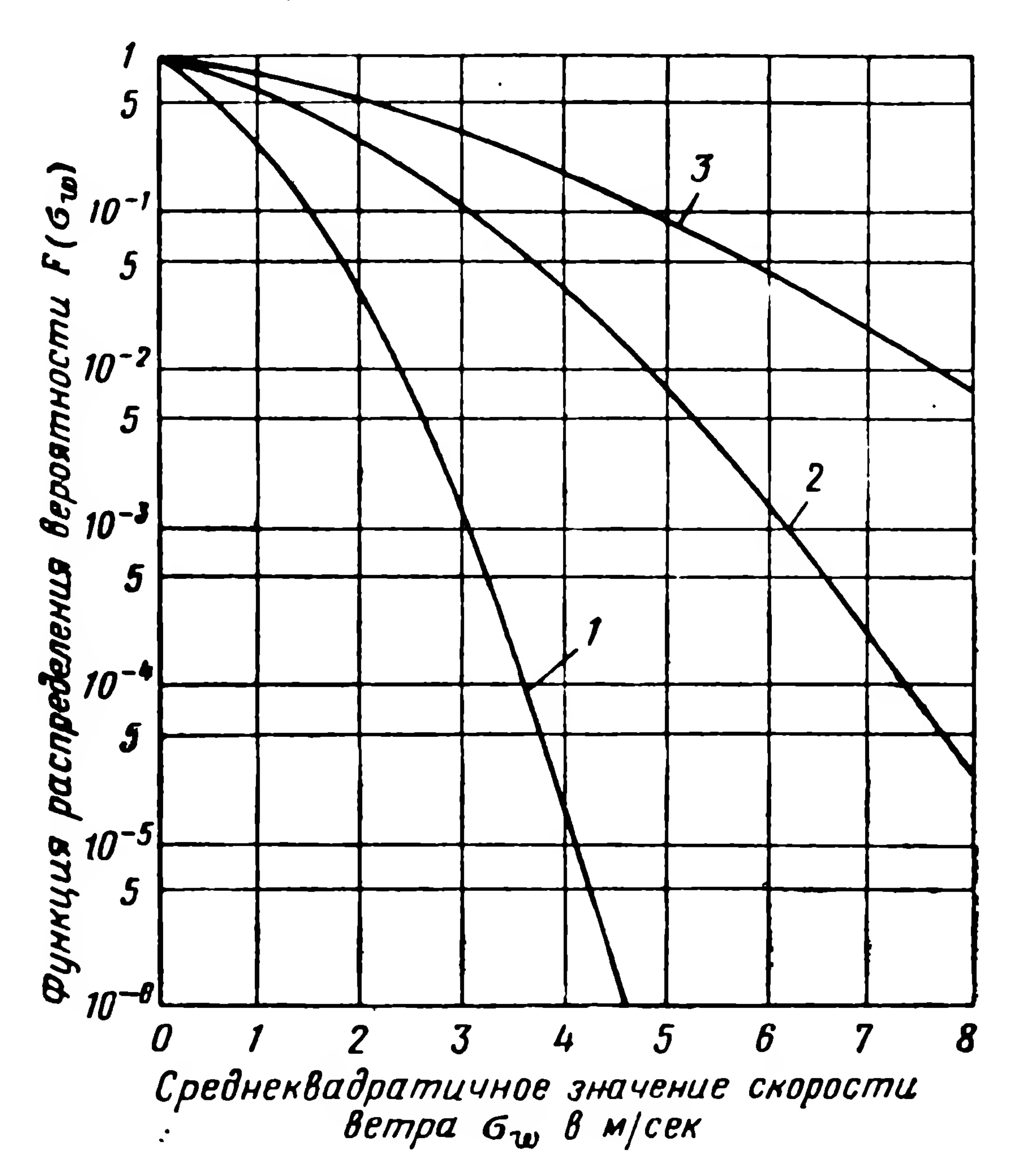



Фиг. 12.7. Кривые функции распределения вероятности среднеквадратичного значения случайного ветра для различных высот.

На фиг. 12.8 приведены графики функций распределения среднеквадратичного значения случайного ветра $\sigma_w$ для указанных условий погоды. Смысл их тот же, что и графиков на фиг. 12.7. Из сравнения кривых на фиг. 12.8 можно сделать вывод, что при одном и том же значении вероятности среднеквадратичное значение скорости ветра $\sigma_w$ для кучевых облаков примерно в два, а для грозовых условий примерно в три раза больше, чем для ясной погоды. Обработка статистических данных показывает, что время полета в грозовых условиях составляет 0,05% от всего времени полета, время полета в кучевых облаках — 1%, время полета в условиях турбулентности ясной погоды — 10% и, наконец, остальные 88,95% приходится на полет в практически спокойной атмосфере.

Все приведенные выше данные о зависимости среднеквадратичного значения случайного ветра от высоты полета и условий погоды получены в результате обработки большого статистического

материала, накопленного авиалиниями США *. Поэтому такие данные справедливы при конкретной методике самолетовождения, принятой на этих авиалиниях, а не отражают достаточно объективно состояние атмосферы. По этой причине, как уже упоминалось выше, к приведенным данным следует относиться как к иллюстративному материалу, показывающему, какие характеристики турбулентной атмосферы должны быть получены.




Фиг. 12.8. Кривые функций распределения вероятности среднеквадратичного значения случайного ветра для различных условий погоды.
1 — ясная погода, 2 — кучевые облака, 3 — грозовые условия.

## § 12.3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДА В НЕСПОКОЙНОЙ АТМОСФЕРЕ

Учет ветра в уравнениях движения снаряда производится различно для различных координатных осей, принятых при описании этого движения. Если используются поточные оси, то в уравнениях появляются дополнительные члены, учитывающие «подвиж-

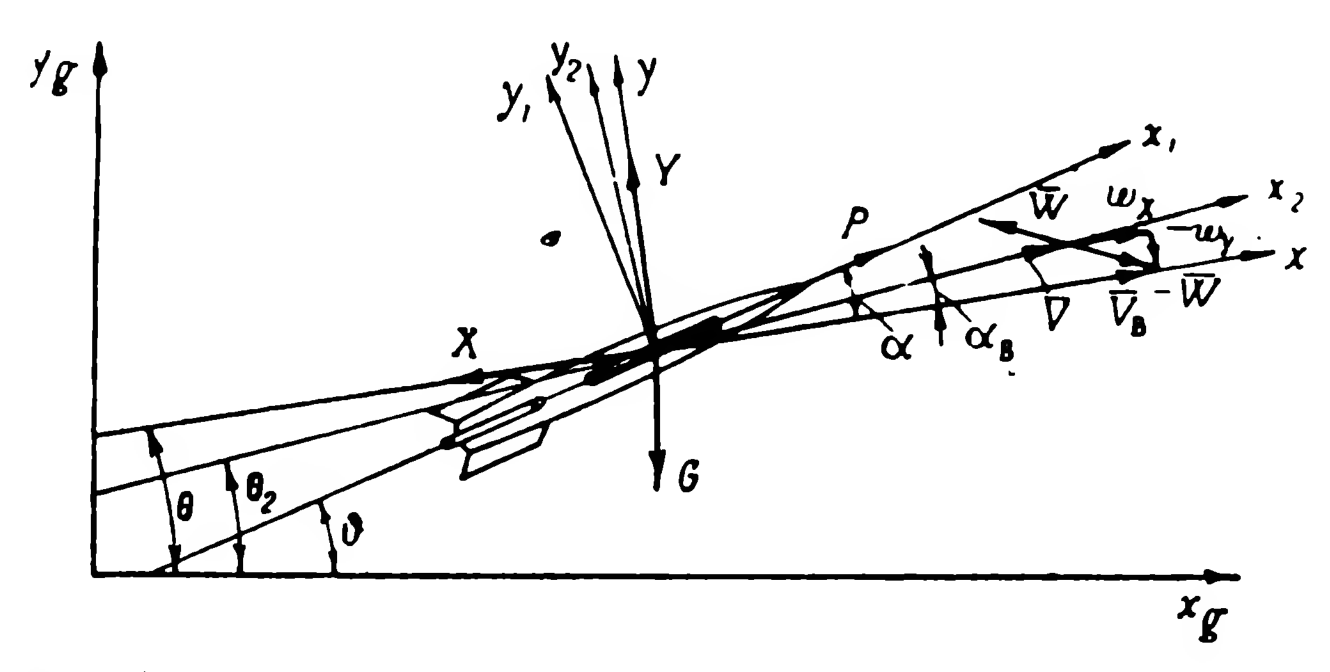
* См. сноску ** на стр. 374.

ность» этой системы, обусловленную ветром. При применении связанных осей такие члены отсутствуют. Аэродинамические силы и моменты, естественно, зависят от воздушной скорости, которая связана со скоростью ветра соотношением (12.1).

Учитывая эти общие соображения, получим уравнения продольного и бокового движений снаряда в неспокойной атмосфере.

## 1. Уравнения продольного движения снаряда в неспокойной атмосфере

На фиг. 12.9 показаны силы, действующие на снаряд в продольном движении при наличии ветра и используемые для составления уравнений системы координат.




Фиг. 12.9. Силы, действующие на снаряд в продольном движении при наличии ветра, и используемые системы координат.

$x_g$, $y_g$ — неподвижные или земные оси; горизонтальная ось $x_g$ направлена по курсу полета снаряда, ось $y_g$ — вертикальна; $x$, $y$ — поточные оси; ось $x$ направлена по воздушной скорости снаряда, ось $y$ — перпендикулярна ей; $x_1$, $y_1$ — связанные оси, неподвижные относительно снаряда; ось $x_1$ направлена по хорде крыла, ось $y_1$ — ей перпендикулярна; $x_2$, $y_2$ — сопровождающие оси; ось $x_2$ направлена по путевой скорости снаряда, т. е. по касательной к его траектории относительно земли; ось $y_2$ направлена по нормали к этой траектории; $G$ — сила веса снаряда; $P$ — тяга двигателя; $\overline{V}$ — путевая скорость снаряда; $\overline{V}_в$ — воздушная скорость снаряда (скорость относительно земли); $\overline{W}$ — скорость воздуха относительно земли; на фиг. 12.9 показаны также составляющие вектора $-\overline{W}$, которые и нужно учитывать при сложении скоростей снаряда и ветра, как уже упоминалось выше; $\vartheta$ — угол тангажа; $\theta$ — угол наклона вектора воздушной скорости; $\theta_2$ — угол наклона траектории; $\alpha$ — угол атаки; $\alpha_в$ — составляющая общего угла атаки $\alpha$, обусловленная ветром.

В случае движения снаряда с переменной скоростью в неподвижной атмосфере продольное движение описывается уравнениями (8.51). При учете подвижности воздуха эти уравнения принимают вид

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{dV_x}{dt} - m\omega_z' V_y = -X - G\sin\theta + P\cos\alpha;\\
&m\frac{dV_y}{dt} + m\omega_z' V_x = Y - G\cos\theta + P\sin\alpha;\\
&J_z\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M_z;\\
&\vartheta = \theta + \alpha;\\
&\frac{dx_g}{dt} = V_e\cos\theta_2;\\
&\frac{dy_g}{dt} = V_e\sin\theta_2;\\
&\theta_2 = \theta + \alpha_в;\\
&V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2};\\
&\alpha_в = \operatorname{arc\,tg}\frac{w_y}{V_x + w_x};\\
&\omega_z' = \frac{d\theta}{dt}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.13)$$

В этих уравнениях $V_x$ и $V_y$ — проекции путевой, а не воздушной скорости, так как инерционные силы определяются ускорением снаряда относительно земли. С другой стороны, аэродинамические силы и моменты ($X$, $Y$, $M_z$) зависят от воздушной скорости снаряда. Прежде чем сгруппировать уравнения, входящие в систему (12.13), учтем некоторые соотношения между входящими в них величинами, чтобы внести возможные упрощения.

Прежде всего полагаем, что скорость ветра $\overline{W}$ значительно меньше скорости снаряда (как воздушной, так и путевой). Это предположение позволяет ввести ряд приближенных соотношений, значительно упрощающих систему уравнений (12.13). К таким соотношениям относятся

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_в = \operatorname{arc\,tg}\frac{w_y}{V_x + w_x} \approx \operatorname{arc\,tg}\frac{w_y}{V} \approx \frac{w_y}{V};\\
&V_y = V_x\operatorname{tg}\alpha_в \approx w_y;\\
&V_x = \sqrt{V^2 - V_y^2} \approx V;\\
&V_в \approx V - w_x.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.14)$$

На основании этого же предположения о малости скорости ветра по сравнению со скоростью снаряда можно пренебречь вто-

рым членом в левой части первого уравнения системы (12.13) по сравнению с первым.

Учитывая соотношения (12.14) и последнее допущение и заменяя значения $X$, $Y$ и $M_z$ их выражениями на основании формул (8.23)—(8.25), производим группировку уравнений в системе (12.13). Группа уравнений, описывающих движение центра тяжести снаряда в неспокойной атмосфере, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{dV}{dt} - c_x S\rho V w_x + c_x S\frac{\rho V^2}{2} = -G\sin\theta + P\cos\alpha;\\
&\frac{dx_g}{dt} = V\cos\theta_2;\\
&\frac{dy_g}{dt} = V\sin\theta_2;\\
&\theta_2 = \theta + \frac{w_y}{V}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.15)$$

Составляющие скорости ветра $w_x$ и $w_y$, входящие в уравнения (12.15), а также тяга двигателя $P$ считаются известными *, т. е. при решении системы (12.15) они должны быть заданы как функция времени. Решая первое из уравнений (12.15) рекомендованными в § 2.4 методами, находим скорость полета как функцию времени. Затем из четвертого уравнения определяется угол наклона траектории $\theta_2$ и, наконец, в случае необходимости из второго и третьего уравнений можно получить координаты центра тяжести снаряда в земных осях $x_g O y_g$.

Группа уравнений, описывающих движение снаряда относительно центра тяжести с учетом ветра, имеет вид

$$\left.\begin{aligned}
&mV\frac{d\theta}{dt} - c_y^{\alpha} S\frac{\rho V^2}{2}\alpha + G\cos\theta - P\sin\alpha =\\
&= -c_y S\rho V w_x - m\frac{dw_y}{dt};\\
&J_z\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - m_z^{\overline{\omega}_z} S b_A^2\frac{\rho(V - w_x)}{2}\frac{d\vartheta}{dt} - m_z^{\dot{\alpha}} S b_A^2\frac{\rho(V - w_x)}{2}\frac{d\alpha}{dt} -\\
&- m_z^{\alpha} S b_A\frac{\rho(V - w_x)^2\alpha}{2} = m_z^{\mathrm{M}} S b_A\frac{\rho(V - w_x)^3}{2a} +\\
&+ m_z^{\delta} S b_A\frac{\rho(V - w_x)^2}{2}\delta_{\text{в}};\\
&\vartheta = \theta + \alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.16)$$

* В уравнениях (12.15) и ниже влияние ветра на тягу двигателя снаряда не учитывается.

Поскольку путевая скорость снаряда $V$ определяется из формул (12.15), а составляющие скорости ветра $w_x$ и $w_y$ должны быть заданы, то после линеаризации с помощью какого-либо допущения функций $\cos\theta$ и $\sin\alpha$ вся система уравнений (12.16) превращается в линейную с переменными коэффициентами. Эта система, несмотря на некоторую сложность, позволяет в принципе проанализировать влияние ветра на полет снаряда, имеющего переменную скорость.

Несколько проще получаются уравнения продольного движения снаряда с учетом ветра, полученные методом линеаризации. Не повторяя снова всех соображений о влиянии подвижности среды, использованных уже при получении уравнений (12.15) и (12.16), приведем лишь окончательную форму линеаризованных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&a_\theta\Delta\theta + a_\alpha\Delta\alpha + \frac{d\Delta V}{dt} + a_V\Delta V + a_y\Delta y_g = a_V w_x + a_\delta\Delta\delta_д;\\
&\frac{d\Delta\theta}{dt} - b_\theta\Delta\theta - b_\alpha\Delta\alpha - b_V\Delta V + b_y\Delta y_g =\\
&= - b_V w_x - \frac{1}{V_e}\frac{dw_y}{dt} + b_\delta\Delta\delta_д;\\
&\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + c_{\dot\vartheta}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\dot\alpha}\frac{d\Delta\alpha}{dt} + c_\alpha\Delta\alpha + c_V\Delta V = c_V w_x + c_\delta\Delta\delta_в;\\
&\frac{d\Delta x_g}{dt} = (V_e + \Delta V)\cos\theta_e - V_e\sin\theta_e\Delta\theta;\\
&\frac{d\Delta y_g}{dt} = (V_e + \Delta V)\sin\theta_e + V_e\cos\theta_e\Delta\theta_2;\\
&\Delta\vartheta = \Delta\theta + \Delta\alpha;\\
&\Delta\theta_2 = \Delta\theta + \frac{w_y}{V_e}.
\end{aligned}\right\} \quad (12.17)$$

Коэффициенты уравнений (12.17) определяются формулами (8.27).

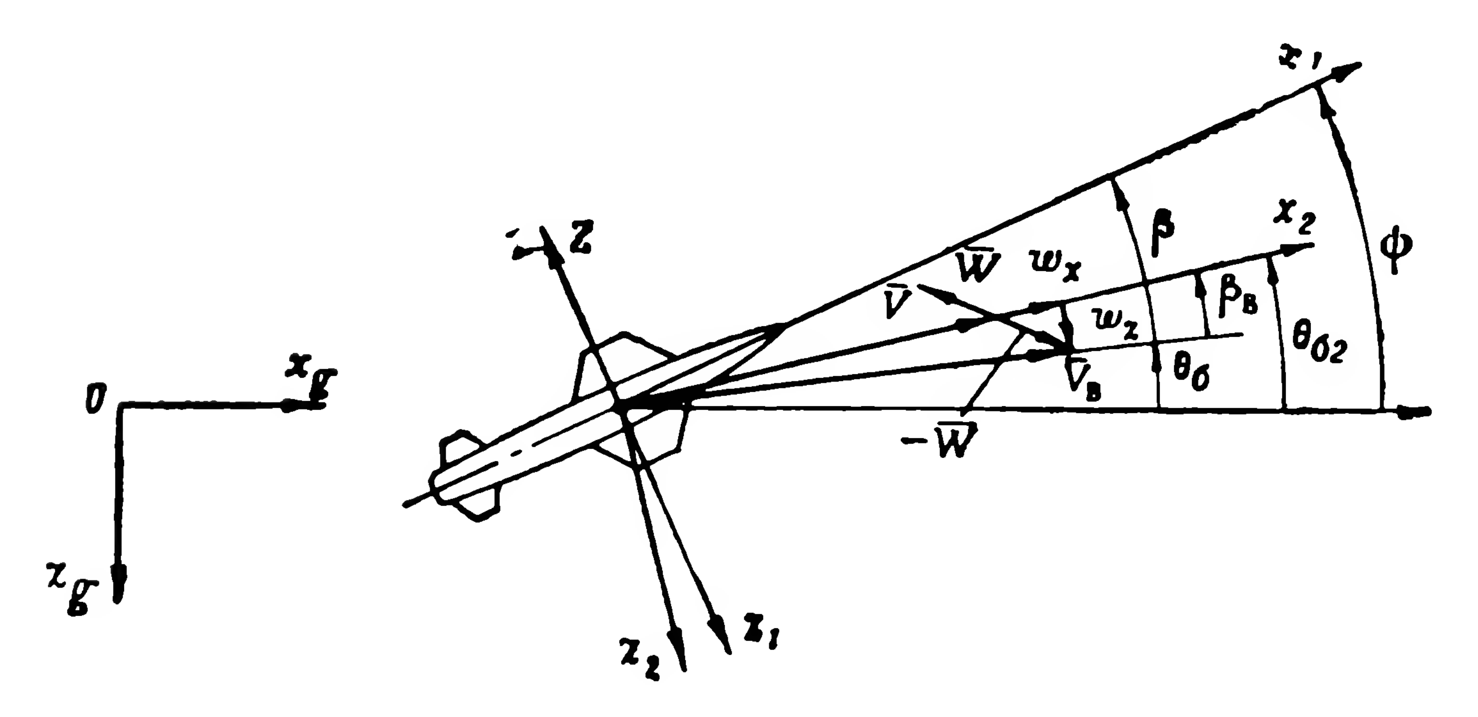
## 2. Уравнения бокового движения снаряда в неспокойной атмосфере

На фиг. 12.10 приведены системы координат, используемые для составления уравнений бокового движения снаряда при наличии ветра.

Как и в предыдущем пункте настоящего параграфа, рассмотрим вначале более общий случай движения в неспокойной атмосфере снаряда, имеющего переменную скорость. При движении снаряда с переменной скоростью в неподвижной атмосфере боковое дви-

жение плоскокрылого снаряда описывается уравнениями (8.54). С учетом подвижности воздуха эти уравнения должны быть записаны в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned}
&mV\frac{d\beta}{dt}-mV\frac{d\beta_{в}}{dt}-mV\frac{d\psi}{dt}=Z;\\
&J_x\frac{d^2\gamma}{dt}=M_x;\\
&J_y\frac{d^2\psi}{dt^2}=M_y;\\
&\frac{dz_g}{dt}=-V\sin\theta_{б_2};\\
&\theta_{б_2}=\psi-\beta+\beta_{в};\\
&\beta_{в}=-\frac{w_z}{V}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.18)$$




Фиг. 12.10. Силы, действующие на снаряд в боковом движении при наличии ветра.

$x_g$, $z_g$ — земные оси; горизонтальная ось $x_g$ направлена по курсу полета снаряда; $x_1$, $z_1$ — связанные оси; $x_2$, $z_2$ — сопровождающие оси; $\bar{V}$ — путевая скорость снаряда; $\bar{V}_{в}$ — воздушная скорость снаряда; $\bar{W}$ — скорость воздуха относительно земли; $\psi$ — угол рыскания; $\theta_{б}$ — угол поворота вектора воздушной скорости; $\theta_{б_2}$ — угол поворота траектории; $\beta$ — угол скольжения; $\beta_{в}$ — составляющая угла скольжения, обусловленная ветром; $Z$ — боковая сила, перпендикулярная продольной оси.

В формулы (12.18), в той форме как они записаны, пока входит только путевая скорость снаряда. Второй член в первом выражении появился благодаря тому, что силы инерции определяются путевым ускорением снаряда

$$\frac{dV_z}{dt}=V\frac{d}{dt}\left[\sin(\beta-\beta_{в})\right]\approx V\frac{d\beta}{dt}-V\frac{d\beta_{в}}{dt}.$$

С другой стороны, сила $Z$ и моменты $M_x$ и $M_y$ зависят от воздушной скорости снаряда. Используя приближенное выражение (12.14), определяющее эту скорость из (12.18), получим развернутые уравнения для плоскокрылого снаряда

$$\left.\begin{aligned}
&mV\frac{d\beta}{dt}-mV\frac{d\psi}{dt}-c_z^{\beta}S\frac{\rho(V-w_x)^2}{2}\beta-G\sin\gamma=-m\frac{dw_z}{dt};\\
&J_x\frac{d^2\gamma}{dt^2}-m_x^{\bar{\omega}_x}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho(V-w_x)}{2}\frac{d\gamma}{dt}-m_x^{\bar{\omega}_y}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho(V-w_x)}{2}\frac{d\psi}{dt}-\\
&-m_x^{\beta}Sl\frac{\rho(V-w_x)^2}{2}\beta=m_x^{\delta}Sl\frac{\rho(V-w_x)^2}{2}\delta_э;\\
&J_y\frac{d^2\psi}{dt^2}-m_y^{\bar{\omega}_y}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho(V-w_x)}{2}\frac{d\psi}{dt}-m_y^{\bar{\omega}_x}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho(V-w_x)}{2}\frac{d\gamma}{dt}-\\
&-m_y Sl\frac{\rho(V-w_x)^2}{2}\beta=m_y^{\delta}Sl\frac{\rho(V-w_x)^2}{2}\delta_н;\\
&\frac{dz_g}{dt}=-V\sin\theta_{б_2};\\
&\theta_{б_2}=\psi-\beta-\frac{w_z}{V}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.19)$$

После линеаризации на основании какого-либо допущения относительно функции $\sin\gamma$ первые три уравнения превращаются в линейные с переменными коэффициентами. Скорость полета $V$ должна быть известна из решения уравнений продольного движения (12.15), а составляющие скорости ветра $w_x$ и $w_z$ должны быть заданы.

Для крестокрылого снаряда со стабилизированным углом крена уравнения бокового движения в неспокойной атмосфере имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&mV\frac{d\beta}{dt}-mV\frac{d\psi}{dt}-c_z^{\beta}S\frac{\rho(V-w_x)^2}{2}\beta=-m\frac{dw_z}{dt};\\
&J_y\frac{d^2\psi}{dt^2}-m_y^{\bar{\omega}_y}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho(V-w_x)}{2}\frac{d\psi}{dt}-m_y^{\dot{\beta}}S\frac{l^2}{2}\frac{\rho(V-w_x)}{2}\frac{d\beta}{dt}-\\
&-m_y^{\beta}Sl\frac{\rho(V-w_x)^2}{2}\beta=m_y^{\delta}Sl\frac{\rho(V-w_x)^2}{2}\delta_н;\\
&\frac{dz_g}{dt}=-V\sin\theta_{б_2};\\
&\theta_{б_2}=\psi-\beta-\frac{w_z}{V}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.20)$$

При исследовании бокового движения снаряда в неспокойной атмосфере с помощью линеаризованных уравнений скорость полета $V_c$ считается постоянной. Поэтому имеется возможность учесть

только составляющую скорости ветра $w_z$, нормальную к заданному направлению полета. Приведем окончательную форму этих уравнений для случая полета в неспокойной атмосфере. Для плоскокрылого снаряда *

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\beta}{dt} + k_\beta\beta - \frac{d\psi}{dt} - \alpha_e\frac{d\gamma}{dt} - k_\gamma\gamma = -\frac{1}{V_e}\frac{dw_z}{dt};\\
&\frac{d^2\gamma}{dt^2} + l_{\dot\gamma}\frac{d\gamma}{dt} + l_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} + l_\beta\beta = l_{\delta_э}\delta_э + l_{\delta_н}\delta_н;\\
&\frac{d^2\psi}{dt^2} + n_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} + n_{\dot\gamma}\frac{d\gamma}{dt} + n_\beta\beta = n_{\delta_э}\delta_э + n_{\delta_н}\delta_н;\\
&\frac{dz_g}{dt} = V_e(\beta - \psi) + w_z.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.21)$$

Для крестокрылого снаряда со стабилизированным углом крена *

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\beta}{dt} + k_\beta\beta - \frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{V_e}\frac{dw_z}{dt};\\
&\frac{d^2\psi}{dt^2} + n_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} + n_{\dot\beta}\frac{d\beta}{dt} + n_\beta\beta = n_{\delta_н}\delta_н;\\
&\frac{dz_g}{dt} = V_e(\beta - \psi) + w_z.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.22)$$

Коэффициенты уравнений (12.21) и (12.22) определяются формулами (8.43) и (8.45).

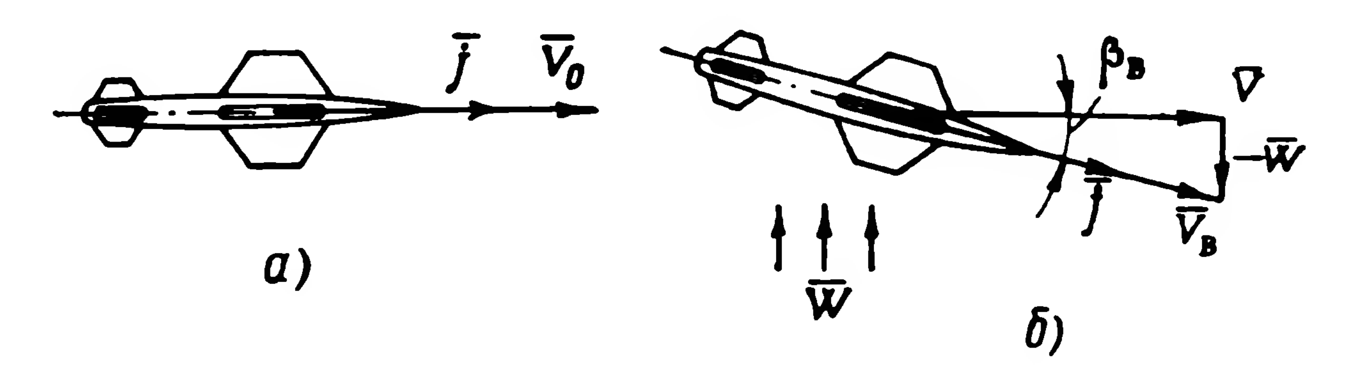
## § 12.4. ВЛИЯНИЕ ПОСТОЯННОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ВЕТРА НА ДВИЖЕНИЕ СНАРЯДА

### 1. Движение снарядов с переменной скоростью полета

Как показывают уравнения (12.15), (12.16), (12.19) и (12.20), анализ влияния ветра на движение снарядов, имеющих переменную скорость, в общем виде невозможен. В случае конкретного снаряда могут быть произведены нужные расчеты, получены соответствующие функции времени и на основании упомянутых формул сделано заключение о влиянии ветра на траекторию снаряда. Однако, если рассматриваемую задачу максимально упростить, то можно сделать интересные качественные выводы о влиянии ветра и при переменной скорости полета.

* В уравнениях (12.21) и (12.22) знак для $\frac{dz_g}{dt}$ сохранен таким, каким он должен быть, исходя из кинематических соотношений задачи; изменение этого знака ниже будет оговорено.

Рассмотрим три принципиально различных задачи. В первой задаче возьмем неуправляемый снаряд, обладающий статической устойчивостью. Пусть этот снаряд движется прямолинейно с ускорением $\overline{j}$ (фиг. 12.11, *а*). Ускорение $\overline{j}$ обусловлено превышением



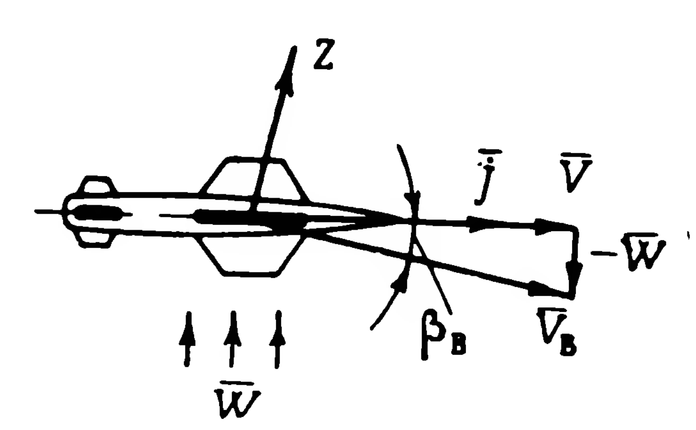

Фиг. 12.11. Схема действия бокового ветра на устойчивый неуправляемый снаряд.

силы тяги над лобовым сопротивлением и направлено по оси снаряда. В некоторый момент времени, когда скорость снаряда равна $\overline{V}_0$, он попадает в перпендикулярный к направлению его полета поток воздуха, имеющий скорость $\overline{W}$. Так как снаряд устойчив, то после окончания переходного процесса, вызванного боковым ветром, ось снаряда совпадет с направлением вектора воздушной скорости $\overline{V}_в$, определяемого соотношением (12.1). Если пренебречь для упрощения временем этого переходного процесса, то сразу же после попадания снаряда в поток он вследствие своей устойчивости займет новое положение, показанное на фиг. 12.11, *б*.

В действительности снаряд повернется на угол, несколько меньший $\beta_в$, и появится боковая сила, под действием которой вектор путевой скорости начнет поворачиваться по направлению ветра до тех пор, пока скорость сноса снаряда не станет равна скорости ветра. По окончании этого поворота продольная ось снаряда займет в пространстве положение, показанное на фиг. 12.11, *а*. Поворот вектора путевой скорости происходит очень медленно, он может и не закончиться за время полета снаряда до цели. Пока ось снаряда отклонена от своего исходного направления, на снаряд действует составляющая ускорения $\overline{j}$, перпендикулярная этому направлению. Под действием этой составляющей снаряд будет отклоняться от начальной траектории против направления ветра. Если время полета снаряда до цели меньше или близко к времени поворота вектора путевой скорости, то его траектория при движении со значительным ускорением может отклониться от первоначального направления против ветра, несмотря на снос. Снаряды, движущиеся с постоянной скоростью или с замедлением, под действием бокового ветра всегда отклоняются от начальной траектории по направлению ветра.

Во второй задаче рассмотрим снаряд, система управления которого идеально выдерживает заданное направление его продоль-

ной оси в пространстве. Положение такого снаряда после входа в боковой поток воздуха изображено на фиг. 12.12. Между продольной осью снаряда и вектором воздушной скорости $V_в$ возник угол скольжения $\beta_в$, обусловленный боковым ветром. За счет этого угла скольжения появляется боковая сила $Z$, под действием которой вектор путевой скорости снаряда отклоняется от первоначального направления в ту сторону, куда дует ветер. Указанное направление сноса будет иметь место при любом законе изменения скорости полета снаряда. Действие боковой силы и, следовательно, поворот вектора путевой скорости снаряда прекратится, когда скорость сноса станет равна скорости ветра.




Фиг. 12.12. Схема действия бокового ветра на снаряд, продольная ось которого идеально стабилизирована в пространстве.

Третья задача относится к случаю, когда система управления снаряда стремится удержать центр тяжести снаряда на определенной заданной траектории. Рассмотрение подобных систем проведено в гл. XI. В этом случае ветер будет играть роль возмущающей силы и вызовет статическую ошибку в положении центра тяжести на траектории, если не приняты специальные меры для устранения этой ошибки.

## 2. Движение снарядов с постоянной скоростью полета

Поскольку движение снарядов с постоянной скоростью полета описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, имеется возможность провести анализ этого движения в неспокойной атмосфере в общем виде. Приведенные в § 12.3 уравнения движения снаряда, будучи объединенными с уравнениями автопилота, позволяют исследовать, как изменяется любой из параметров движения снаряда при полете в неспокойной атмосфере. Ниже приводится несколько примеров таких исследований.

Рассмотрим боковое движение крестокрылого снаряда с автопилотом с жесткой обратной связью, управляющим углом рыскания снаряда. Объединяя первые два уравнения (12.22) с уравнениями автопилота (10.49), получим систему

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\beta}{dt}+k_{\beta}\beta-\frac{d\psi}{dt}=-\frac{1}{V_e}\frac{dw_z}{dt};\\
&\frac{d^2\psi}{dt^2}+n_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt}+n_{\dot\beta}\frac{d\beta}{dt}+n_{\beta}\beta=n_{\delta_н}\delta_н;\\
&\delta_н=-i_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt}+i_{\psi}(\psi_з-\psi).
\end{aligned}\right\}\qquad(12.23)$$

На основании этой системы уравнений найдем передаточные функции для всех угловых параметров бокового движения при воздействии бокового ветра $w_z$

$$W_{\psi/w_z}(p) = \frac{(n_\beta^\cdot p + n_\beta)\, p}{V_e A(p)}; \tag{12.24}$$

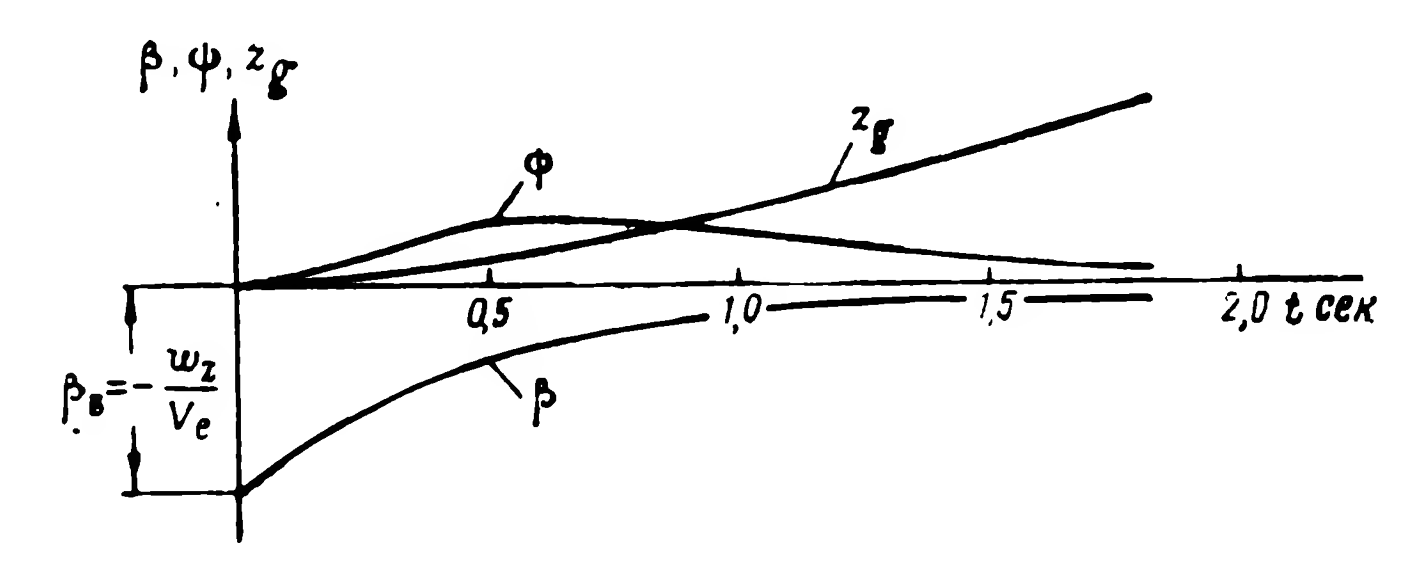
$$W_{\beta/w_z}(p) = -\frac{\left[p^2 + \left(n_\psi^\cdot + i_\psi^\cdot n_{\delta_н}\right) p + i_\psi n_{\delta_н}\right] p}{V_e A(p)}; \tag{12.25}$$

$$W_{\theta_б/w_z}(p) = \frac{\left[p^2 + (n_\beta^\cdot + n_\psi^\cdot + i_\psi^\cdot n_{\delta_н}) p + n_\beta + i_\psi n_{\delta_н}\right] p}{V_e A(p)}; \tag{12.26}$$

В передаточных функциях (12.24)—(12.26) знаменатель $A(p)$ имеет следующий вид:

$$A(p) = p^3 + (a_1 + i_\psi^\cdot b_1) p^2 + (a_2 + i_\psi^\cdot b_2 + i_\psi b_1) p + i_\psi b_2,$$

где коэффициенты $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ определяются формулами (10.48).




Фиг. 12.13. Графики изменения бокового отклонения углов скольжения и рыскания при попадании крестокрылого снаряда в боковой поток воздуха.

Эти передаточные функции позволяют проанализировать поведение снаряда с автопилотом, управляющим углом рыскания, при попадании в боковой поток воздуха, имеющий скорость $w_z$ (например, в струйное течение). На фиг. 12.13 показан характер изменения параметров β, ψ и $z_g$ при попадании снаряда в боковой поток постоянной скорости ($w_z = \text{const}$). Как следует из графиков на этой фигуре, угол скольжения β возрастает скачком до величины $-w_z/V_e$, а затем спадает до нуля. К нулю стремятся также отклонения от заданных значений углов ψ и $\theta_б$ [см. формулы (12.24) и 12.26)]. После окончания переходного процесса лишь угол поворота траектории $\theta_{б_z}$ оказывается отличным от нуля и равным $-w_z/V_e$. В результате, как следует из третьего уравнения си-

стемы (12.22), снаряд будет сносить в направлении ветра со скоростью, равной скорости ветра

$$\frac{dz_g}{dt} = w_z. \tag{12.27}$$

Рассмотрим, как постоянный ветер действует на снаряд, центр тяжести которого стабилизирован системой управления на заданной траектории.

Если взять упрощенные уравнения крестокрылого снаряда (11.1) и учесть у них постоянный боковой ветер, то окажется, что такой ветер не вызывает возмущения в движении центра тяжести снаряда. Такой результат объясняется существом сделанных при выводе уравнений (11.1) допущений. Так как движение снаряда относительно центра тяжести принято безынерционным, то при попадании в боковой ветер постоянной силы снаряд мгновенно разворачивается на угол скольжения, обусловленный ветром, и продолжает движение по заданной траектории. Таким образом, допущение, положенное в основу при выводе уравнений (11.1), оказывается непригодным для анализа поведения снаряда при действии бокового ветра, так как в этом случае получается качественно неверный результат.

Если использовать второй метод упрощения задачи о движении центра тяжести снаряда, при котором поворот снаряда осуществляется безынерционно, но через автопилот, управляющий углом рыскания [см. формулы (11.7) и (11.8)], то результат получается уже иной. В этом случае движение снаряда с автопилотом описывается системой уравнений *

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\beta}{dt} + k_{\beta}\beta - \frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{V_e}\frac{dw_z}{dt};\\ &\frac{dz_g}{dt} = V_e(\psi - \beta) - w_z;\\ &\psi = \psi_з;\\ &\psi_з = i_z(z_з - z_g). \end{aligned}\right\} \tag{12.28}$$

Этим уравнениям соответствует структурная схема, приведенная на фиг. 12.14. Особенностью этой схемы является то обстоятельство, что воздействие ветра на снаряд вводится в двух точках.

Исключая из системы уравнений (12.28) все переменные, кроме $z_g$, получим уравнение

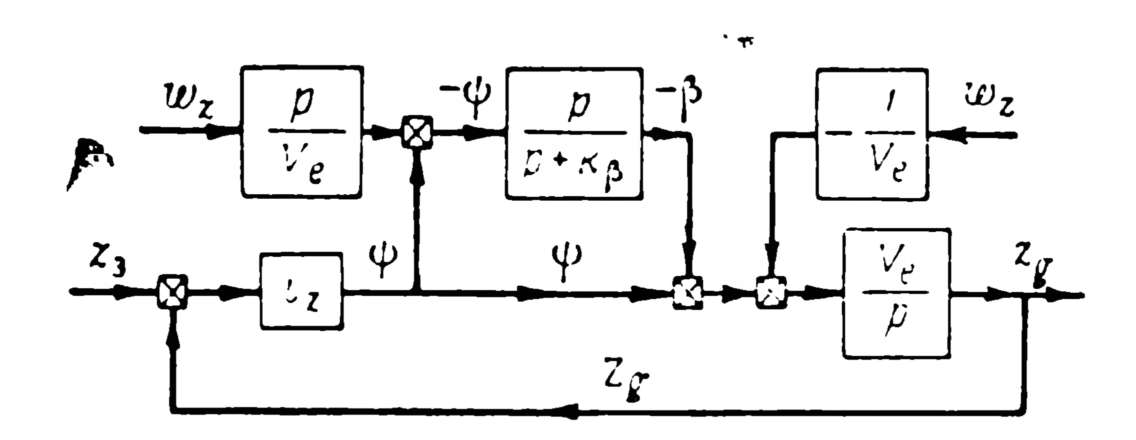
$$\frac{d^2z_g}{dt^2} + k_{\beta}\frac{dz_g}{dt} + i_z k_{\beta} V_e z_g = i_z k_{\beta} V_e z_з + k_{\beta} w_z. \tag{12.29}$$

* По аналогии с гл. XI в уравнениях (12.28) производная $z_g$ взята с обратным знаком.

Отсюда установившееся отклонение снаряда от заданной траектории, вызванное боковым ветром, равно

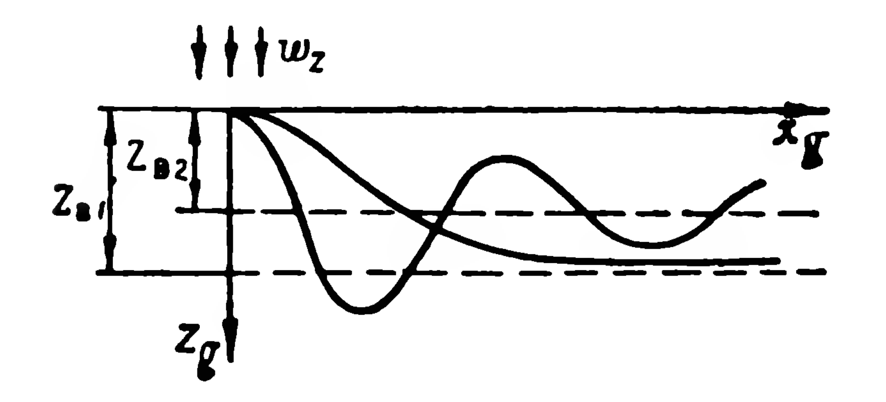
$$z_{\text{в}} = z_{\text{з}} - z_g = \frac{w_z}{i_z V_e}. \tag{12.30}$$

Характер траектории центра тяжести снаряда при попадании в боковой ветер может быть самым различным. Он определяется




Фиг. 12.14. Структурная схема системы управления центром тяжести крестокрылого снаряда, соответствующая уравнениям (12.28).

корнями характеристического уравнения дифференциального уравнения (12.29). Так как коэффициент демпфирования в уравнении (12.29) не зависит от параметров системы управления, то попытка уменьшения отклонения $z_{\text{в}}$ за счет увеличения $i_z$ приведет к умень-




Фиг. 12.15. Траектория центра тяжести, определяемая уравнениями (12.28) и законом управления (12.31).

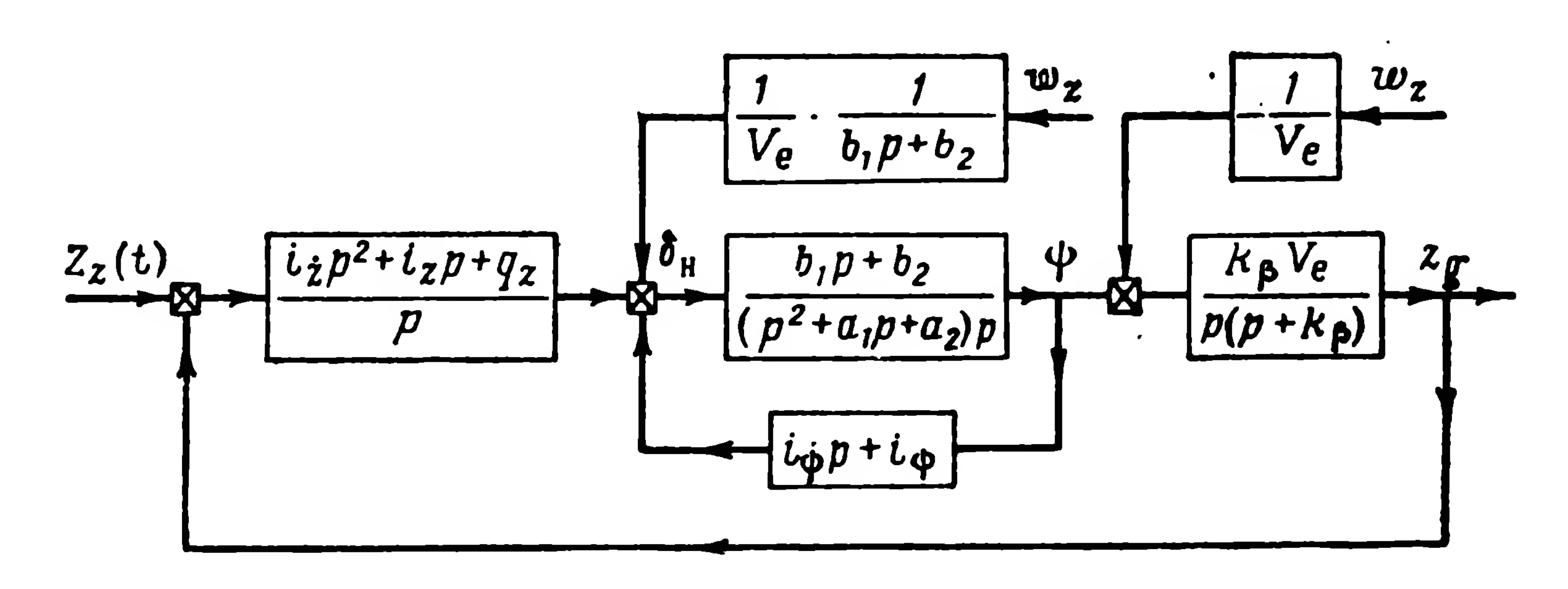
шению относительного затухания в системе и, следовательно, к колебательному движению центра тяжести снаряда. Это обстоятельство иллюстрируется фиг. 12.15, где приведены траектории снаряда с разными значениями передаточного числа $i_z$, попавшего в точке $x_g = 0$ в боковой ветер.

Рассмотрим, наконец, без упрощений задачу о входе крестокрылого снаряда с системой управления движением центра тяжести в боковой поток воздуха, имеющий скорость $w_z$. Для этого, предварительно изменив знак перед $dz_g/dt$, объединим систему уравне-

ний (12.22) с уравнением автопилота, имеющего достаточно общий закон управления *:

$$\delta_н = i_{\dot z}\left(\frac{dz_з}{dt} - \frac{dz_g}{dt}\right) + i_z (z_з - z_g) + q_z \int_0^t (z_з - z_g)\,dt -$$
$$- i_{\dot\psi}\frac{d\psi}{dt} - i_\psi \psi. \qquad (12.31)$$

На фиг. 12.16 представлена структурная схема, соответствующая рассматриваемой системе управления центром тяжести. Пере-




Фиг. 12.16. Структурная схема системы управления центром тяжести снаряда, соответствующая уравнениям (12.22) и (12.31).

даточная функция этой системы для бокового отклонения при воздействии бокового ветра, полученная на основании уравнений (12.22) и (12.31), имеет вид

$$W_{z_g/w_z}(p) = -\frac{k_\beta\,[p^2 + (n_{\dot\psi} + i_{\dot\psi}\,n_\delta)\,p + i_\psi n_\delta]\,p}{A(p)}, \qquad (12.32)$$

где $A(p)$ — полный полином пятой степени, идентичный характеристическому полиному уравнения (11.15).

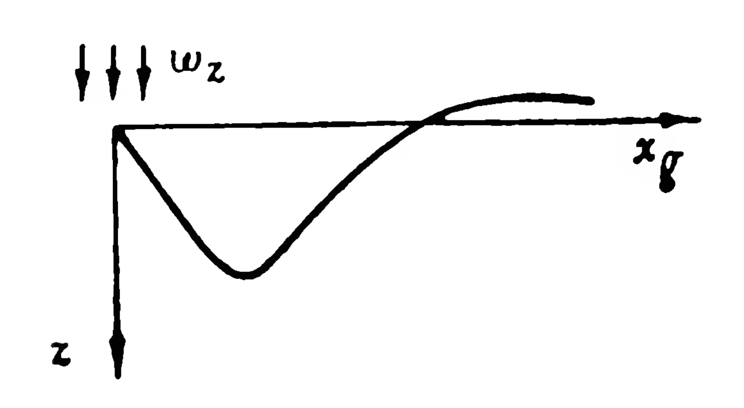
На основании структуры передаточной функции (12.32) можно сделать следующие выводы о движении центра тяжести крестокрылого снаряда при входе в поперечный поток воздуха.

После затухания переходного процесса центр тяжести будет двигаться по заданной траектории, т. е. система является астатичной к боковому ветру постоянной скорости. Если выбрать параметры системы управления в соответствии с рекомендациями, данными при анализе уравнения (11.15), то переходный процесс,

* Автопилот с таким законом управления уже использовался в системе уравнений (11.14).

вызванный входом в поперечный поток воздуха, будет иметь оптимальный характер. На фиг. 12.17 показана траектория центра тяжести снаряда с автопилотом, имеющим закон управления (12.31), при входе в поперечный поток воздуха.

Поведение плоскокрылого снаряда при входе в боковой поток воздуха постоянной скорости отличается от поведения крестокрылого снаряда, рассмотренного в этом параграфе, в принципе только тем, что все боковые движения сопровождаются изменением угла крена. Используя уравнения (12.21), описывающие боковое движение плоскокрылого снаряда с учетом бокового ветра, а также уравнения автопилотов с различными законами управления, приведенные в § 11.3, можно получить общие дифференциальные уравнения или передаточные функции для бокового отклонения $z_g$ при действии бокового ветра. По этим данным можно представить полную характеристику поведения снаряда с той или иной системой управления. В качестве примера рассмотрим упрощенные уравнения бокового движения плоскокрылого снаряда (11.27), но записанные с учетом бокового ветра:



Фиг. 12.17. Траектория центра тяжести снаряда при использовании закона управления (12.31).

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi}{dt} - k_\gamma \gamma = 0; \\ &\frac{dz_g}{dt} = V_e \psi - w_z. \end{aligned}\right\}$$

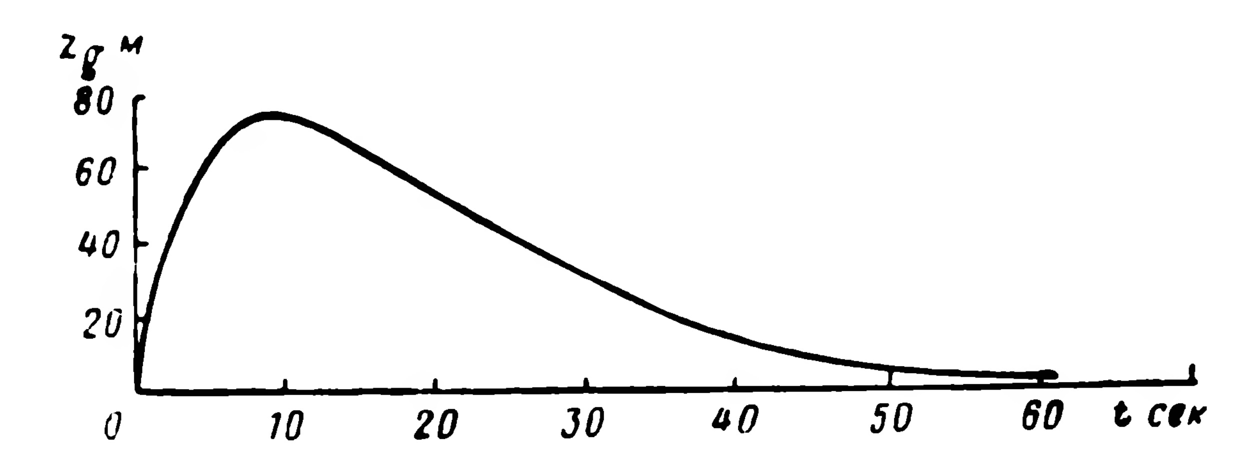
Объединяя эти уравнения с уравнением автопилота (11.28), получим передаточную функцию для бокового отклонения под действием бокового ветра

$$W_{z_g/w_z}(p) = -\frac{p}{A(p)}, \tag{12.33}$$

где $A(p)$ — полный полином второго порядка, идентичный характеристическому полиному дифференциального уравнения (11.30). Траектория движения центра тяжести снаряда с передаточной функцией (12.33) при попадании в боковой поток постоянной скорости $w_z$ представлена на фиг. 12.18.

Продольное движение снаряда при попадании в вертикальный (восходящий или нисходящий) поток ничем не отличается от рассмотренного выше бокового движения крестокрылого снаряда в боковом потоке. На основании системы (12.17) и уравнения соот-

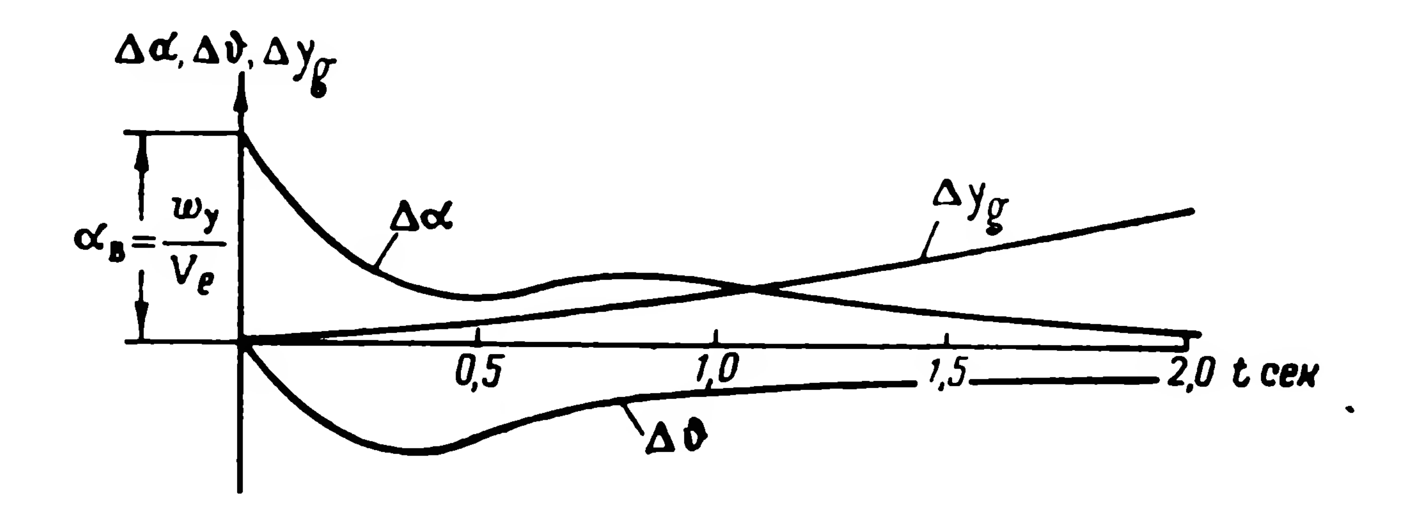
ветствующего автопилота нетрудно найти передаточные функции для любого из параметров продольного движения. Заметим, что при исследовании влияния ветра нет необходимости привлекать уравнения продольного движения (12.17). В подавляющем большинстве случаев можно использовать упрощенные уравнения короткопериодического движения (10.66) или (10.69), а также уп-




Фиг. 12.18. Траектория центра тяжести снаряда, имеющего передаточную функцию (12.33).

рощенные уравнения, приведенные в § 11.4. Естественно, что во все эти уравнения должны быть добавлены члены, учитывающие влияние ветра на полет снаряда.

В качестве примера продольного движения снаряда в неспокойной атмосфере на фиг. 12.19 приведены графики изменения




Фиг. 12.19. Графики изменения высоты и углов атаки и тангажа при попадании снаряда в вертикальный поток воздуха.

углов тангажа ($\Delta\vartheta$), атаки ($\Delta\alpha$) и высоты полета ($\Delta y_g$), вызванного входом снаряда в вертикальный поток постоянной скорости. Снаряд снабжен автопилотом, управляющим углом тангажа. Эти графики по своему характеру подобны графикам на фиг. 12.13, иллюстрирующим боковое движение крестокрылого снаряда с автопилотом, управляющим углом рыскания, вызванное боковым потоком воздуха. Все результаты, полученные выше для крестокрылого снаряда с автопилотом, управляющим положением центра тяжести снаряда относительно заданной траектории, остаются спра-

ведливыми и для продольного движения снаряда, обусловленного вертикальным ветром.

Новым в продольном движении по сравнению с боковым является возможность учесть влияние составляющей ветра, направленной вдоль траектории снаряда. Этот вопрос необходимо исследовать более подробно. Рассмотрим поведение снаряда, который попадает в попутный или встречный поток воздуха, имеющий постоянную скорость $w_x = \text{const}$. Для упрощения этой задачи будем пренебрегать временем переходных процессов короткопериодического движения, что эквивалентно допущению о мгновенной балансировке снаряда. Полагаем, что у снаряда нет системы регулирования скорости. Наконец, рассмотрим уравнения снаряда без системы управления, так как ниже будет показано, что система управления не повлияет на те результаты, которые будут получены после проведенного анализа. На основании упомянутых допущений из системы (12.17) найдем следующие уравнения для анализа поведения снаряда после входа в попутный или встречный поток воздуха:

$$\left.\begin{aligned} &a_\theta \Delta\theta + a_\alpha \Delta\alpha + \frac{d\Delta V}{dt} + a_V \Delta V = a_V w_x; \\ &\frac{d\Delta\theta}{dt} - b_\theta \Delta\theta - b_\alpha \Delta\alpha - b_V \Delta V = - b_V w_x; \\ &c_\alpha \Delta\alpha + c_V \Delta V = c_V w_x. \end{aligned}\right\} \quad (12.34)$$

Система уравнений (12.34) позволяет получить передаточные функции для параметров продольного движения при воздействии попутного или встречного ветра.

Передаточная функция для изменения путевой скорости

$$W_{\Delta V/w_x}(p) = \frac{b_1 p + a_2}{c_\alpha p^2 + a_1 p + a_2}, \quad (12.35)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = a_V c_\alpha - b_\theta c_\alpha - a_\alpha c_V; \\ &a_2 = c_\alpha c_2 - c_4 c_V; \\ &b_1 = a_V c_\alpha - a_\alpha c_V. \end{aligned}\right\} \quad (12.36)$$

Значение коэффициентов $c_2$ и $c_4$ определяется формулами (8.30).

На основании передаточной функции (12.35) можно сделать вывод, что в установившемся режиме ($p=0$) $W_{\Delta V/w_x}(p) = 1$ и, следовательно, $\Delta V = w_x$. Таким образом, путевая скорость снаряда увеличится точно на величину скорости попутного или уменьшится на величину скорости встречного ветра. Воздушная скорость снаряда сохранит свое прежнее значение.

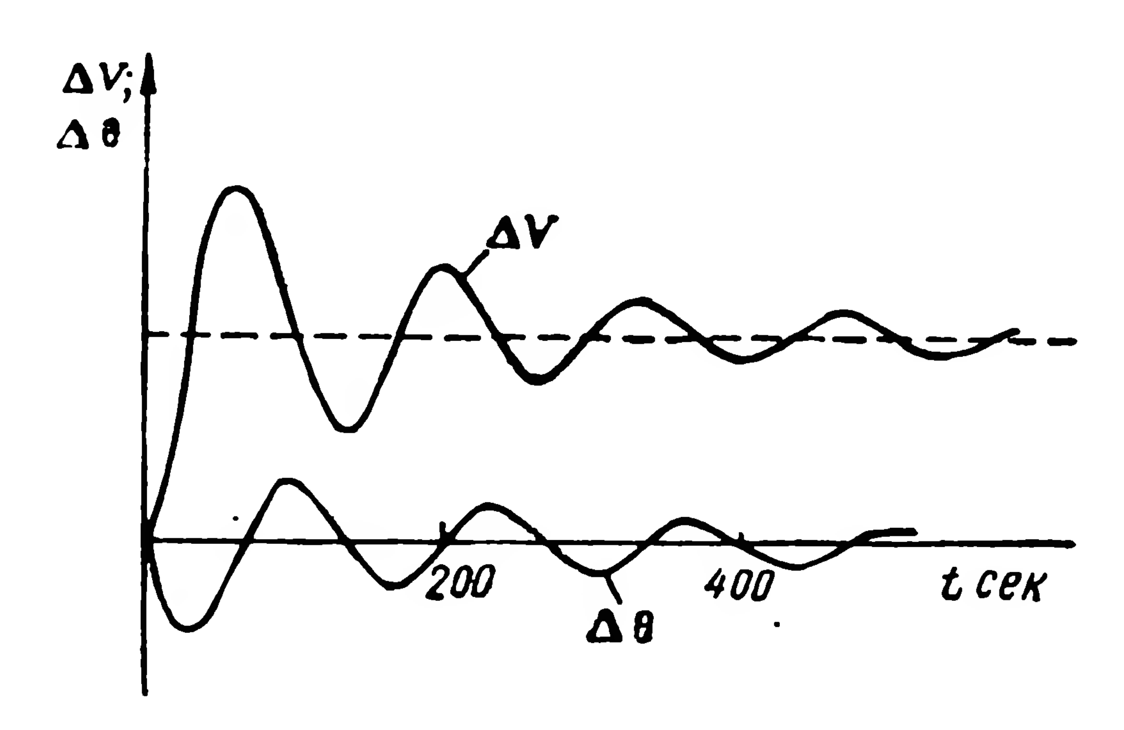
Для угла наклона траектории получим передаточную функцию

$$W_{\Delta\theta/w_x}(p) = \frac{p\,(b_\alpha c_V - b_V c_\alpha)}{c_\alpha p^2 + a_1 p + a_2}. \qquad (12.37)$$

Наконец, передаточная функция для угла атаки имеет вид

$$W_{\Delta\alpha/w_x}(p) = \frac{p\,(p - b_\theta) c_V}{c_\alpha p^2 + a_1 p + a_2}. \qquad (12.38)$$

Наличие множителя $p$ в числителе передаточных функций (12.37) и (12.38) показывает, что в установившемся режиме ($p=0$) изменения углов наклона траектории и атаки будут равны нулю.




Фиг. 12.20. Графики изменения путевой скорости и угла наклона траектории при входе снаряда в попутный поток постоянной скорости.

Именно эти результаты и позволили провести анализ без учета системы управления, так как учет влияния этой системы лишь сильно усложнил бы систему уравнений (12.34), но не дал бы ничего нового для характеристики установившегося режима полета в попутном или встречном потоке. На характер переходных процессов система управления несомненно оказала бы значительное влияние.

На фиг. 12.20 показан характер изменения путевой скорости и угла наклона траектории, вызванного входом снаряда в попутный поток воздуха постоянной скорости $w_x$. Слабое затухание колебаний объясняется тем, что рассматривался снаряд без системы управления, а в этом случае длиннопериодическое движение обычно имеет характер медленно затухающих колебаний с большим периодом.

## § 12.5. ВЛИЯНИЕ СЛУЧАЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ВЕТРА НА ДВИЖЕНИЕ СНАРЯДА

Влияние случайной составляющей ветра рассмотрим лишь для снарядов, имеющих постоянную скорость полета, так как при полете снарядов с переменной скоростью учет влияния случайной составляющей ветра становится слишком сложным. Наиболее простая возможность учета влияния случайной составляющей ветра в последнем случае состоит в использовании методов фиксированных или квазификсированных коэффициентов, в результате чего задача сводится к анализу обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, т. е. к математическому аппарату, применяемому для описания движения снарядов, имеющих постоянную скорость.

В § 12.3 выведены уравнения (12.17) для продольного и (12.21) и (12.22) для бокового движений снаряда с учетом ветра. Эти уравнения справедливы как для постоянной, так и для случайной составляющей ветра. Однако при анализе влияния случайной составляющей используется специальный математический аппарат, поэтому данный вопрос требует дополнительного анализа, которому и посвящен настоящий параграф.

Практический интерес представляет определение влияния составляющих случайного ветра, нормальных к плоскости, в которой расположены крылья снаряда. Для плоскокрылых снарядов такой составляющей будет $w_{cy}$, а для крестокрылых — $w_{cy}$ и $w_{cz}$. Эти составляющие вызывают изменение угла атаки или скольжения (для крестокрылого снаряда) и тем самым изменяют основную управляющую силу — подъемную или боковую. Продольная составляющая случайного ветра $w_{cx}$ вследствие большой инерции снарядов не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на их полет. Поперечная составляющая $w_{cz}$ также не оказывает существенного влияния на плоскокрылые снаряды, так как боковая сила, вызванная наличием угла скольжения, обусловленного ветром $w_{cz}$, для таких снарядов невелика.

Таким образом, для обоих типов снарядов представляет интерес выявить влияние случайной составляющей ветра $w_{cy}$, а для крестокрылых — и составляющей $w_{cz}$. На основании этих соображений рассмотрим продольное движение снаряда и влияние на него нормальной составляющей вектора случайного ветра $w_{cy}$.

После обычного упрощения из уравнений (12.17) получим систему уравнений, описывающих продольное движение снаряда под действием случайной составляющей ветра $w_{cy}$*:

---

* Приводимая ниже система уравнений и все последующие формулы справедливы как для случайной, так и для постоянной составляющей нормального ветра, поэтому в этих формулах индекс «с» у составляющей ветра опущен.

$$\left.\begin{aligned}
&a_\theta \Delta\theta + a_\alpha \Delta\alpha + \frac{d\Delta V}{dt} + a_V \Delta V = 0;\\
&\frac{d\Delta\theta}{dt} - b_\theta \Delta\theta - b_\alpha \Delta\alpha - b_V \Delta V = -\frac{1}{V_e}\frac{dw_y}{dt};\\
&\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + c_{\dot\vartheta}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\dot\alpha}\frac{d\Delta\alpha}{dt} + c_\alpha \Delta\alpha + c_V \Delta V = c_\delta \Delta\delta_{\text{в}};\\
&\Delta\vartheta = \Delta\theta + \Delta\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.39)$$

При изучении реакции снаряда на случайную составляющую ветра, которая характеризует последовательность случайных порывов произвольной формы, влияние изменения путевой скорости очень невелико. Поэтому, не внося существенной ошибки, можно пренебречь этим изменением, положив $\Delta V = 0$. В результате такого допущения первое уравнение системы (12.39) выпадает из рассмотрения и эта система приобретает вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Delta\theta}{dt} - b_\theta \Delta\theta - b_\alpha \Delta\alpha = -\frac{1}{V_e}\frac{dw_y}{dt};\\
&\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + c_{\dot\vartheta}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\dot\alpha}\frac{d\Delta\alpha}{dt} + c_\alpha \Delta\alpha = c_\delta \Delta\delta_{\text{в}};\\
&\Delta\vartheta = \Delta\theta + \Delta\alpha.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.40)$$

На основании уравнений (12.40) можно получить передаточные функции для любых параметров продольного движения снаряда без системы управления при воздействии ветра, нормального к направлению полета. Например, передаточная функция для угла тангажа имеет вид

$$W_{\Delta\vartheta/w_y}(p) = -\frac{(c_{\dot\alpha}\, p + c_\alpha)\, p}{V_e\,(p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3)}, \qquad (12.41)$$

где значение коэффициентов $a_1$, $a_2$, $a_3$ определяется формулами (10.71).

Передаточная функция для угла наклона ветра воздушной скорости равна

$$W_{\Delta\theta/w_y}(p) = -\frac{[p^2 + (c_{\dot\alpha} + c_{\dot\vartheta}) \cdot z_\alpha]\, p}{V_e\,(p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3)}. \qquad (12.42)$$

Чтобы определить величину нормальной перегрузки, которая возникает при полете снаряда в турбулентной атмосфере, необходимо установить связь между перегрузкой и параметрами продольного движения, входящими в систему уравнений (12.17). Ускорение, действующее в вертикальной плоскости, нормально к на-

правлению полета и при наличии ветра может быть определено формулой

$$\frac{d^2y_н}{dt^2}=V_e\frac{d\Delta\theta_2}{dt}=V_e\frac{d\Delta\theta}{dt}+\frac{dw_y}{dt}. \quad (12.43)$$

Отсюда нормальная перегрузка будет

$$n_y=\frac{1}{g}\frac{d^2y_н}{dt^2}=\frac{V_e}{g}\frac{d\Delta\theta}{dt}+\frac{1}{g}\frac{dw_y}{dt}. \quad (12.44)$$

Объединяя уравнение (12.44) с системой (12.40), получим передаточную функцию для нормальной перегрузки при воздействии нормальной составляющей ветра (снаряд без системы управления)

$$W_{n_y/w_y}(p)=\frac{1}{g}\frac{[(b_\alpha-b_\vartheta)p^2+(a_2-c_\alpha)p+a_3]\,p}{p^3+a_1p^2+a_2p+a_3}. \quad (12.45)$$

Заметим, что применение передаточных функций (12.41), (12.42) и (12.45) для изучения реакции снаряда на постоянную составляющую нормального ветра ограничено вследствие допущения о постоянстве путевой скорости ($\Delta V=0$), принятом при их выводе. При исследовании движения снаряда под действием постоянного ветра следует найти соответствующие передаточные функции на основе полной системы уравнений продольного движения (12.39). Передаточные функции (12.41), (12.42) и (12.45) могут быть использованы лишь для описания начального этапа движения снаряда под действием постоянного ветра, в течение которого практически заканчивается короткопериодическое движение.

Найдем передаточные функции для параметров продольного движения при воздействии нормального ветра в случае, когда снаряд имеет автопилот, управляемый углом тангажа. Объединяя уравнение автопилота

$$\Delta\delta_в=-i_{\dot\vartheta}\frac{d\Delta\vartheta}{dt}+i_\vartheta(\Delta\vartheta_з-\Delta\vartheta). \quad (12.46)$$

с системой уравнений (12.40), получим передаточную функцию для угла тангажа при воздействии нормального ветра

$$W_{\Delta\vartheta/w_y}(p)=-\frac{(c_{\dot\alpha}\,p+c_\alpha)\,p}{V_e\left[p^3+(a_1+i_{\dot\vartheta}\,b_1)\,p^2+(a_2+i_\vartheta b_1+i_{\dot\vartheta}\,b_2)\,p+a_3+i_\vartheta b_2\right]}, \quad (12.47)$$

где коэффициенты $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$ и $b_2$ определяются формулами (10.71).

Передаточная функция для перегрузки имеет вид

$$W_{n_y/w_y}(p) = \frac{1}{g}\frac{\left[(b_\alpha - b_\theta)p^2 + (a_2 - c_\alpha + i_\vartheta b_2)p + a_3 + i_\vartheta b_2\right]p}{p^3 + (a_1 + i_\vartheta b_1)p^2 + (a_2 + i_\vartheta b_1 + i_\vartheta b_2)p + a_3 + i_\vartheta b_2}. \qquad (12.48)$$

Учитывая, что перегрузка и линейное отклонение, нормальное к направлению полета, связаны между собой соотношением

$$y_{\text{н}} = g\int\limits_0^t\int\limits_0^t n_y dt dt, \qquad (12.49)$$

из уравнения (12.44) на основании (12.45) и (12.48) найдем передаточные функции для линейных отклонений снаряда от траектории невозмущенного полета:

снаряд без системы управления

$$W_{y_{\text{н}}/w_y}(p) = \frac{(b_\alpha - b_\theta)p^2 + (a_2 - c_\alpha)p + a_3}{p(p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3)}; \qquad (12.50)$$

снаряд с автопилотом, управляющим углом тангажа

$$W_{y_{\text{н}}/w_y}(p) = \frac{(b_\alpha - b_\theta)p^2 + (a_2 - c_\alpha + i_\vartheta b_2)p + a_3 + i_\vartheta b_2}{p\left[p^3 + (a_1 + i_\vartheta b_1)p^2 + (a_2 + i_\vartheta b_1 + i_\vartheta b_2)p + a_3 + i_\vartheta b_2\right]}. \qquad (12.51)$$

На основании структуры передаточных функций (12.50) и (12.51) можно утверждать, что высота полета снаряда без системы управления и с автопилотом, управляющим углом тангажа, будет непрерывно изменяться под действием нормального ветра постоянной скорости.

Найдем, наконец, передаточную функцию для линейного отклонения от заданной траектории под действием нормального ветра для снаряда, имеющего систему управления центром тяжести. В этой задаче воспользуемся полными уравнениями продольного движения снаряда (11.42), в которых учтено и изменение путевой скорости. В правой части второго и четвертого уравнений этой системы необходимо ввести члены, учитывающие нормальную составляющую ветра. Кроме того, к формулам (11.42) необходимо добавить уравнение автопилота (11.46). Из этих уравнений получена передаточная функция системы управления центром тяжести для отклонения от траектории $y_{\text{н}}$ при воздействии нормального ветра:

$$W_{y_{\text{н}}/w_y}(p) = \frac{(b_1p^3 + b_2p^2 + b_3p + b_4)p}{p^6 + a_1p^5 + a_2p^4 + a_3p^3 + a_4p^2 + a_5p + a_6}, \qquad (12.52)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{где}\quad b_1 = b_\alpha - b_\theta;\\
&b_2 = c_1 - b_\theta c_{\dot\alpha} + c_{\dot\vartheta}(b_\alpha - b_\theta) + b_\alpha c_\delta (i_{\dot\vartheta} + i_\vartheta) -\\
&- i_{\dot\vartheta} b_\theta c_\delta,\\
&b_3 = c_1 (c_{\dot\vartheta} + i_{\dot\vartheta} c_\delta) - b_\theta c_\alpha + i_\vartheta c_\delta (b_\alpha - b_\theta) +\\
&\quad + c_2 c_{\dot\alpha} + c_3 i_{\dot\theta} c_\delta + i_\theta b_\alpha c_\delta,\\
&b_4 = c_1 i_\vartheta c_\delta + c_2 c_\alpha + c_3 i_\theta c_\delta - c_4 c_V.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.53)$$

Значение коэффициентов знаменателя передаточной функции (12.52) определяется формулами (11.48), а коэффициентов $c_1$, $c_2$, $c_3$ и $c_4$ — формулами (8.30).

Наличие в числителе передаточной функции (12.52) множителя $p$ указывает на то, что автопилот с интегральным управлением [см. уравнение (11.46)] обеспечивает астатизм системы к нормальному ветру. При воздействии нормального ветра постоянной скорости снаряд с таким автопилотом после окончания переходного процесса будет двигаться по заданной траектории.

Полученные выше передаточные функции для различных параметров продольного движения позволяют определить значения этих параметров по спектральной плотности нормальной к направлению полета составляющей ветра. При этом необходимо воспользоваться известным соотношением (2.39) между спектральной плотностью входной и выходной величин в линейной системе

$$S_y(\omega) = |W_y(j\omega)|^2 S_x(\omega). \qquad (12.54)$$

По спектральной плотности выходной величины можно на основании формул (12.5) и (12.7) получить корреляционную функцию и дисперсию (или среднеквадратичное значение) выходной величины.

При практическом использовании формул (12.11) и (12.12) для спектральной плотности составляющих случайного ветра необходимо в них перейти от одной независимой переменной — пространственной угловой частоты $\Omega$, к другой — временной угловой частоте $\omega$, которая используется в передаточных функциях снаряда. Связь между этими переменными определяется уравнением (12.8). Найдем связь между функциями спектральной плотности случайного ветра, выраженными через указанные угловые частоты. На основании формулы для дисперсии (12.7) получим тождество

$$\sigma_w^2 = \int_0^\infty S(\Omega)\, d\Omega = \int_0^\infty S(\omega)\, d\omega. \qquad (12.55)$$

Учитывая соотношение (12.8), из тождества (12.55) найдем

$$S(\omega) = \frac{1}{V_e} S(\Omega). \qquad (12.56)$$

Формулы (12.8) и (12.56) позволяют в выражениях (12.11) и (12.12) для спектральной плотности перейти к переменной $\omega$:

$$S_1(\omega) = \sigma_\omega^2 \frac{L}{\pi V_e} \cdot \frac{1 + 3(\omega L/V_e)^2}{[1 + (\omega L/V_e)^2]^2}, \tag{12.57}$$

$$S_2(\omega) = \sigma_\omega^2 \frac{L}{\pi V_e} \cdot \frac{2}{1 + (\omega L/V_e)^2}. \tag{12.58}$$

Подставим полученное значение спектральной плотности нормальной составляющей ветра (12.57) в основное соотношение (12.54):

$$S_y(\omega) = \sigma_\omega^2 \cdot \frac{L}{\pi V_e} \left| W_y(j\omega) \right|^2 \cdot \frac{1 + 3(\omega L/V_e)^2}{[1 + (\omega L/V_e)^2]^2}. \tag{12.59}$$

Наконец, по формуле (12.7) найдем выражение для дисперсии выходной величины при действии на снаряд нормальной составляющей случайного ветра

$$\sigma_y^2 = \sigma_\omega^2 \frac{L}{\pi V_e} \int\limits_0^\infty | W_y(j\omega) |^2 \frac{1 + 3(\omega L/V_e)^2}{[1 + (\omega L/V_e)^2]^2} d\omega. \tag{12.60}$$

В зависимости от того, какая из передаточных функций для параметров продольного движения при действии нормального ветра будет подставлена в формулу (12.60), получим дисперсию угла тангажа снаряда с автопилотом или без него, перегрузку или линейное отклонение центра тяжести от заданной траектории. Для пояснения методики решения этой задачи приведем пример.

**Пример 12.1.** Определить среднеквадратичное значение перегрузки от нормальной составляющей случайного ветра, испытываемой снарядом, летящим горизонтально на высоте:

$y_g = 5000$ *м* ($\rho_e = 0{,}736$ *кг·м*$^{-3}$) со скоростью $V_e = 500$ *м/сек*.

Параметры снаряда следующие: $m = 10\,000$ *кг*; $S = 16$ *м*$^2$;

$$b_A = 3 \text{ м};\ c_y^\alpha = 5{,}0;\ b_\alpha = 1{,}5;\ b_\theta = 0;\ c_\alpha = 6{,}1 \text{ 1/сек}^2;$$

$$c_{\dot\alpha} = 1{,}0 \text{ 1/сек};\ c_{\dot\vartheta} = 2{,}1 \text{ 1/сек};\ c_\delta = 6{,}2 \text{ 1/сек}^2;\ \mu_п = 290.$$

Масштаб турбулентности $L$ принять равным 300 *м*. Перегрузку определить для двух случаев: полет без системы управления и полет с автопилотом, управляющим углом тангажа. Передаточные числа автопилота $i_{\dot\vartheta} = 0$; $i_\vartheta = 1{,}0$.

Рассмотрим вначале первый случай. Передаточная функция для перегрузки снаряда без системы управления определяется выражением (12.45). Подставив по формулам (10.71) значения коэффициентов этой функции и учитывая, что $a_3 = 0$, получим

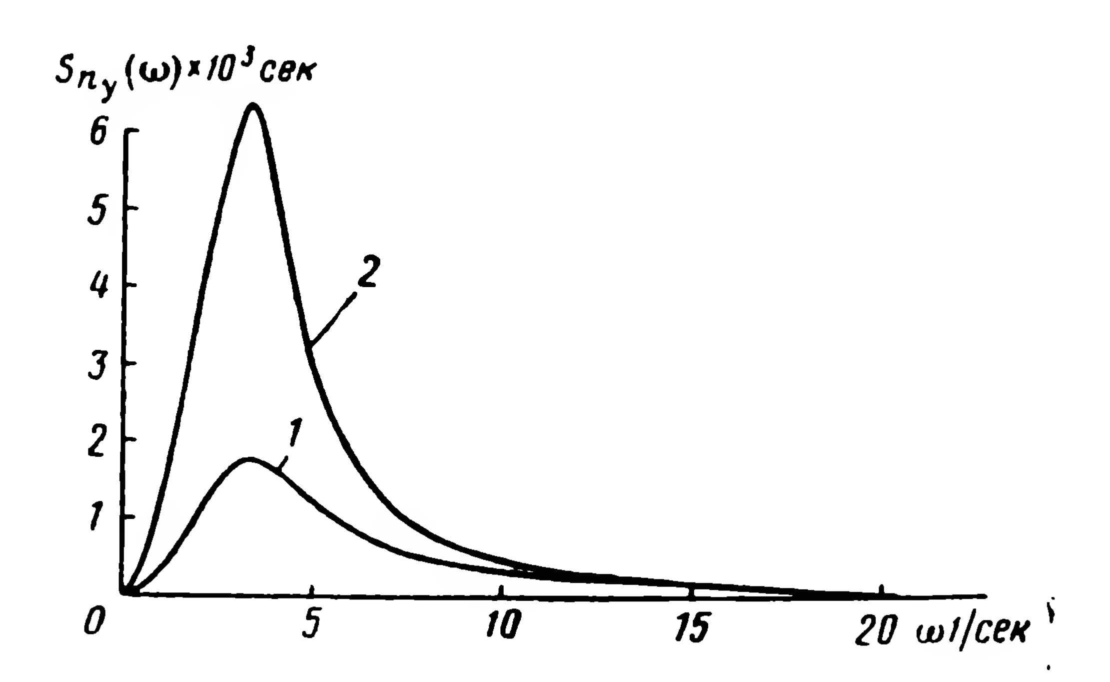
$$W_{n_y/w_y}(p) = \frac{1}{9{,}8} \cdot \frac{1{,}5p^2 + 3{,}15p}{p^2 + 4{,}6p + 9{,}25}. \tag{12.61}$$

Квадрат модуля комплексной передаточной функции на основании (12.61) равен

$$|W_{n_y/w_y}(j\omega)|^2 = \frac{1}{9,8^2}\,\frac{2,25\omega^4 + 10\omega^2}{(9,25 - \omega^2)^2 + 21,3\omega^2}\,. \qquad (12.62)$$

Спектральная плотность нормальной составляющей случайного ветра в соответствии с формулой (12.57) определяется выражением

$$S_{w_y}(\omega) = \sigma^2_{\omega_y}\,\frac{300}{\pi 500}\,\frac{1 + 1,08\omega^2}{(1 + 0,36\omega^2)^2}\,. \qquad (12.63)$$




Фиг. 12.21. Графики спектральной плотности нормальной перегрузки, вызываемой случайным ветром.

Подставляя значения квадрата модуля передаточной функции (12.62) и спектральной плотности (12.63) в формулу (12.60), найдем выражение для дисперсии нормальной перегрузки

$$\sigma^2_{n_y} = \sigma^2_{\omega_y}\cdot 1,98\cdot 10^{-3}\int\limits_0^\infty \frac{2,25\omega^4 + 10\omega^2}{(9,25 - \omega^2)^2 + 21,3\omega^2}\,\frac{1 + 1,08\omega^2}{(1 + 0,36\omega^2)^2}\,d\omega. \qquad (12.64)$$

Подынтегральная функция с учетом постоянного множителя представлена на фиг. 12.21 (кривая 1). Подсчитав численным методом значение определенного интеграла (12.64), получим следующее выражение для дисперсии нормальной перегрузки:

$$\sigma^2_{n_y} = 0,0104\sigma^2_{\omega_y}\,.$$

Наконец, извлекая корень из обеих частей этого выражения, находим среднеквадратичное значение нормальной перегрузки

$$\sigma_{n_y} = 0,102\sigma_{w_y}. \qquad (12.65)$$

Формула (12.65) показывает, что среднеквадратичное значение нормальной перегрузки снаряда без системы управления составляет 0,102 единицы $g$ на каждую единицу среднеквадратичного значения нормальной составляющей скорости ветра

При наличии автопилота, управляющего углом тангажа, передаточная функция снаряда для нормальной перегрузки определяется формулой (12.48). Подсчитав на основании формул (10.71) значения коэффициентов, получим

$$W_{n_y/w_y}(p) = \frac{1}{g} \cdot \frac{(1,5p^2 + 3,15p + 9,3)\,p}{p^3 + 4,6p^2 + 15,45p + 9,3}. \tag{12.66}$$

Опуская промежуточные операции, напишем выражение для дисперсии нормальной перегрузки снаряда с автопилотом, управляющим углом тангажа:

$$\sigma_{n_y}^2 = \sigma_{\omega_y}^2 \cdot 1,98 \cdot 10^{-3} \int\limits_0^{\infty} \frac{(9,3 - 1,5\omega^2)^2\,\omega^2 + 10\omega^4}{(9,3 - 4,6\omega^2)^2\,\omega^2 + (15,45 - \omega^2)\,\omega^2} \times$$

$$\times \frac{1 + 1,08\omega^2}{(1 + 0,36\omega^2)^2}\, d\omega. \tag{12.67}$$

Подынтегральная функция с учетом постоянного множителя представлена на фиг. 12.21 (кривая *2*). Вычислив определенный интеграл в формуле (12.67), получим дисперсию нормальной перегрузки

$$\sigma_{n_y}^2 = 0,0258\sigma_{\omega_y}^2.$$

Извлекая корень из обеих частей этого выражения, находим среднеквадратичное значение нормальной перегрузки

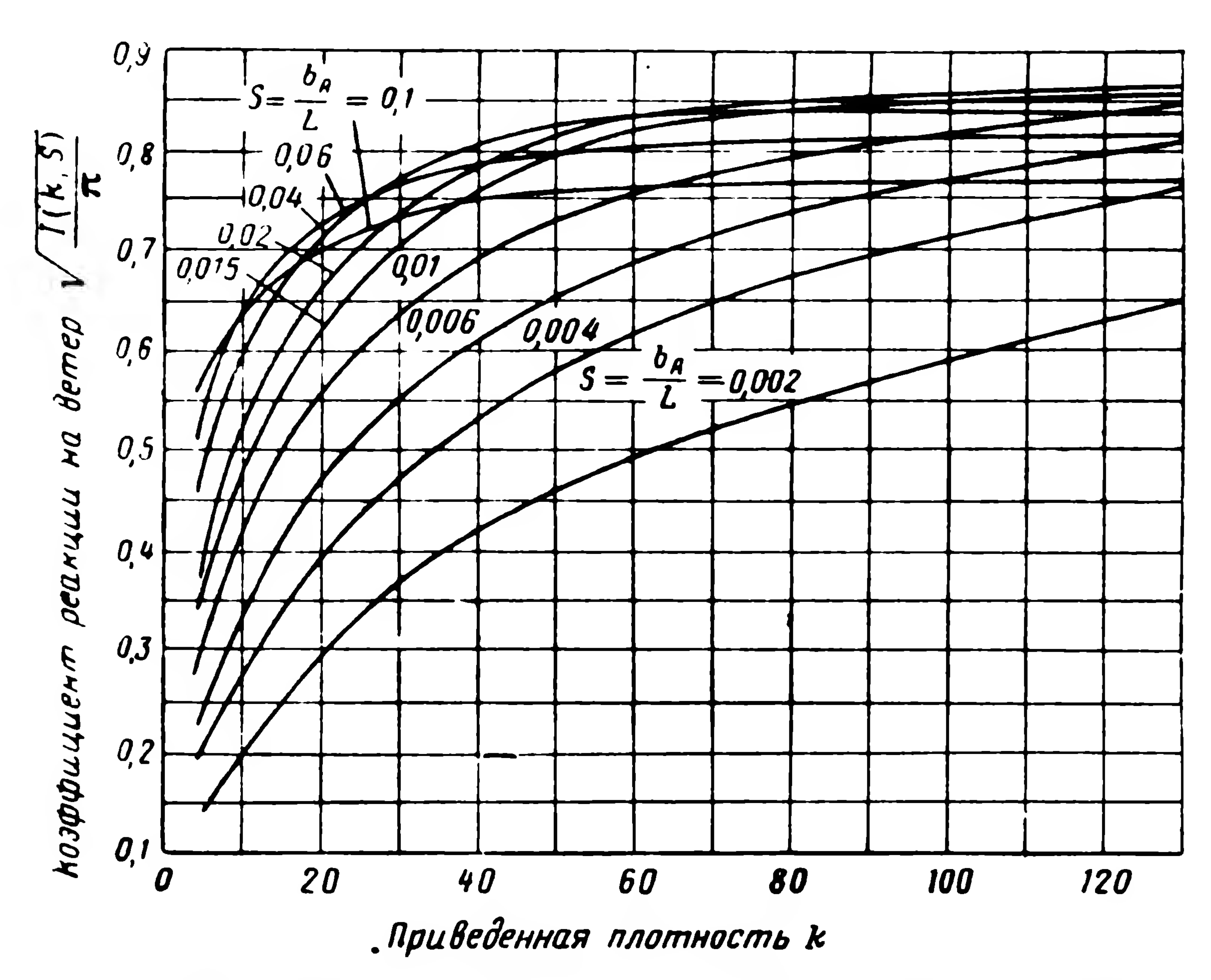
$$\sigma_{n_y} = 0,16\sigma_{w_y}. \tag{12.68}$$

Сравнивая выражения (12.65) и (12.68), видим, что в данном примере автопилот, стабилизирующий заданный угол тангажа снаряда, приводит к увеличению перегрузки, вызываемой нормальной составляющей случайного ветра. В большинстве случаев влияние автопилота бывает обратным.

По такой же методике, которая приведена в рассмотренном примере, могут быть получены среднеквадратичные значения колебаний других параметров продольного движения, обусловленных нормальной составляющей случайного ветра. Действие составляющей случайного ветра, совпадающей с направлением полета, также может быть оценено изложенным выше способом. Для этого необходимо получить передаточные функции для тех или иных параметров продольного движения и использовать выражение (12.58) для спектральной плотности случайного ветра. Однако, как уже указывалось, вследствие большой кинетической энергии снаряда действие случайного ветра на продольное движение снаряда незначительно.

Изложенная выше методика анализа действия случайной составляющей ветра, нормальной к направлению полета, на продольное движение полностью применима к боковому движению. Вследствие изотропного характера турбулентности атмосферы формула спектральной плотности (12.57), описывающая случайную состав-

ляющую $\omega_y$, должна быть использована и для описания спектральной плотности составляющей $w_z$, нормальной к направлению полета в боковом движении. Все передаточные функции для параметров бокового движения крестокрылого снаряда при воздействии ветра могут быть использованы для анализа действия случайной составляющей. Действие случайной составляющей $w_z$ на плоскокрылые снаряды, как указывалось выше, невелико.




Фиг. 12.22. Графики коэффициента реакции снаряда на ветер, нормальный к траектории снаряда.

В заключение этого параграфа приведем приближенную формулу для определения среднеквадратичного значения нормальной перегрузки по среднеквадратичному значению нормальной составляющей ветра и параметрам снаряда *:

$$\sigma_{n_y} = \sigma_{w_y} \frac{c_y^{\alpha} \rho_e S V_e}{2G} \sqrt{\frac{I(k, \lambda)}{\pi}}, \qquad (12.69)$$

где $\sqrt{\frac{I(k,\lambda)}{\pi}}$ — коэффициент реакции снаряда на нормальный ветер;

$k = \mu_п / c_y^{\alpha}$ — приведенное значение относительно плотности снаряда;

* См. сноску ** на стр. 374.

$\lambda = \frac{b_A}{L}$ — отношение средней аэродинамической хорды снаряда к масштабу турбулентности.

Зависимость коэффициента реакции на нормальный ветер от параметров $k$ и $\lambda$ определяется графиками на фиг. 12.22. При выводе формулы (12.69) были сделаны следующие допущения:

1) не учитывались колебания снаряда относительно центра тяжести, обусловленные случайным ветром;

2) крыло снаряда предполагалось жестким и имеющим бесконечный размах;

3) при учете нестационарного характера обтекания крыла за счет случайной составляющей ветра не учитывалась сжимаемость воздуха.

Кроме того, следует помнить, что формула (12.69) справедлива для снарядов, имеющих обычные аэродинамические формы, т. е. корпус с достаточно развитыми несущими поверхностями. Нельзя также с помощью выражения (12.69) учесть наличие на снаряде системы управления. Несмотря на указанные ограничения, это выражение во многих случаях может быть с успехом использовано для приближенной оценки перегрузок, испытываемых снарядом при действии нормальной составляющей случайного ветра. Приведем пример расчета перегрузки по формуле (12.69).

**Пример 12.2.** По формуле (12.69) определить среднеквадратичное значение нормальной перегрузки, испытываемой снарядом, режим полета и параметры которого приведены в примере 12.1.

Найдем в первую очередь значение коэффициента реакции на ветер. Параметры, от которых зависит этот коэффициент, имеют следующее значение: $k = \mu_п / c_y^a = 59$; $\lambda = b_A / L = 0{,}01$.

По графикам на фиг. 12.22 находим значение коэффициента реакции снаряда на ветер: $\sqrt{I(k, \lambda)/\pi} = 0{,}76$.

Подставляя это значение, а также значения всех параметров снаряда в уравнения (12.69), получим

$$\sigma_{n_y} = \sigma_{w_y} \cdot \frac{5 \cdot 0{,}736 \cdot 16 \cdot 500}{2 \cdot 10000 \cdot 9{,}81} \cdot 0{,}76 = 0{,}114 \sigma_{w_y}.$$

Сравним значение нормальной перегрузки с ее значениями, полученными более точным способом и определяемыми выражениями (12.65) и (12.68). Это сравнение показывает, что перегрузка, определяемая по приближенной формуле (12.69), больше перегрузки снаряда без системы управления и меньше перегрузки снаряда с автопилотом, стабилизирующим угол тангажа. Так как все три значения перегрузки мало отличаются друг от друга, то можно считать результат расчета по формуле (12.69) вполне удовлетворительным.

*Глава XIII*

# ДИНАМИКА САМОНАВОДЯЩИХСЯ СНАРЯДОВ

## § 13.1. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ САМОНАВЕДЕНИЯ

Самонаведение снарядов на цель может осуществляться несколькими методами, которые и определяют характер траекторий снарядов. Под методом наведения будем понимать желаемую закономерность изменения углового положения вектора скорости снаряда в процессе сближения с целью. Метод наведения, кроме вида траектории, определяет угол встречи снаряда с целью, распределение потребной перегрузки по траектории, максимальную перегрузку на траектории и время от начала действия системы самонаведения до момента встречи снаряда и цели. Известно большое число методов наведения снаряда при самонаведении *.

Наиболее распространенными методами наведения являются:

1) метод погони или метод преследования;

2) преследование с упреждением;

3) наведение в мгновенную точку встречи или метод параллельного сближения (метод перехвата).

Многие полезные сведения о возможностях и свойствах методов наведения можно получить из анализа кинематических траекторий самонаводящих снарядов. Кинематика самонаведения предполагает, что связи, налагаемые на вектор скорости снаряда методом наведения, выполняются идеально.

### 1. Метод погони

При идеальной реализации метода погони вектор скорости снаряда $\overline{V}$ всегда совпадает с направлением линии снаряд-цель (линия *СЦ* на фиг. 13.1). Если скорость снаряда $\overline{V}$ больше скорости цели $\overline{V}_ц$, то при указанной ориентации $\overline{V}$ цель, очевидно,

---

* Л. С. Гуткин, Принципы радиоуправления беспилотными объектами, изд. «Советское радио», 1959;

А. С. Локк, Управляемые снаряды, ГТТИ, 1957;

В. Н. Типугин, В. В. Вейцель, Радиотелеуправление, изд. «Советское радио», 1962.

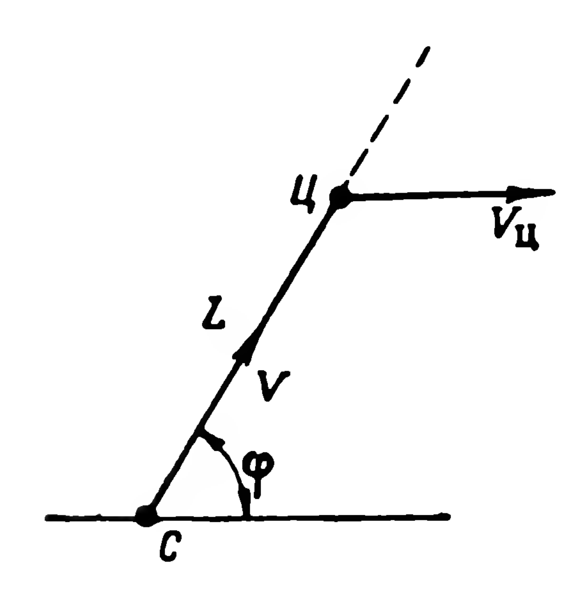
всегда будет настигнута снарядом. Используя обозначения на фиг. 13.1, запишем, кинематические уравнения:

уравнение скорости сближения

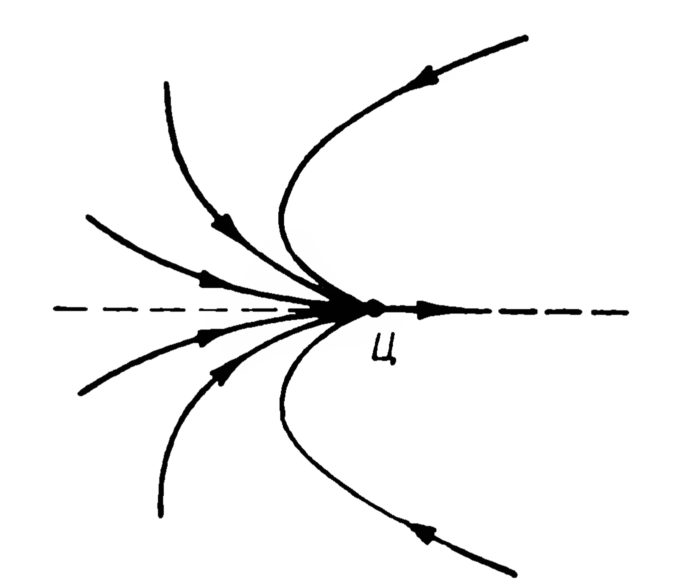
$$\frac{dL}{dt} = V_ц \cos\varphi - V \tag{13.1}$$

и уравнение угловой скорости линии *СЦ*

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{L} V_ц \sin\varphi. \tag{13.2}$$




Фиг. 13.1. Схема относительного положения снаряда и цели при методе погони.




Фиг. 13.2. Кинематические траектории снаряда в относительном движении при методе погони.

Деля первое уравнение на второе, получим

$$\frac{dL}{d\varphi} = L\left(\frac{q}{\sin\varphi} - \operatorname{ctg}\varphi\right), \tag{13.3}$$

где

$$q = \frac{V}{V_ц} > 1.$$

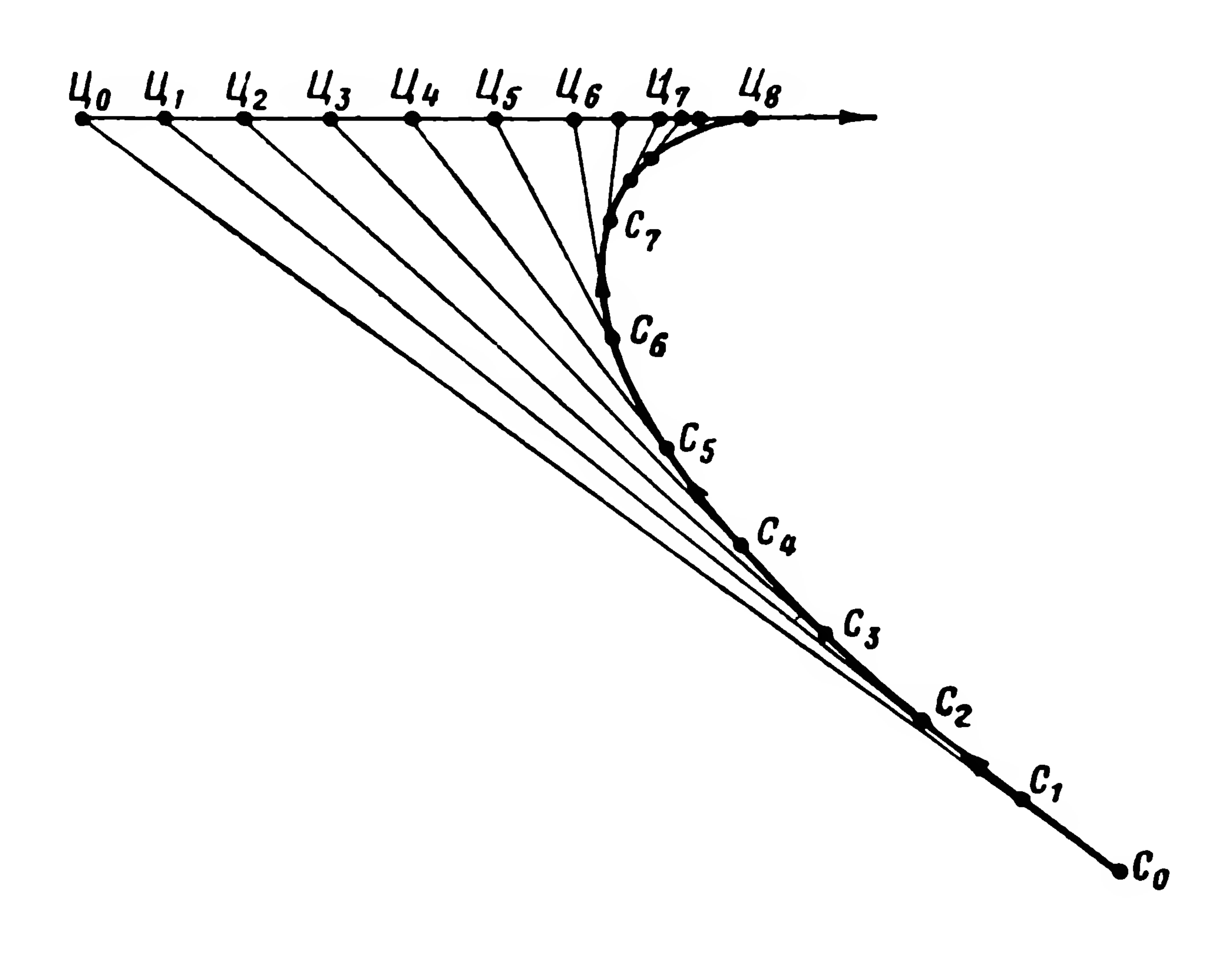
Величина $q$ всегда должна быть больше единицы, так как только в этом случае $\frac{dL}{dt} < 0$ и обязательно происходит сближение снаряда с целью. После разделения переменных уравнение (13.3) интегрируется. В результате получим выражение

$$L = L_0 \left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)^{q-1} \cdot \left(\frac{1+\cos\varphi_0}{1+\cos\varphi}\right)^q. \tag{13.4}$$

Дальность $L$ — обращается в нуль только при $\varphi = 0$. Это означает, что при любых начальных условиях $\varphi_0$ и $L_0$ снаряд поражает цель в хвост. Выражение (13.4) представляет собой уравнение траектории движения снаряда в полярных координатах, связанных с целью. Траекторию, построенную по этой формуле, будет видеть наблюдатель, находящийся на цели. Иными словами, формула

(13.4) дает возможность построить траекторию в относительном движении. На фиг. 13.2 представлено семейство относительных траекторий, получающихся при различных начальных условиях $L_0$ и $\varphi_0$.

Для построения траектории снаряда в абсолютном движении (относительно земли) необходимо найти $L=L(t)$ и $\varphi=\varphi(t)$. Это

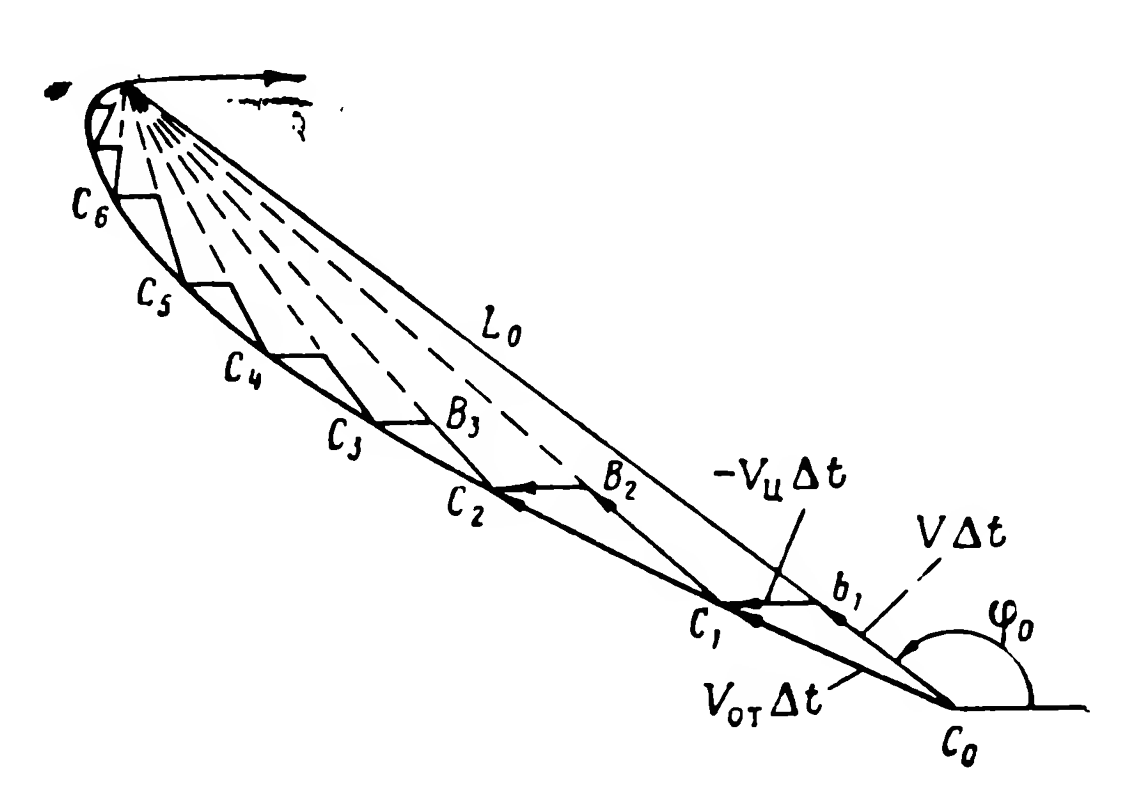



Фиг. 13.3. Пример построения кинематической траектории снаряда в абсолютном движении при методе погони.

представляет значительные трудности. Однако весьма просто построить траекторию погони графическим методом. Для этого достаточно через заданный интервал $\Delta t$ разметить положение цели точками $Ц_0$, $Ц_1$, $Ц_2, \ldots$ и соединять эти точки прямыми с точками последовательного положения снаряда $C_0$, $C_1$, $C_2, \ldots$, расположенными на этих прямых (фиг. 13.3). Плавная кривая, проходящая через $C_0$, $C_1$, $C_2, \ldots$, является траекторией движения снаряда или кривой погони. Так же просто можно построить кривую погони в относительном движении, т. е. в координатной системе, связанной с целью. Такое построение сделано на фиг. 13.4. Из точки $C_0$ в направлении $L_0$ откладывается отрезок или вектор $\overline{C_0b_1}$ длиной $V\Delta t$. Из точки $b_1$ откладывается вектор $\overline{b_1C_1}=-V_ц\Delta t$, длина которого равна $V_ц\Delta t$. Точка $C_1$ — конец вектора $\overline{b_1C_1}$ принадлежит кривой погони в относительном движении. Аналогично получаются остальные точки $C_2$, $C_3, \ldots$, принадлежащие кривой погони. Очевидно, что графические построения для маневрирующей цели, когда $V_ц \neq \text{const}$ и скорость снаряда также не постоянна, выполня-

ются аналогичным образом. При графическом построении траектории одновременно определяется время от начала движения по кривой погони до встречи с целью и рубеж, на котором происходит эта встреча.

Большое значение имеет угловая скорость $\dot{\varphi}=\frac{d\varphi}{dt}$ или пропорциональная ей перегрузка $n=\frac{1}{g}V\dot{\varphi}$, которую должна создать си-




Фиг. 13.4. Пример построения кинематической траектории снаряда в относительном движении при методе погони.

стема управления снаряда при движении по кривой погони. Выражение для угловой скорости получается из (13.2) и (13.4):

$$\dot{\varphi}=-\frac{V_ц}{L_0}\frac{(\sin\varphi_0)^{q-1}}{(\sin\varphi)^{q-2}}\cdot\left(\frac{1+\cos\varphi}{1+\cos\varphi_0}\right)^q. \tag{13.5}$$

Найдем значение угловой скорости в момент попадания снаряда в цель.

При $1<q<2$

$$\lim_{\varphi\to 0}\dot{\varphi}=-\frac{V_ц}{L_0}\frac{(\sin\varphi_0)^{q-1}}{(1+\cos\varphi_0)^q}\lim_{\varphi\to 0}(1+\cos\varphi)^q(\sin\varphi)^{2-q}=0;$$

при $q=2$

$$\lim_{\varphi\to 0}\dot{\varphi}=-\frac{V_ц}{L_0}\frac{\sin\varphi_0}{(1+\cos\varphi_0)^2}\lim_{\varphi\to 0}(1+\cos\varphi)^2=$$

$$=-\frac{4V_ц}{L_0}\frac{\sin\varphi_0}{(1+\cos\varphi_0)^2};$$

при $q > 2$

$$\lim_{\varphi \to 0} \dot{\varphi} = -\frac{V_ц (\sin\varphi_0)^{q-1}}{L_0 (1+\cos\varphi_0)^q} \lim_{\varphi \to 0} \frac{(1+\cos\varphi)^q}{(\sin\varphi)^{q-2}} = -\infty.$$

Перегрузка или угловая скорость для $1 < q < 2$ имеет максимум на траектории. Для определения максимума продифференцируем по $\varphi$ выражение для $\dot{\varphi}$ [см. формулу (13.5)]. Из уравнения

$$\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = 0$$

находим, что максимум угловой скорости имеет место при $\varphi = \arccos\frac{q}{2}$. Максимальное значение угловой скорости равно

$$|\dot{\varphi}|_{max} = \frac{V_ц}{L_0} \frac{(\sin\varphi_0)^{q-1}}{(1+\cos\varphi_0)^q} \cdot \left(1+\frac{q}{2}\right)^q \cdot \left(1-\frac{q^2}{4}\right)^{1-\frac{q}{2}}. \qquad (13.6)$$

При $q \geqslant 2$ значение угловой скорости не имеет максимума, при $q = 2$ угловая скорость нарастает от 0 до $\frac{4V_ц}{L_0} \frac{\sin\varphi_0}{(1+\cos\varphi_0)^2}$ у цели; при $q > 2$ $\dot{\varphi} \to \infty$ в районе цели.

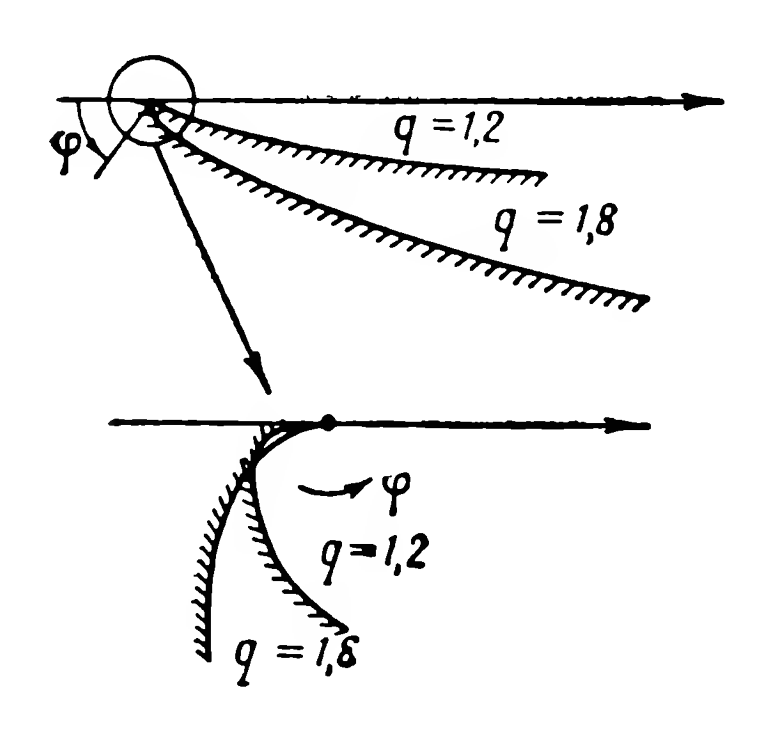
Из формул для угловых скоростей видно, что перегрузка на траектории, в том числе и максимальная, обратно пропорциональна начальной дальности $L_0$. Поэтому выгодно начинать процесс самонаведения как можно дальше от цели.

Для $1 < q < 2$ с помощью формулы (13.6) можно построить область возможных атак, если задаться максимально допустимой перегрузкой $n_{max}$, которую может иметь снаряд. В полярных координатах, связанных с целью, граница области возможных атак строится по уравнению

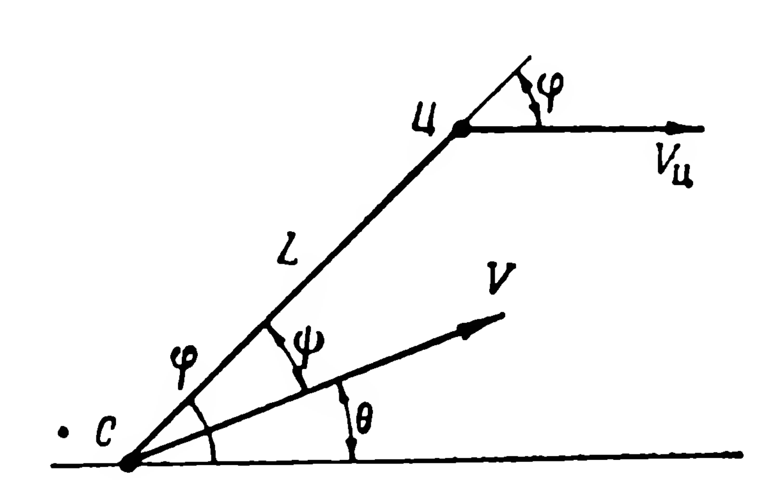
$$L = \frac{V_ц V}{n_{max}\, g} \left(1+\frac{q}{2}\right)^q \cdot \left(1-\frac{q^2}{4}\right)^{1-\frac{q}{2}} \cdot \frac{(\sin\varphi_0)^{q-1}}{(1+\cos\varphi_0)^q}. \qquad (13.7)$$

Выстрел по цели из области возможных атак не приведет к перегрузке больше заданной $n_{max}$. При построении границы области возможных атак $\varphi_0$ пробегает значение от $\pi$ до 0. Как следует из (13.7), при $\varphi_0 = \arccos\frac{q}{2}$ граница области возможных атак превращается в кривую погони с начальным радиусом $L_{01} = \frac{V_ц V}{n_{max}\, g}\left(1-\frac{q^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ и начальным углом $\arccos\frac{q}{2}$. Этот участок границы области возможных атак можно построить графически так,

как указывалось выше. На фиг. 13.5, представлены области возможных атак для $q=1{,}2$ и $1{,}8$ и $\frac{V_ц V}{n_{max} g}=25$. Аналогичным образом, исходя из максимальной располагаемой перегрузки и допустимого промаха, можно построить области возможных атак при $q>2$, хотя в этом случае перегрузка снаряда при точном попадании в цель стремиться к бесконечности.




Фиг. 13.5. Области возможных атак.




Фиг. 13.6. Схема относительного положения снаряда и цели при преследовании с упреждением.

## 2. Преследование с упреждением

При преследовании с упреждением между линией СЦ и вектором скорости снаряда выдерживается определенный угол $\psi$ (фиг. 13.6). В общем случае угол упреждения может быть функцией многих величин: $\psi=\psi(L, \dot{L}, \varphi, \dot{\varphi}, t)$. Самым простым является случай, когда $\psi=\text{const}$. Для преследования с упреждением кинематические уравнения будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= V_ц \cos\varphi - V\cos\psi, \\ L\frac{d\varphi}{dt} &= -V_ц \sin\varphi + V\sin\psi \end{aligned}\right\} \qquad (13.8)$$

или

$$\frac{dL}{L} = \frac{\cos\varphi - q\cos\psi}{-\sin\varphi + q\sin\psi}\, d\varphi. \qquad (13.9)$$

Интегрирование выражения (13.9) при $\psi=\mathrm{const}$ дает уравнение траектории в относительном движении * при постоянном угле упреждения

$$L = L_0\left(\frac{\sin\varphi - q\sin\psi}{\sin\varphi_0 - q\sin\psi}\right)^{\frac{q\cos\psi}{\sqrt{1-q^2\sin^2\psi}}-1} \times$$

$$\times\left(\frac{1 - q\sin\psi\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0\sqrt{1-q^2\sin^2\psi}}{1 - q\sin\psi\sin\varphi + \cos\varphi\sqrt{1-q^2\sin^2\psi}}\right)^{\frac{q\cos\psi}{\sqrt{1-q^2\sin^2\psi}}}. \qquad (13.10)$$

В выражении (13.10) $q^2\sin^2\psi < 1$.

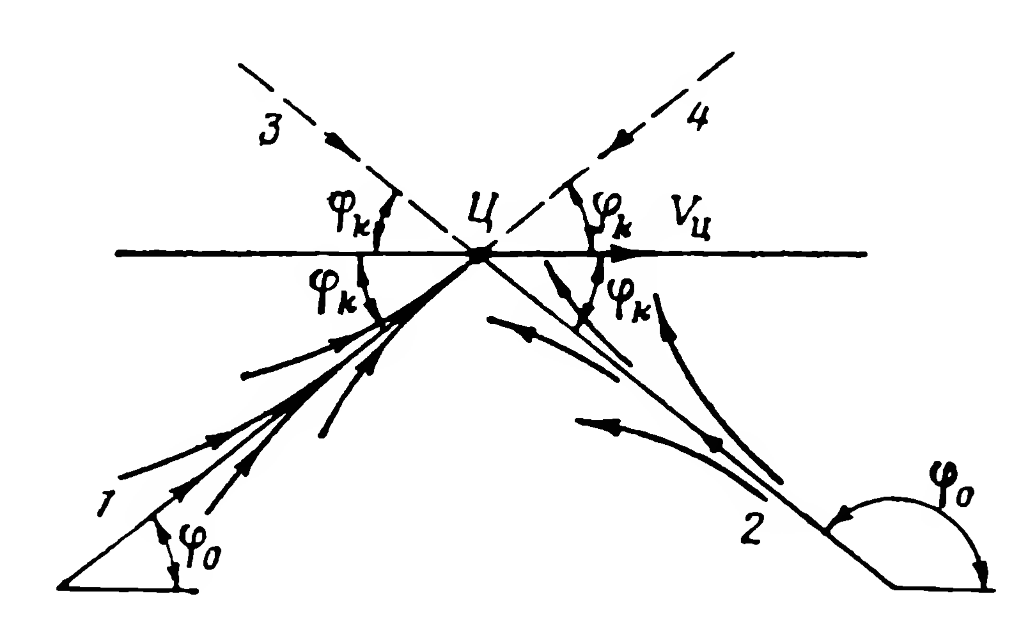
Для $q^2\sin^2\psi = 1$

$$L = L_0\left(\frac{1-\sin\varphi_0}{1-\sin\varphi}\right)e^{q\cos\psi\left\{\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\}}. \qquad (13.11)$$

При $q^2\sin^2\psi \leqslant 1$ снаряд сталкивается с целью. При $q^2\sin^2\psi > 1$ траектория превращается около цели в спираль с бесконечно большим числом витков. Условие $q^2\sin^2\psi \leqslant 1$ выполняется как при $\psi < \frac{\pi}{2}$, так и при $\psi > \frac{\pi}{2}$. Однако при $\psi > \frac{\pi}{2}$ согласно первому из уравнений (13.8) скорость сближения $\dot{L}$ будет положительной и самонаведение исключается. Таким образом, остается случай $\psi \leqslant \frac{\pi}{2}$. В выражении (13.10) показатель степени $\frac{q\cos\psi}{\sqrt{1-q^2\sin^2\psi}} - 1 > 0$ при $\psi < \frac{\pi}{2}$, а произведение $q^2\sin^2\psi < 1$, поэтому $L$ обращается в нуль при $\sin\varphi = q\sin\psi$. Это значит, что поражение цели происходит не «в хвост», а под углом $\varphi_k = \arcsin(q\sin\psi)$. При этом получается два возможных направления подхода снаряда к цели. Первое направление определяется углом $\varphi_k < \frac{\pi}{2}$ и второе — углом $\pi - \varphi_k > \frac{\pi}{2}$ (фиг. 13.7). При обоих направлениях условие $\sin\varphi_k = q\sin\psi$ выполняется. Для того чтобы установить, по какому из направлений будет в действительности происходить сближение снаряда с целью, необходимо исследовать оба направления на устойчивость. В относительном движении плоскость $L$, $\varphi$ представ-

* А. С. Локк, Управляемые снаряды, Гостехиздат, 1957.

ляет собой фазовую плоскость, где точка *Ц* (цель) является особой точкой системы уравнений (13.8). В данном случае уравнения имеют две особые точки $Ц_1(0, \varphi_k)$ и $Ц_2(0, \pi - \varphi_k)$, являющиеся фокусами фазовой плоскости $\varphi$, $L$.




Фиг. 13.7. Устойчивые и неустойчивые направления подхода снаряда к цели.

Необходимо определить, какой из фокусов является устойчивым и какой неустойчивым. Исследование устойчивости проводится обычным способом. Движение снаряда по направлениям *1*, *2*, *3* и *4* (фиг. 13.7) будем считать невозмущенным и найдем уравнения в малых отклонениях относительно принятых невозмущенных направлений. При невозмущенном движении $\varphi_0 = \varphi_k$.

Исходные уравнения (13.8) для невозмущенного движения будут

$$\dot{L} = V_ц(\cos\varphi_k - q\cos\psi) = -V_{сб}; \tag{13.12}$$

$$L\dot{\varphi} = V_ц(-\sin\varphi_k + q\sin\psi) = 0, \tag{13.13}$$

где $V_{сб} = -V_ц(\cos\varphi_k - q\cos\psi) = \text{const}$.

Если положить $\varphi_0 = \varphi_k$, то сразу начинает выполняться условие $\sin\varphi_k = q\sin\psi$, что дает $\dot{\varphi} = 0$ и $\varphi = \varphi_k$ в течение всего времени сближения. При этом $\dot{L} = -V_{сб} = \text{const}$ и, следовательно, $L = L_0 - V_{сб}\, t$.

Введем принятые в настоящей книге обозначения параметров невозмущенного режима $\varphi_e = \varphi_k$, $L_e = L_0 - V_{сб}t$, $\dot{L}_e = -V_{сб}$. Теперь в уравнениях (13.8) положим $L = L_e + \Delta L$ и $\varphi = \varphi_e + \Delta\varphi$:

$$\dot{L}_e + \Delta\dot{L} = V_ц[\cos(\varphi_e + \Delta\varphi) - q\cos\psi]; \tag{13.14}$$

$$(L_e + \Delta L)\Delta\dot{\varphi} = V_ц[-\sin(\varphi_e + \Delta\varphi) + q\sin\psi]. \tag{13.15}$$

Полагая отклонения $\Delta\varphi$, $\Delta\dot{\varphi}$ и $\Delta L$ малыми и учитывая уравнения невозмущенного режима, из (13.14) и (13.15) найдем уравнения для малых отклонений

$$\Delta\dot{L} = -(V_{ц} \sin\varphi_e)\,\Delta\varphi; \quad (13.16)$$

$$L_e\Delta\dot{\varphi} = -V_{ц}\cos\varphi_e\Delta\varphi. \quad (13.17)$$

Вопрос об устойчивости невозмущенного режима решается лишь на основе уравнения (13.17), так как уравнение (13.16) дает только возможность определить поправку $\Delta L(t)$ после определения $\Delta\varphi(t)$ из уравнения (13.17). Для исключения времени при исследовании устойчивости рассмотрим (13.17) совместно с выражением

$$\dot{L}_e = -V_{сб}. \quad (13.18)$$

Разделив (13.18) на (13.17), получим

$$\frac{d\Delta\varphi}{\Delta\varphi} = k_V\frac{dL_e}{L_e}, \quad (13.19)$$

где

$$k_V = \frac{V_{ц}\cos\varphi_e}{V_{сб}}. \quad (13.20)$$

Решение уравнения (13.19) приводит к выражению

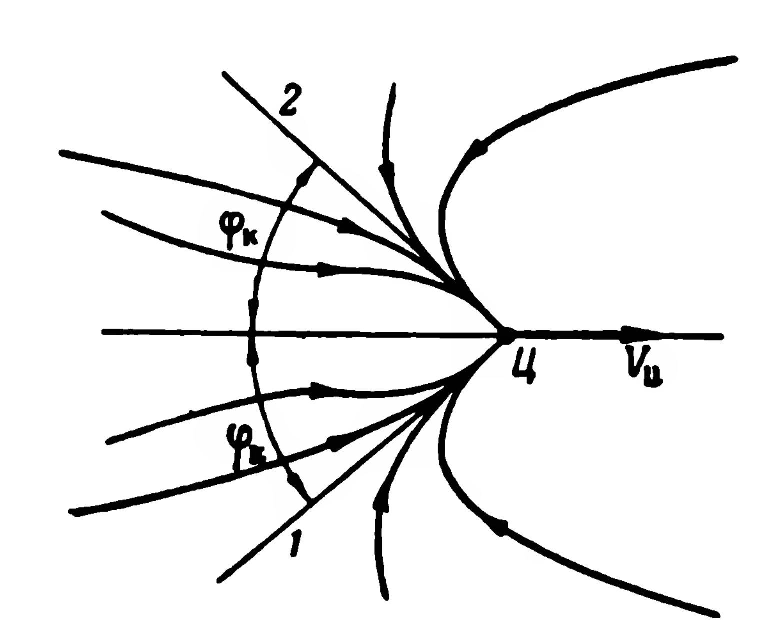
$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0\left(\frac{L_e}{L_{e0}}\right)^{k_V} = \Delta\varphi_0\left(\frac{L_0 - V_{сб}\,t}{L_0}\right)^{k_V}, \quad (13.21)$$

где $\Delta\varphi_0$ и $L_{e0} = L_0$ — значения переменных в начальный момент.

Как видно из выражения (13.21), при $k_V > 0$ отклонение от невозмущенного режима $\Delta\varphi$ непрерывно уменьшается и при $t = L_0/V_{сб}$ обращается в нуль. Следовательно, при $k_V > 0$ невозмущенный режим устойчив. Напротив, при $k_V < 0$ невозмущенный режим неустойчив. Но $k_V > 0$ при $\varphi_e = \varphi_k < \frac{\pi}{2}$ и $k_V < 0$ при $\varphi_e = \pi - \varphi_k > \frac{\pi}{2}$, следовательно, устойчивыми направлениями оказываются направления *1* и *2* в хвостовом секторе цели. Все траектории снаряда при любых начальных условиях будут стягиваться к направлениям *1* и *2* в хвостовом секторе цели (фиг. 13.8).

Граничные направления $\varphi_k = \pm\frac{\pi}{2}$, когда $q\sin\psi = \sin\varphi_k = 1$ и траектории определяются выражением (13.11), являются нейтрально устойчивыми, так как в этих случаях $k_V = 0$ и $\Delta\varphi$ всегда равно своему начальному значению $\Delta\varphi_0$.

Для определения перегрузки при самонаведении с постоянным углом упреждения необходимо из второго уравнения (13.8) и выражения для $L$ (13.10) определить угловую скорость $\dot{\varphi}$. В силу постоянства угла упреждения $\dot{\varphi}$ в то же время является и угловой скоростью вектора скорости. В связи с этим, как и на кривой погони, перегрузка $n = V\dot{\varphi}/g$.




Фиг. 13.8. Кинематические траектории снаряда в относительном движении при методе последования с упреждением.

Итак, используя (13.8) и (13.10), находим

$$\dot{\varphi} = -\frac{V_ц}{L_0}\frac{(\sin\varphi_0 - q\sin\psi)^{\nu-1}}{(\sin\varphi - q\sin\psi)^{\nu-2}}\cdot\frac{(1 - q\sin\psi\sin\varphi + \cos\varphi\sqrt{1-q^2\sin^2\psi})^{\nu}}{1 - q\sin\psi\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0\sqrt{1-q^2\sin^2\psi}}, \tag{13.22}$$

где $\nu = \dfrac{q\cos\psi}{\sqrt{1-q^2\sin^2\psi}}$.

При поражении цели, когда $\sin\varphi = q\sin\psi$, угловая скорость равна нулю, если $\nu<2$, и равна бесконечности при $\nu>2$. Таким образом, перегрузка на траектории имеет максимум при $1<\nu<2$. Угол $\varphi$, при котором перегрузка достигает максимума, является корнем трансцендентного уравнения

$$\cos^2\varphi - \frac{(\nu-2)(1-q\sin\psi)}{2\sqrt{1-q^2\sin^2\psi}}\cos\varphi + \frac{q\sin\psi_0\nu}{2}\sin\varphi - \frac{\nu}{2} = 0. \tag{13.23}$$

При постоянном угле упреждения потребные перегрузки для реализации траектории самонаведения, как правило, уменьшаются. При атаках в передней полусфере существенно уменьшается время самонаведения и поражение цели происходит на более раннем рубеже. Кроме того, постоянный угол упреждения позволяет осуществлять атаку цели под заданным ракурсом $\sin\varphi_k$, что во многих случаях представляется существенным.

Меняющийся в процессе самонаведения угол упреждения $\psi = \psi(L, \dot{L}, \varphi, \dot{\varphi}, t)$ открывает большие возможности построения оптимальных в различном смысле траекторий самонаведения. Можно, например, сформулировать задачу о траектории мини-

мального времени самонаведения, а также поставить задачу о траектории с наиболее равномерно распределенной перегрузкой. В этом случае потребная для самонаведения перегрузка будет минимальной для данных начальных условий $\varphi_0$ и $L_0$. Вопрос об оптимальных траекториях, образуемых с помощью переменного угла упреждения, в общей постановке весьма сложен и в настоящей книге не рассматривается. В качестве иллюстрации влияния переменного угла упреждения рассмотрим случай малого угла упреждения, когда $\sin\psi \approx \psi$ и $\cos\psi \approx 1$ ($\psi \leqslant 20 \div 25°$) и когда этот угол упреждения пропорционален угловой скорости линии *СЦ*, т. е. положим

$$\psi = -k\dot{\varphi}. \tag{13.24}$$

Знак минус в (13.24) обеспечивает получение упреждающего угла $\psi$, так как согласно второму из уравнений (13.8) $\dot{\varphi} < 0$ при $\psi \to 0$. С учетом малого значения угла упреждения кинематические уравнения (13.1) и (13.2) примут вид

$$\dot{L} = V_ц(\cos\varphi - q); \tag{13.25}$$

$$(L + kV)\dot{\varphi} = -V_ц \sin\varphi. \tag{13.26}$$

Если ввести новую переменную $(L + kV) = x$, причем $\dot{L} = \dot{x}$, то получим кинематические уравнения кривой погони в координатах $x$, $\varphi$

$$\dot{x} = V_ц(\cos\varphi - q); \tag{13.27}$$

$$x\dot{\varphi} = -V_ц \sin\varphi. \tag{13.28}$$

Уравнения (13.27) и (13.28) имеют решение в форме (13.4):

$$x = x_0 \left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)^{q-1} \left(\frac{1 + \cos\varphi_0}{1 + \cos\varphi}\right)^q. \tag{13.29}$$

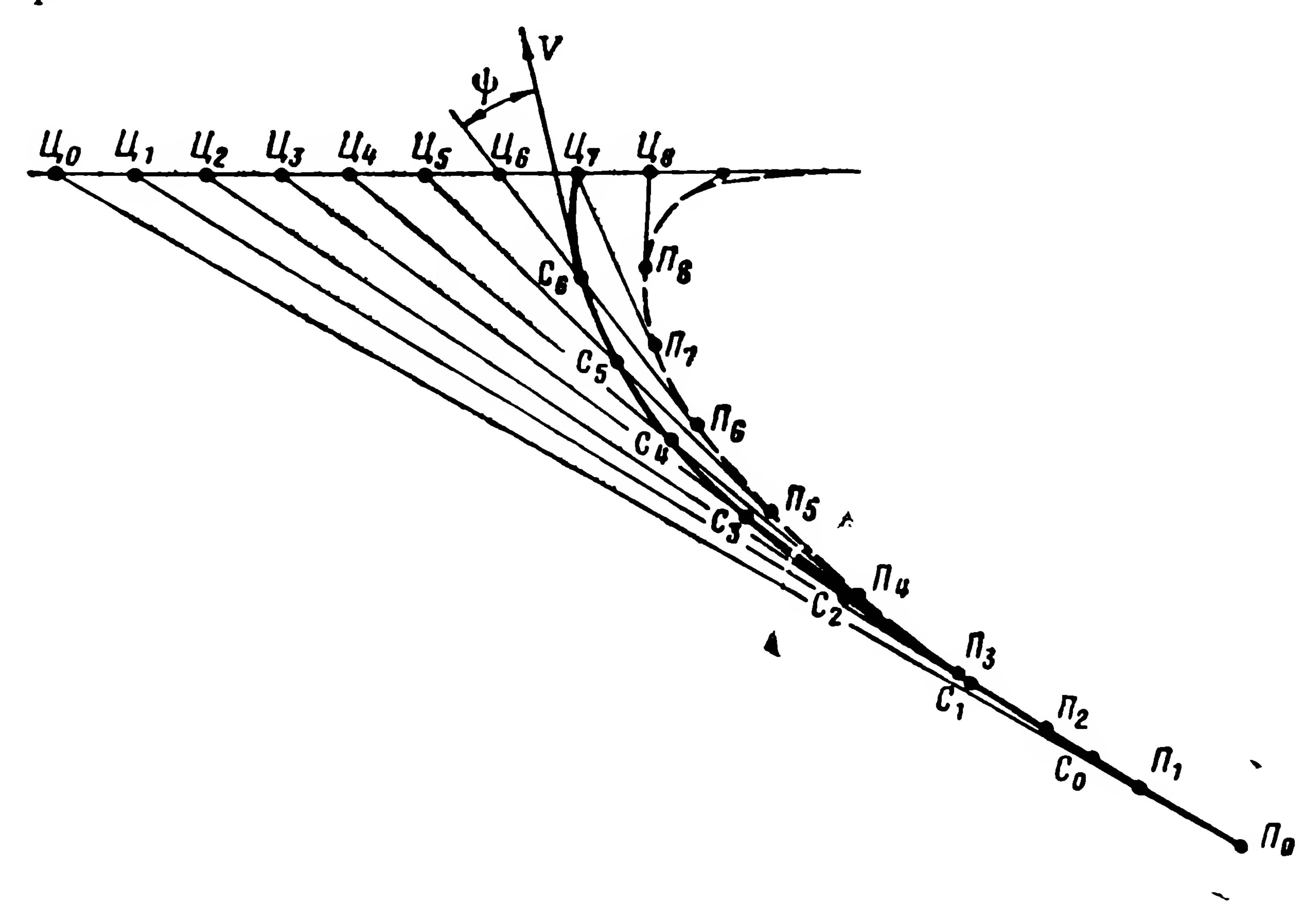
Для переменной $L$ выражение (13.29) принимает вид

$$L = -kV + (L_0 + kV)\left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_0}\right)^{q-1} \cdot \left(\frac{1 + \cos\varphi_0}{1 + \cos\varphi}\right)^q. \tag{13.30}$$

Как видно из сравнения формул (13.4) и (13.30), введение малого угла упреждения, пропорционального $\dot{\varphi}$, эквивалентно увеличению дальности самонаведения на постоянную величину $kV$.

Из уравнений (13.29) и (13.30) вытекает способ построения траектории при погоне за целью с упреждением при $\psi = k\dot{\varphi}$. Строится кривая погони $x = f(\varphi)$ — кривые $П_0$, $П_1$, $П_2, \ldots$ на фиг. 13.9 и 13.10. На лучах $П_0Ц_0$, $П_1Ц_1$, $П_2Ц_2$ отмечаются точки

$C_0, C_1, C_2, \ldots$, находящиеся на расстоянии $kV$ от точек $П_0, П_1, П_2, \ldots$. Точки $C_0, C_1, C_2, \ldots$ принадлежат искомой траектории самонаведения с упреждением. Отметим, что точки $Ц_i$, $C_i$, $П_i$ всегда лежат на одной прямой и, следовательно, точки $П_0, П_1, П_2, \ldots$ можно рассматривать как последовательные положения пункта управле-

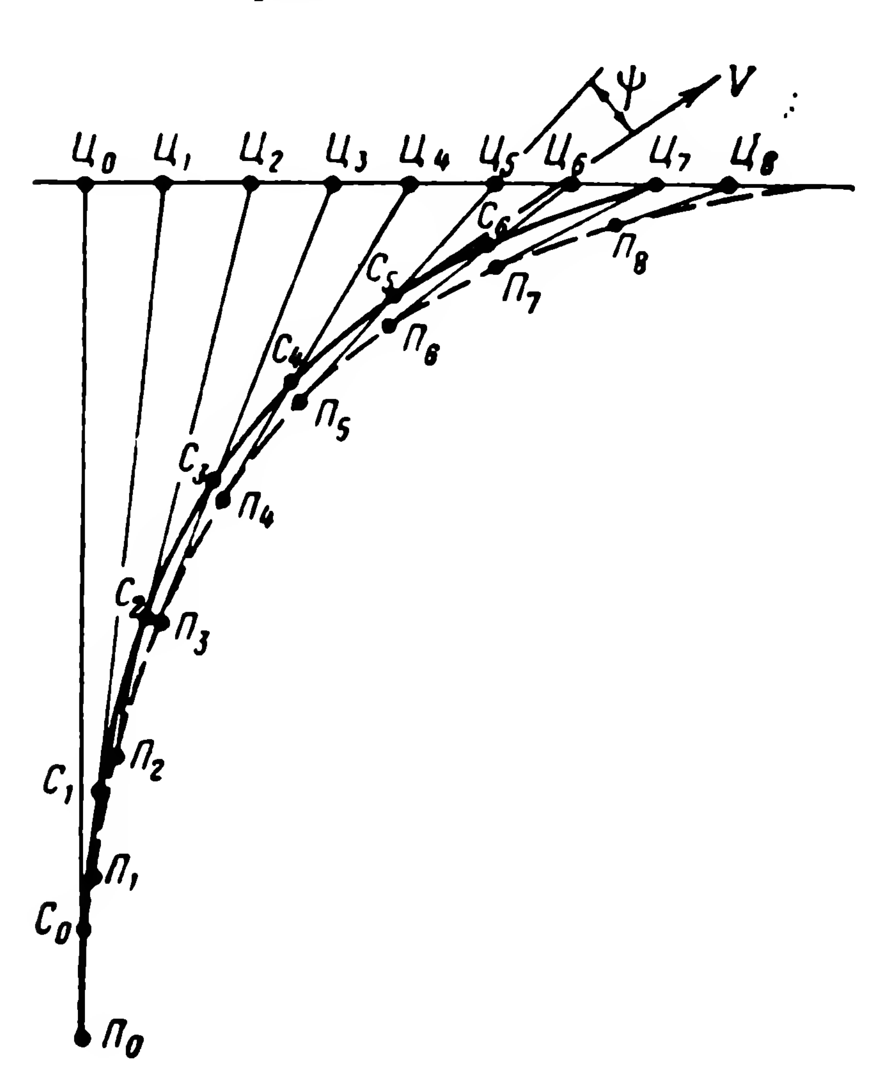



Фиг. 13.9. Пример построения кинематической траектории снаряда в абсолютном движении при преследовании с упреждением.

ния снарядом, который двигается по кривой погони. С пункта управления снарядом управляют так, что он все время остается на линии визирования $Ц_iП_i$. Такой метод управления снарядом называется методом совмещения и будет подробно рассматриваться в следующей главе. В данном случае никакого пункта управления нет, и траектория $П_0, П_1, П_2, \ldots$ есть фиктивная траектория, необходимая для построения действительной траектории снаряда при рассматриваемом методе самонаведения. Однако из изложенного вытекает возможность технической реализации рассматриваемого метода не только путем поворота вектора скорости в сторону упреждения на $k\varphi$, но и путем фиктивного удлинения расстояния до цели на постоянную величину. Такая реализация возможна, например, при наведении снаряда на цель по радиолокатору кругового обзора (гл. XIV).

Как из графиков, приведенных на фиг. 13.9 и 13.10, так и из анализа формулы (13.30) видно, что время самонаведения и перегрузки на траектории существенно сокращаются при погоне

с углом упреждения $\psi=k\dot{\varphi}$. Угол встречи снаряда с целью равен $\varphi_k+k\dot{\varphi}_k$, где $\varphi_k$ — угол, который определяется из уравнения (13.30) при $L=0$, и $\dot{\varphi}_k$ — угловая скорость линии $СЦ$, определяемая из выражений (13.26) и (13.30) при $L=0$. Для вычисления




**Фиг. 13.10.** Пример построения кинематической траектории снаряда в абсолютном движении при преследовании с упреждением.

перегрузки необходимо найти угловую скорость вектора скорости, которая в данном случае равна (см. фиг. 13.6)

$$\dot{\theta}=\dot{\varphi}-\dot{\psi}=\dot{\varphi}+k\ddot{\varphi}.$$

При этом

$$\dot{\varphi}=-\frac{V_{ц}(\sin\varphi_0)^{q-1}}{x_0(1+\cos\varphi_0)^q}\cdot\frac{(1+\cos\varphi)^q}{(\sin\varphi)^{q-2}}. \tag{13.31}$$

Для вычисления $\ddot{\varphi}$ продифференцируем (13.28) и, используя формулу (13.27), найдем

$$\ddot{\varphi}=-\frac{V_{ц}(2\cos\varphi-q)}{x}\dot{\varphi},$$

откуда

$$\dot{\theta}=\left[1-\frac{kV_{ц}(2\cos\varphi-q)}{x}\right]\dot{\varphi}. \tag{13.32}$$

Формула (13.32) показывает, что при использовании рассмотренного способа перегрузка, испытываемая снарядом (пропорцио-

нальная $\dot{\theta}$), получается меньше, чем при движении по кривой погони без упреждения. В последнем случае перегрузка пропорциональна $\dot{\varphi}$.

### 3. Метод параллельного сближения или наведение в мгновенную точку встречи (метод перехвата)

При анализе наведения снаряда на цель, движущуюся со скоростью $\overline{V}_ц=\text{const}$, по методу преследования с постоянным углом упреждения $\psi$ было установлено, что при начальном угле $\varphi_0=\varphi_k$, где $\sin\varphi_k=q\sin\psi$, сближение с целью происходит по прямой. Прямая траектория самонаведения является весьма заманчивой, поскольку в этом случае процесс самонаведения протекает без боковых ускорений. К сожалению, при $\psi=\text{const}$ такие траектории возможны только при двух начальных углах $\varphi_0=\pm\varphi_k$ и, следовательно, вероятность реализации этого движения должна быть признана равной нулю. Для того чтобы при любых начальных условиях траектория самонаведения была прямой, постоянной в процессе сближения, угол упреждения должен быть функцией начального угла $\varphi_0$ и соотношения скоростей снаряда и цели.

Другими словами, угол упреждения должен удовлетворять условию

$$\sin\psi=\frac{1}{q}\sin\varphi_0=\frac{V_ц}{V}\sin\varphi_0 \tag{13.33}$$

или

$$\frac{\sin\psi}{V_ц}=\frac{\sin\varphi_0}{V}=\frac{\sin\psi_ц}{V}, \tag{13.34}$$

где $\psi_ц=\pi-\varphi_0$.

Условия (13.33) или (13.34) означают, что $\dot{\varphi}=0$, т. е. линия *СЦ* будет перемещаться параллельно самой себе. Отсюда вытекает одно из названий метода — метод параллельного сближения. Поскольку $\psi$, $\varphi_0$, $V_ц$ и $V$ постоянны, то постоянна и скорость сближения:

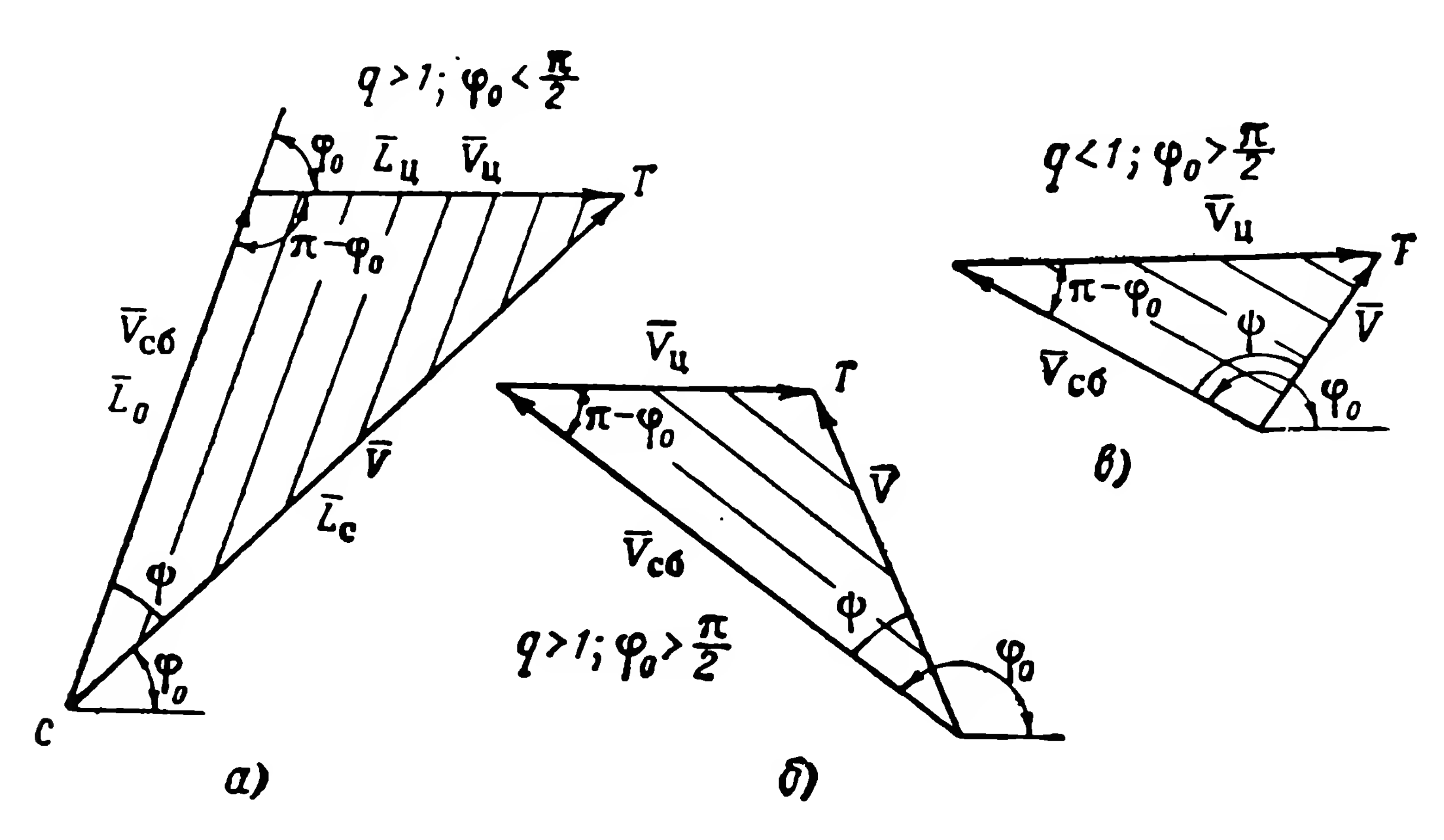
$$\dot{L}=-V_{сб}=V_ц(\cos\varphi_0-q\cos\psi).$$

Время самонаведения равно

$$t_с=\frac{L_0}{V_{сб}}.$$

Условие (13.34) указывает, что векторы $\overline{L}_0$, $\overline{L}_ц$ и $\overline{L}_с$ образуют треугольник (фиг. 13.11, *а*). Соответственно образуют треугольники векторы $\overline{V}_{сб}$, $\overline{V}$ и $\overline{V}_ц$ (фиг. 13.11, *б*, *в*), поскольку $L_ц=t_сV_ц$ и $L_с=$

$=t_c V$. Метод параллельного сближения с целью из передней и из задней полусфер реализуется как при $q=\frac{V}{V_ц}>1$, так и при $q=\frac{V}{V_ц}<1$ (фиг. 13.11, *б*, *в*). Векторы $\overline{L}_ц$ и $\overline{L}_c$ встречаются в вершине треугольника $T$, где и происходит поражение цели снарядом. Точ-




Фиг. 13.11. Пример построения кинематических траекторий при методе параллельного сближения.

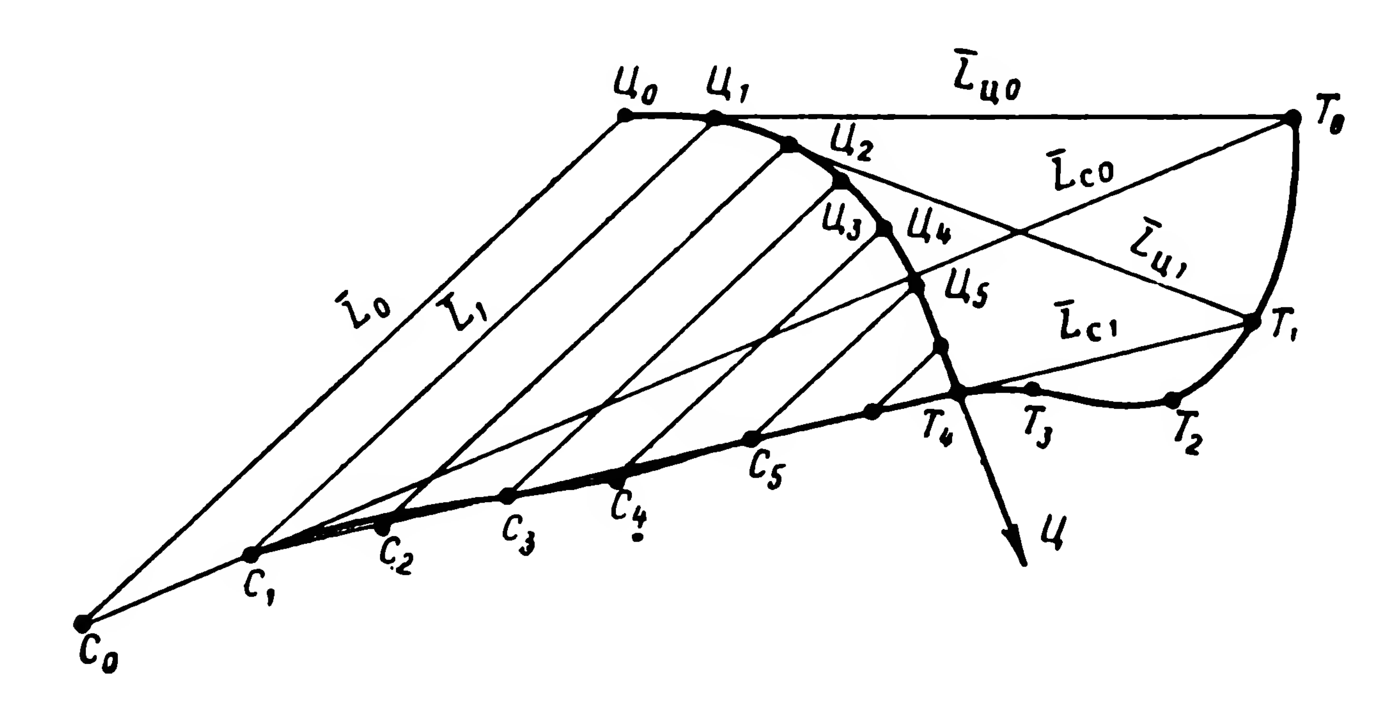
ка $T$ является точкой встречи снаряда и цели. Эта точка — единственная для данных начальных условий, если $\overline{V}_ц=\mathrm{const}$ и $\overline{V}_c=\mathrm{const}$. Если последние условия не выполняются, а условия параллельного сближения (13.34) удовлетворяются для мгновенных значений $V$, $V_ц$, $\varphi$ и $\psi$, то появляется множество точек встречи $T$, образующих траекторию точек встречи. Для каждого момента времени имеется своя точка встречи. Эта мгновенная точка встречи есть вершина треугольника, образованного мгновенными значениями векторов $\overline{L}$ $\overline{L}_ц$ и $\overline{L}$.

На фиг. 13.12 приведена траектория цели, начавшей маневр в точке $Ц_1$. В точке $Ц_5$ цель вновь стала двигаться прямолинейно. Мгновенные положения цели и снаряда в один и тот же момент времени соединяются параллельными прямыми $C_0Ц_0$, $C_1Ц_1$, $C_2Ц_2$. На фиг. 13.12 показаны два «мгновенных» треугольника $C_0Ц_0T_0$ и $C_1Ц_1T_1$ и траектория, образованная мгновенными точками встречи $T_0$, $T_1$, $T_2$, $T_3$ и $T_4$.

Если векторы скорости цели ($\overline{V}_ц=\mathrm{const}$) и снаряда постоянны, то перегрузка снаряда после реализации режима параллельного

сближения равна нулю*. При нарушении этих условий траектория снаряда не будет прямой и у снаряда возникнет боковая перегрузка.

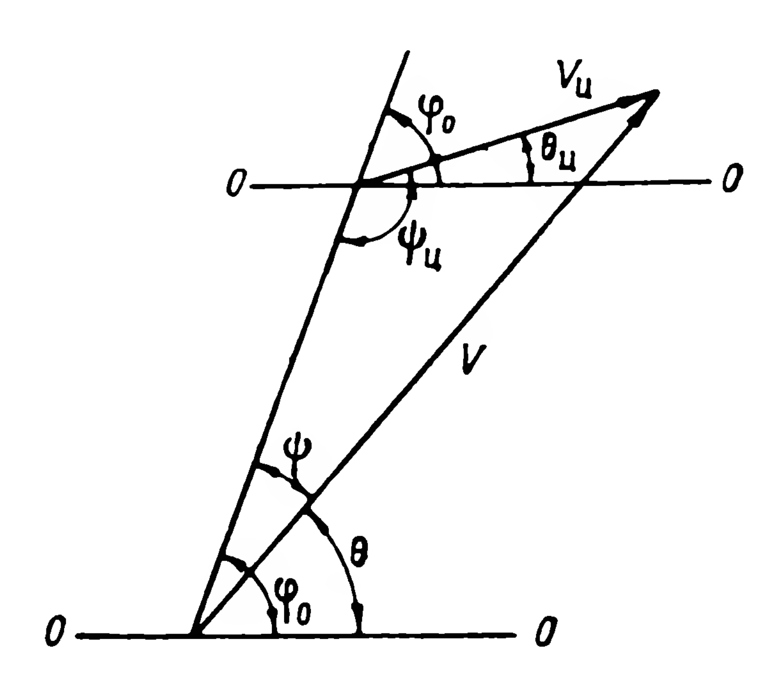
Найдем перегрузку снаряда при криволинейном движении цели при $V_ц=\mathrm{const}$ и $V=\mathrm{const}$. На фиг. 13.13 показан треугольник па-




Фиг. 13.12. Пример построения кинематической траектории снаряда, наводимого по методу параллельного сближения, при маневре цели.

раллельного сближения и углы $\theta$ и $\theta_ц$, определяющие направление полета снаряда и цели по отношению к принятому направлению отсчета 0—0. Условие параллельного сближения для данного случая примет вид

$$V_ц \sin(\varphi_0 - \theta_ц) = V \sin(\varphi_0 - \theta). \quad (13.35)$$




Фиг. 13.13. Треугольник параллельного сближения.

Поскольку $\dot{\varphi}=0$, то $\varphi=\varphi_0=\mathrm{const}$. Угловое положение вектора цели $\theta_ц=\theta_ц(t)$ представляет собой заданную (случайную или детерминированную) функцию времени. Из уравнения (13.35) определим значение $\theta$, при котором осуществляется параллельное сближение:

$$\theta = \varphi_0 - \arcsin\frac{\sin(\varphi_0 - \theta_ц)}{q}. \quad (13.36)$$

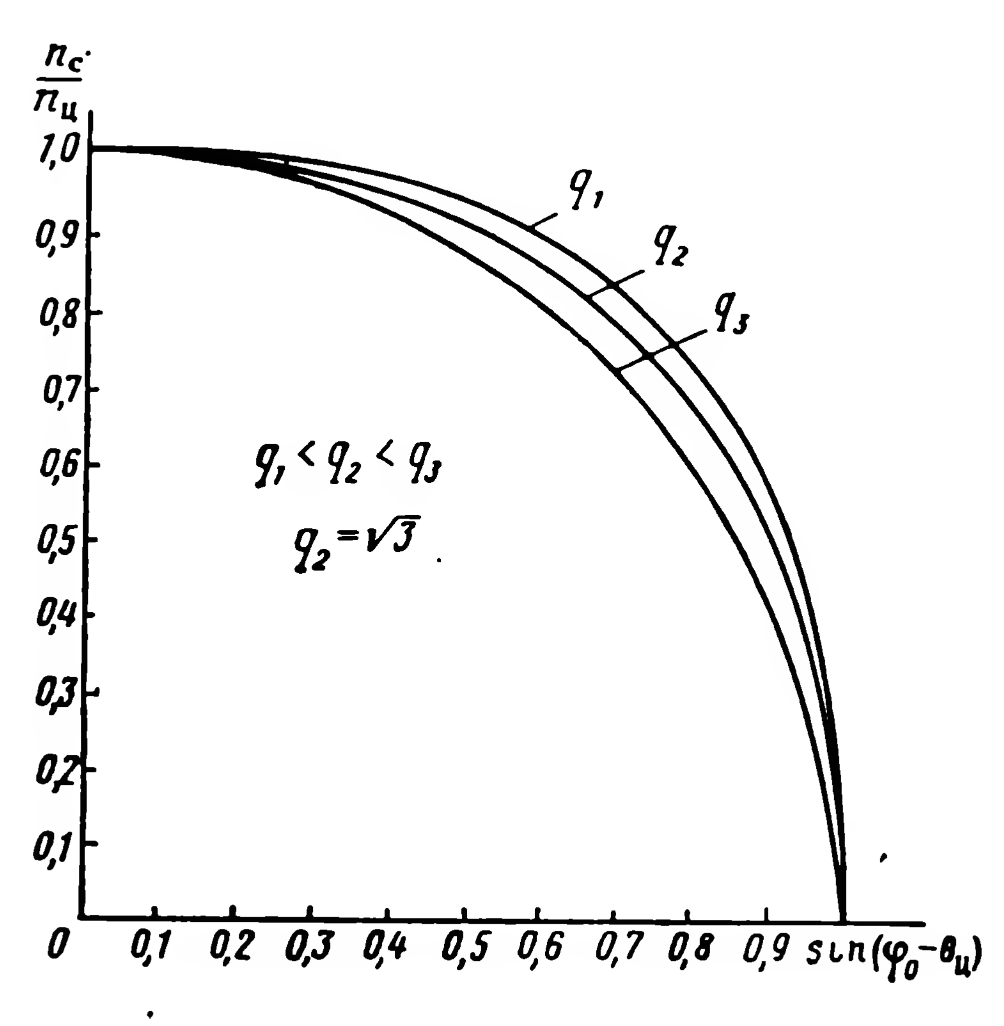
Дифференцируя (13.36) по времени и вводя вместо угловых скоростей $\dot{\theta}$ и $\dot{\theta}_ц$ перегрузки $n_c=\frac{V\dot{\theta}}{g}$ и $n_ц=\frac{V_ц\dot{\theta}_ц}{g}$, получим

* Перегрузка требуется для ввода в режим параллельного сближения — установления нужного угла $\psi$. Но этот вопрос не имеет отношения к кинематике.

$$n_{\text{с}} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi_0 - \theta_{\text{ц}})}}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2(\varphi_0 - \theta_{\text{ц}})}{q^2}}} n_{\text{ц}}, \qquad (13.37)$$

где $q = \frac{V}{V_{\text{ц}}}$.

При $q > 1$ перегрузка снаряда всегда меньше перегрузки цели. При $q = 1$ перегрузка снаряда равна перегрузке цели. Наконец, при $q < 1$ перегрузка снаряда больше перегрузки цели. Кроме того, при $q < 1$ маневр цели может привести к тому, что $\sin(\varphi_0 - \theta_{\text{ц}})/q$




**Фиг. 13.14. Графики функции.**

станет больше единицы. Выражение (13.37) потеряет в этом случае смысл, так как перестанет удовлетворяться условие (13.35), режим параллельного движения сорвется и цель «выйдет из-под удара».

На фиг. 13.14 по формуле (13.37) построены графики функции $n_{\text{с}}/n_{\text{ц}}$ при $q > 1$. Из этих графиков следует, что наибольшая перегрузка при маневре цели возникает при $\varphi_0 - \theta_{\text{ц}}$, близком к 0 или $\pi$. Отсюда вытекает правило защитного маневра цели: с максимально возможным ускорением цель должна разворачиваться так, чтобы $\varphi_0 - \theta_{\text{ц}} \rightrightarrows {}^{0}_{\pi}$. Следовательно, при атаке с задней полусферы цель должна разворачиваться от снаряда, а при атаке с передней полусферы — на снаряд. Эти же маневры цели при $q < 1$ могут привести к срыву самонаведения снаряда.

В заключении параграфа отметим несколько особенностей кинематики самонаведения. Кинематическое рассмотрение задачи

предполагает мгновенную (без запаздывания) ориентировку вектора скорости в соответствии с принятым методом наведения. Однако при реальном управлении снарядом с помощью системы управления можно изменять лишь боковую силу, которая вызывает поворот вектора скорости снаряда. Поэтому сведения, получаемые из кинематического анализа в отношении перегрузок в районе цели, а тем более в отношении точности попадания, становятся неправильными. Как будет показано ниже, вопрос о точности попадания решается исследованием динамики самонаведения. Кинематический анализ дает общее представление о характере траекторий, позволяет вычислить время самонаведения и дает достаточно правильное представление о потребных перегрузках на траектории, за исключением области, близкой к цели. Вообще, чем дальше от цели находится снаряд, тем более точные сведения о потребных перегрузках получаются из кинематического анализа. При кинематическом анализе ввод снаряда в режим параллельного сближения из случайного исходного положения векторов скорости цели и снаряда получается мгновенно, поскольку направление вектора скорости полета снаряда изменяется мгновенно.

В действительности, ввиду невозможности мгновенно ориентировать вектор скорости, ввод в режим параллельного сближения представляет собой довольно сложную проблему. Однако это проблема динамики, поскольку нет иного способа войти в режим параллельного сближения, как приложить к снаряду управляющую силу и вызвать угловую скорость $\dot{\theta}$.

Так как в режиме параллельного сближения $\varphi$ должно быть равно нулю, то войти в режим параллельного сближения можно, изменяя $\dot{\theta}$ (или боковую силу) по закону

$$\dot{\theta} = k\dot{\varphi}, \tag{13.38}$$

где $k$ — коэффициент пропорциональности. Чем выше $k$, тем быстрее будет устанавливаться режим параллельного сближения.

В некоторых источниках * управление снарядом по закону $\dot{\theta} = k\dot{\varphi}$ рассматривается как особый метод наведения и называется методом пропорциональной навигации.

## § 13.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ САМОНАВОДЯЩИХСЯ СНАРЯДОВ

### 1. Уравнения плоского движения снаряда

Уравнения движения самонаводящихся снарядов состоят из трех групп уравнений: группы уравнений движения снаряда, уравнение кинематических связей движения снаряда с движением цели и уравнений системы управления.

* А. С. Локк, Управляемые снаряды, Гостехиздат, 1957.

Уравнения снаряда (8.53), движущегося с переменной скоростью *, запишем в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} &T_V \frac{d\theta}{dt} - \alpha + \frac{T_V g}{V} \cos\theta = 0; \\ &\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + c_{\dot\vartheta} \frac{d\vartheta}{dt} + c_{\dot\alpha} \frac{d\alpha}{dt} + c_\alpha \alpha = c_\delta \delta; \\ &\vartheta = \theta + \alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (13.39)$$

где $T_V = \dfrac{mV}{c_y^\alpha S \dfrac{\rho V^2}{2} + P}$;

коэффициенты $c_{\dot\vartheta}$, $c_{\dot\alpha}$, $c_\alpha$ и $c_\delta$ определяются формулами (8.27).

В соответствии с фиг. 13.13 кинематические уравнения связи получим в следующем виде:

$$\frac{dL}{dt} = V_ц \cos(\varphi - \theta_ц) - V\cos(\varphi - \theta); \qquad (13.40)$$

$$L\frac{d\varphi}{dt} = -V_ц \sin(\varphi - \theta_ц) + V\sin(\varphi - \theta); \qquad (13.41)$$

Полагая систему уравнений снаряда линейной, запишем в общем виде ее уравнение

$$P_\delta(p)\,\delta = F(\psi, \alpha, \dot\vartheta, \dot\varphi, L, \ldots), \qquad (13.42)$$

где $P_\delta(p)$ — полином $p = d/dt$, характеризующий запаздывания в системе управления, связанные с формированием законов управления;

$F(\psi, \alpha, \dot\vartheta, \dot\varphi, \ldots, L)$ — линейная функция аргументов $\psi$, $\alpha$, $\dot\vartheta$, $\dot\varphi$, ... и, возможно, нелинейная функция дальности $L$.

Аргументы $\psi$, $\alpha$, $\dot\vartheta$, $\varphi$, ..., могут оказаться под воздействием полиномов $Q(p)$, степени которых равны или ниже степени $P_\delta(p)$. Число аргументов $F(\psi, \alpha, \dot\vartheta, \dot\varphi, \ldots, L)$ определяется набором располагаемых технических средств для измерения и формирования сигналов $\psi$, $\alpha$, $\dot\vartheta$, $\varphi$, ... Получившийся при данном наборе сигналов $\psi$, $\alpha$, ... вид функции $F(\psi, \alpha, \dot\vartheta, \dot\varphi, \ldots, L)$ определит тот или иной метод наведения.

Формулы (13.39)—(13.42) не поддаются исследованию с целью выбора надлежащего вида уравнения (13.42), а следовательно, и метода наведения с учетом имеющихся технических средств. Поэтому для анализа динамики самонаведения будем рассматривать

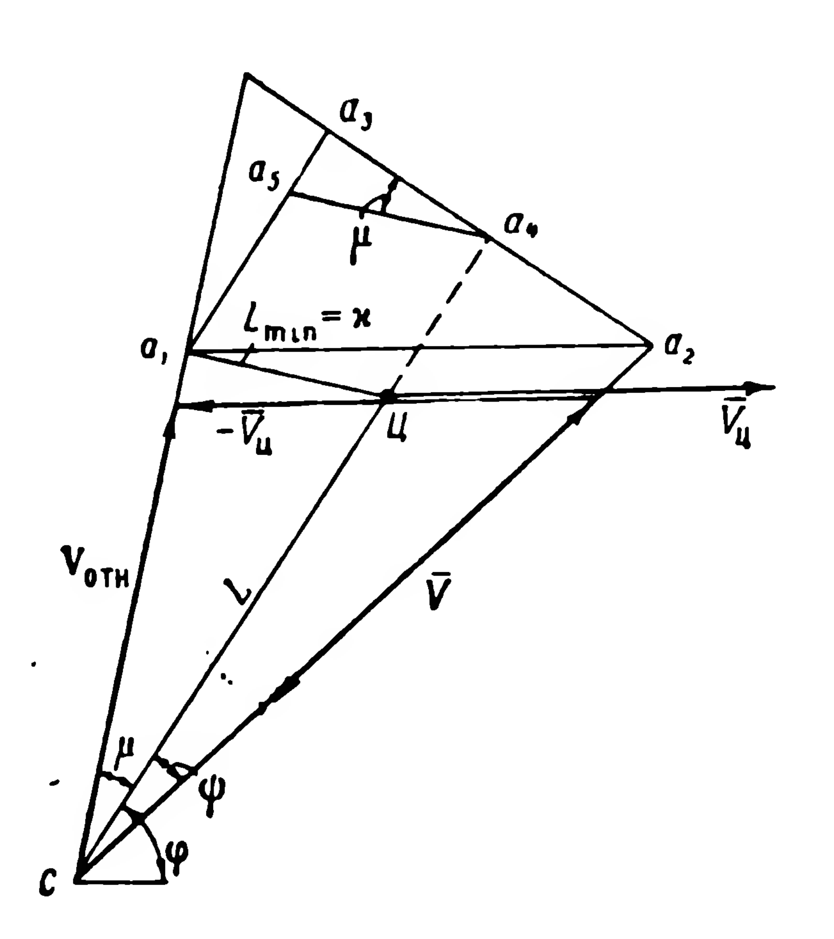
* Скорость $V = V(t)$ можно определить из уравнений (8.52) и кинематических траекторий самонаведения.

движение снаряда относительно некоторого невозмущенного прямолинейного движения снаряда и цели с постоянными значениями $V=V_e$ и $V=V_{\text{ц}e}$ и осуществим соответственно линеаризацию уравнений (13.39)—(13.41). Однако прежде линеаризации этих выражений рассмотрим понятие о промахе снаряда.

## 2. Промах снаряда

Это понятие связано со стрельбой по цели (подвижной или неподвижной) неуправляемыми снарядами. Промах — это минимальное расстояние $L_{\min}$ между траекториями цели и снаряда. На фиг. 13.15 показано мгновенное положение цели *Ц* и снаряда *С* для некоторого момента времени. Если начиная с этого момента времени векторы скорости снаряда и цели останутся постоянными, то будет иметь место некоторый промах $L_{\min}$, обозначенный на фиг. 13.15 буквой $\varkappa$. Для определения промаха удобно принять картину относительного движения. Для этого из конца вектора снаряда $\overline{V}$ откладывают вектор $-V_{\text{ц}}$. Сумма векторов $\overline{V}$ и $-\overline{V}_{\text{ц}}$ образует вектор относительной скорости снаряда $\overline{V}_{\text{отн}}$, т. е.

$$\overline{V}_{\text{отн}}=\overline{V}-\overline{V}_{\text{ц}}. \qquad (13.43)$$



Фиг. 13.15. Схема мгновенного положения цели и снаряда.

По направлению $\overline{V}_{\text{отн}}$ будет двигаться снаряд, и в точке $a_1$ расстояние между целью и снарядом окажется минимальным, т. е. равным промаху $\varkappa$. Если векторы $\overline{V}_{\text{ц}}$ и $V$ постоянны, то и промах есть величина постоянная. Если $\overline{V}_{\text{ц}}\neq\text{const}$ и $V\neq\text{const}$, то и промах (точнее вектор промаха) есть величина непрерывно изменяющаяся. Заметим, что при параллельном сближении промах, очевидно, равен нулю.

Выразим промах через основные кинематические параметры $L$ и $\varphi$. Промах $\varkappa$ на фиг. 13.15 представляется отрезком $\overline{a_1 Ц}$, равным отрезку $\overline{a_4 a_5}$. Обозначим время движения снаряда до дальности $L=\varkappa$ величиной $t_c$. Тогда

$$t_c V_{\text{отн}}=Ca_1=L\cos\mu. \qquad (13.44)$$

Далее отрезок $\overline{a_3a_4}$ равен

$$\overline{a_3a_4} = t_c [V_ц \sin\varphi - V\sin\psi] = -t_c L\dot{\varphi}.$$

Следовательно, промах $\varkappa$ будет

$$\varkappa = -t_c L\dot{\varphi}\frac{1}{\cos\mu}. \tag{13.45}$$

Исключая из формул (13.44) и (13.45) время $t_c$, находим

$$\varkappa = -\frac{L^2\dot{\varphi}}{V_{отн}}, \tag{13.46}$$

где
$$V_{отн} = V\cos(\psi+\mu) - V_ц\cos(\varphi+\mu). \tag{13.47}$$

Угол $\mu$ можно рассматривать как угловой промах или угловую ошибку прицеливания. Ошибка прицеливания всегда невелика, т. е. угол $\mu$ в нормальных условиях не может быть большим. В связи с этим можно считать, что

$$V_{отн} \approx V_{сб} = V\cos\psi - V_ц\cos\varphi. \tag{13.48}$$

## 3. Линеаризация уравнений движения самонаводящихся снарядов

Как уже упоминалось, в качестве невозмущенного движения будет приниматься движение, при котором векторы скорости снаряда и цели остаются постоянными в течение всего процесса сближения. Этот вид невозмущенного движения реализуется при всех методах наведения, рассмотренных в § 1, т. е. при наведении с постоянным углом упреждения и при параллельном сближении. Любые отклонения вектора скорости цели от некоторого постоянного значения $\overline{V}_{цe}$ и величины скорости снаряда от $V_e$ будут выглядеть как некоторые дополнительные возмущающие силы, действующие на систему самонаведения снаряда. При методе погони угол упреждения равен нулю и невозмущенными движениями будет полет снаряда с углами $\varphi_e = \begin{cases}0\\ \pi\end{cases}$.

Положим $L = L_e + \Delta L$; $\varphi = \varphi_e + \Delta\varphi$; $\theta = \theta_e + \Delta\theta$; $\theta_ц = \theta_{цe} + \Delta\theta_ц$ $V_ц = V_{цe} + \Delta V_ц$; $V = V_e + \Delta V$. Здесь величины с индексом «$e$» пред-; ставляют собой параметры невозмущенного режима (при этом $\theta_{цe} = 0$). Для невозмущенного режима справедливы соотношения

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_e}{dt} &= V_{цe}\cos\varphi_e - V_e\cos(\varphi_e - \theta_e) = -V_{сб} = \text{const};\\ 0 &= -V_{цe}\sin\varphi_e + V_e\sin(\varphi_e - \theta_e). \end{aligned}\right\} \tag{13.49}$$

Подставляя переменные $L = L_e + \Delta L$, $\varphi = \varphi_e + \Delta\varphi$ в уравнения (13.40) и (13,41), учитывая уравнение невозмущенного режима

(13.49) и отбрасывая члены второго порядка малости, получим линейные уравнения для малых отклонений от невозмущенного режима

$$\frac{d\Delta L}{dt} = -V_e \sin(\varphi_e - \theta_e)\Delta\theta + f_L(t); \qquad (13.50)$$

$$\frac{L_e}{V_{\text{сб}}}\frac{d\Delta\varphi}{dt} - \Delta\varphi = -k_V\Delta\theta + f_\varphi(t); \qquad (13.51)$$

где

$$L_e = L_0 - V_{\text{сб}}t; \; k_V = \frac{V_e \cos(\varphi_e - \theta_e)}{V_{\text{сб}}};$$

$$f_L(t) = \cos\varphi_e \Delta V_{\text{ц}} - \cos(\varphi_e - \theta_e)\Delta V + V_{\text{ц}e}\sin\varphi_e\Delta\theta_{\text{ц}}, \qquad (13.52)$$

$$f_\varphi(t) = \frac{1}{V_{\text{сб}}}[V_{\text{ц}e}\cos\varphi_e\Delta\theta_{\text{ц}} - \sin\varphi_e\Delta V_{\text{ц}} + \sin(\varphi_e - \theta_e)\Delta V]. \qquad (13.53)$$

Уравнение (13.50) в дальнейшем не потребуется. С помощью его после определения $\Delta\theta$ можно уточнить $L=L(t)$, так как $L= =L_e + \Delta L$. Однако это уточнение закона изменения дальности особенного смысла не имеет.

Формулу (13.51) можно записать относительно промаха $\varkappa$. Сопоставляя производные выражения для промаха (13.46) и выражения (13.51), получим

$$\frac{d\varkappa}{dt} = L_e k_V \frac{d\Delta\theta}{dt} - L_e\dot{f}_\varphi(t). \qquad (13.54)$$

Уравнения (13.51) и (13.54) есть уравнения с переменным коэффициентом $L_e = L_0 - V_{\text{сб}}t$.

Уравнения снаряда (13.39) также являются уравнениями с переменными коэффициентами $T_V$, $V$, $m_\omega$, $m_{\dot\alpha}$, $m_\alpha$ и $m_\delta$. Однако закономерности изменения коэффициентов уравнения снаряда и коэффициента $L_e$ кинематического уравнения (13.51) или (13.54) имеют принципиальное различие. Коэффициент $L_e$ при $t=L_0/V_{\text{сб}}$ обращается в нуль, тогда как коэффициенты уравнений снаряда в нуль не обращаются (за исключением, возможно, $m_\alpha$) и их изменение никак не связано с самим фактом сближения снаряда с целью. Решающим в процессе самонаведения является изменение коэффициента $L_e$. В связи с этим будем считать коэффициенты формул (13.39) постоянными, но различными для различных режимов полета снаряда.

Полагая отклонения в направлении полета снаряда от невозмущенного направления небольшими, в первом уравнении (13.39) последнее слагаемое можно считать постоянным или настолько медленно меняющейся величиной, что его производными можно пренебречь. Далее в выражение (13.39) вместо величин $\vartheta$ и $\theta$ сле-

дует взять их отклонения $\Delta\vartheta$ и $\Delta\theta$. Таким образом, вместо формул (13.39) получим следующую группу уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &T_V \frac{d\Delta\theta}{dt} - \alpha = -\frac{T_V g}{V_e}\cos\theta_e; \\ &\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + c_{\dot\vartheta}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + c_{\dot\alpha}\frac{d\Delta\alpha}{dt} + c_\alpha\Delta\alpha = c_\delta\Delta\delta; \\ &\Delta\vartheta = \Delta\theta + \Delta\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{13.55}$$

Теперь можно получить еще одно выражение для промаха

$$\frac{d\varkappa}{dt} = L_e\frac{k_V}{T_V}\alpha + f_\varkappa(t), \tag{13.56}$$

где

$$f_\varkappa(t) = -L_e\dot f_\varphi(t) - \frac{gL_e k_V}{V_e}\cos\theta_e. \tag{13.57}$$

Вместо угла атаки $\alpha$ в выражение (13.56) можно ввести перегрузку, развиваемую снарядом.

## § 13.3. ДИНАМИКА САМОНАВЕДЕНИЯ СНАРЯДА ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ СБЛИЖЕНИИ

### 1. Уравнения динамики самонаведения при различных законах управления

В начальный момент самонаведения, который совпадает либо с моментом старта снаряда, либо с моментом включения системы управления, всегда имеется некоторый начальный промах $\varkappa_0$. Система управления снарядом и предназначается для уменьшения начального промаха $\varkappa_0$ до нуля или до некоторого минимального значения, при котором дистанционный взрыв боевой части снаряда обеспечит поражение цели. Целью исследования динамики самонаведения является изучение закономерностей изменения промаха и выбор такого закона управления снарядом, при котором за время самонаведения промах снизился бы или до нуля, или до необходимого минимального значения.

Из выражения (13.56) с очевидностью вытекает, по какому закону следует изменять угол атаки снаряда или перегрузку, чтобы обеспечить асимптотическое уменьшение начального промаха. В самом деле, если потребуем, чтобы

$$\alpha = -\frac{k_\varkappa}{L_e}\varkappa, \tag{13.58}$$

то получим уравнение для промаха в виде

$$\frac{d\varkappa}{dt} + k\varkappa = f_\varkappa(t). \tag{13.59}$$

Решение уравнения (13.59) при $f_\varkappa(t) = 0$ имеет хорошо известный вид

$$\varkappa = \varkappa_0 e^{-kt},$$

где $k = k_V k_\varkappa / T_V$. За счет $k_\varkappa$ следует выбрать $k$ так, чтобы $3/k$ [*сек*] было меньше времени самонаведения. Если $f_\varkappa(t) = f_\varkappa = \text{const}$, то решение уравнения (13.59) примет вид

$$\varkappa = \varkappa_0 e^{-kt} + \frac{f_\varkappa}{k}(1 - e^{-kt}). \tag{13.60}$$

Как видно, постоянная возмущающая сила $f_\varkappa$ приводит к промаху $f_\varkappa/k$. Постоянная составляющая $f_\varkappa$ определяется силой веса [см. формулу (13.57)]. Однако поскольку направление полета снаряда $\theta_e$ примерно известно, то в закон управления всегда можно ввести постоянный сигнал, компенсирующий влияние силы веса снаряда. Кроме силы веса, возмущение $f_\varkappa$ возникает из-за маневра цели. В самом деле, слагаемое $L_e \dot{f}_\varphi(t)$ в выражении (13.57) при $V = \text{const}$ равно

$$L_e \left( \frac{\cos\varphi_e}{V_{\text{сб}}} V_{\text{ц}e} \Delta\dot{\theta}_{\text{ц}} - \frac{\sin\varphi_e}{V_{\text{сб}}} \Delta\dot{V}_{\text{ц}} \right). \tag{13.61}$$

Отсюда видно, что продольная перегрузка цели $\Delta\dot{V}_{\text{ц}}$ и боковая перегрузка цели $V_{\text{ц}e}\Delta\dot{\theta}_{\text{ц}}$ приводят к появлению возмущающей силы $f_\varkappa$.

Для повышения точности самонаведения и снижения промаха при постоянных и медленно меняющихся возмущениях следует повысить порядок астатизма системы, т. е. пополнить закон управления или закон изменения угла атаки (13.58) интегральным членом:

$$\alpha = -\frac{k_\varkappa}{L_e}\varkappa - \frac{q_\varkappa}{L_e}\int_0^t \varkappa\,dt. \tag{13.62}$$

В этом случае уравнение относительно промаха будет уравнением второго порядка

$$\frac{d^2\varkappa}{dt^2} + 2\zeta\Omega_0 \frac{d\varkappa}{dt} + \Omega_0^2 \varkappa = \dot{f}_\varkappa(t), \tag{13.63}$$

где

$$2\zeta\Omega_0 = \frac{k_\varkappa k_V}{T_V} \quad \text{и} \quad \Omega_0^2 = \frac{q_\varkappa k_V}{T_V}.$$

Если $f_x(t) = \text{const}$, то правая часть уравнения равна нулю и действие $f_x$ не приводит к промаху снаряда. Соответственно при медленном изменении $f_x(t)$ промах будет мал ввиду малости $\dot{f}_x(t) = df_x/dt$. Коэффициент $q_x$ выбирается так, чтобы $3/\Omega_0 \leqslant t_c$, где $t_c$ — время самонаведения. Коэффициент $k_x$ определяет относительный коэффициент затухания $\zeta$, который должен быть взят равным $\sqrt{2}/2$ (напомним, что при этом значении коэффициента затухания получается оптимальный переходный процесс с временем регулирования $t_p \approx \frac{3}{\Omega_0}$).

Уравнения самонаведения (13.59) и (13.63) получились уравнениями с постоянными коэффициентами благодаря специальному виду законов управления (13.58) и (13.62), в которые входит мгновенное значение дальности до цели. Раскрывая в формуле (13.58) значение промаха, получим

$$\alpha = + k_x \frac{L_e \dot{\varphi}}{V_{сб}}. \tag{13.64}$$

Как показывает выражение (13.64), для образования закона управления требуются измерители дальности до цели $L$, скорости сближения $V_{сб} = \left|\frac{dL_e}{dt}\right|$, угловой скорости линии снаряд — цель $\dot{\varphi}$ и счетно-решающее устройство для образования сигнала согласно формуле (13.64).

Канал измерения дальности весьма трудно реализовать на снаряде. Кроме того, радиолокационные каналы измерения дальности обладают, как правило, невысокой помехозащищенностью. Таким образом, использовать сигналы $L_e$ и $V_{сб}$ нежелательно. Известные трудности возникают при осуществлении операций умножения и деления в соответствии с требованиями закона управления (13.64).

В связи с этим при методе параллельного сближения ограничиваются законами *

$$\alpha = - k_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi} \tag{13.65}$$

и

$$\alpha = - k_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi} - q_{\dot{\varphi}} \int_0^t \dot{\varphi} dt. \tag{13.66}$$

При законе управления (13.65) имеем уравнение для промаха в виде

$$\frac{dx}{dt} + \frac{k}{t_0 - t} x = f_x, \tag{13.67}$$

* Знак минус в формуле (13.46) при такой записи законов управления должен быть опущен.

где $l = l_0 - t = \frac{L_c}{V_{сб}} - t$ — секундная дальность до цели;

$$k = \frac{k_V}{T_V} k_{\dot{\varphi}}; \quad l_0 = \frac{L_0}{V_{сб}}.$$

При интегральном управлении — закон (13.66) — уравнение для промаха примет вид

$$\frac{1}{l}\frac{d\varkappa}{dt} + \frac{k}{l^2} + q\int_0^t \frac{\varkappa}{l^2}dt = \frac{1}{l} f_\varkappa(t), \tag{13.69}$$

где

$$k = \frac{k_V}{T_V} k_{\dot{\varphi}}; \; q = \frac{k_V}{T_V} q_{\dot{\varphi}}.$$

После дифференцирования получим

$$l^2 \frac{d^2\varkappa}{dt^2} + (k+1) l \frac{d\varkappa}{dt} + (lq + 2k)\varkappa = l^2 \dot{f}_\varkappa(t) + l f_\varkappa(t). \tag{13.70}$$

В выражениях (13.67) и (13.70) фигурирует переменный коэффициент $l = l_0 - t$, поэтому они являются нестационарными линейными уравнениями. Эти уравнения имеют одну существенную особенность — их решение имеет особую точку при $t = l_0$. Особая точка соответствует моменту попадания снаряда в цель. Прежде чем производить дальнейший анализ динамики самонаведения при параллельном сближении, остановимся вкратце на линейных нестационарных уравнениях с особыми точками.

## 2. Нестационарные линейные уравнения второго порядка с особыми точками

Достаточно общий вид линейных уравнений второго порядка с особой точкой следующий:

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + P(t)\, t \frac{dx}{dt} + Q(t)\, x = 0, \tag{13.71}$$

где

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$$

и

$$Q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \ldots$$

являются рядами или полиномами $t$.

Решение уравнения (13.71) ищется в форме ряда

$$x = t^\rho \sum_{s=0}^{\infty} k_s t^s. \tag{13.72}$$

Подставляя выражение (13.72) в уравнение (13.71) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $t$, получим ряд уравнений для определения $\rho$ и $k_s$ ($s=0, 1, 2 \ldots$):

$$\left.\begin{aligned}
&[\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0]\,k_0=0,\\
&[(\rho+1)\rho+a_0(\rho+1)+b_0]\,k_1+a_1\rho k_0+b_1k_0=0,\\
&[(\rho+2)(\rho+1)+a_0(\rho+2)+b_0]\,k_2+a_1(\rho+1)\,k_1+\\
&+a_2\rho k_0+b_1k_1+b_2k_0=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (13.73)$$

В первом уравнении (13.73) $k_0 \neq 0$ и может быть взято произвольной величиной (в частности, равной 1). Следовательно, из первого уравнения определяется показатель $\rho$:

$$\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0. \qquad (13.74)$$

Уравнение (13.74) для определения показателя $\rho$ называется определяющим. Уравнение это квадратное и имеет два корня $\rho_1$ и $\rho_2$. Если разность корней $\rho_1-\rho_2$ не равна целому положительному числу или нулю, то решение (13.71) будет иметь следующий вид:

$$x=c_1t^{\rho_1}\sum_{s=0}^{\infty}k_st^s+c_2t^{\rho_2}\sum_{s=0}^{\infty}h_st^s, \qquad (13.75)$$

где $c_1$ и $c_2$ — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий;
$k_s$ — коэффициенты, определяемые последовательно из уравнений (13.73) при $\rho=\rho_1$;
$h_s$ — коэффициенты, определяемые из той же системы уравнений при $\rho=\rho_2$.

Если разность корней определяющего уравнения равна целому положительному числу или нулю, то слагаемые (13.75) теряют линейную независимость и решение (13.71) ищется в форме

$$x=c_1t^{\rho_1}\sum_{s=0}^{\infty}k_s t^s+c_2\left[\left(t^{\rho_1}\sum_{s=0}^{\infty}k_st^s\right)\lg x+t^{\rho_2}\sum_{s=0}^{\infty}h_sx^s\right]. \qquad (13.76)$$

Очень часто уравнение вида (13.71) является уравнением Бесселя

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+t\frac{dx}{dt}+(t^2-\nu^2)=0, \qquad (13.77)$$

где $\nu$ — постоянное число (параметр).

Для уравнения (13.77) ряды в решениях (13.75) и (13.76) носят название Бесселевых или цилиндрических функций. Если $\nu$ не целое или не половина целого нечетного числа, то решение (13.77) имеет вид

$$x=c_1I_\nu(t)+c_2I_{-\nu}(t), \qquad (13.78)$$

где $I_\nu(t)$ — Бесселева функция порядка $\nu$ первого рода.

Если $\nu$ — целое число $n$ или нуль, слагаемые в (13.78) теряют линейную независимость и решением (13.77) будет выражение

$$x=c_1I_n(t)+c_2K_n(t), \qquad (13.79)$$

где $K_n(t)$ — функция Бесселя порядка $n$ второго рода.

Бесселевы функции хорошо изучены. Имеются их подробные таблицы и графики *. В связи с этим анализ процессов, описываемых уравнением (13.77), не представляет труда. В случае, когда параметр $\nu$ равен половине целого нечетного числа, функции Бесселя выражаются через элементарные функции.

Отметим еще один важный случай уравнения (13.71):

$$t^2 \frac{d^2x}{dt^2} + (b - t)\,t \frac{dx}{dt} - atx = 0$$

или

$$t \frac{d^2x}{dt^2} + (b - t) \frac{dx}{dt} - ax = 0. \qquad (13.80)$$

Выражение (13.80) является вырожденным гипергеометрическим уравнением, которому удовлетворяют вырожденные гипергеометрические функции

$$F_1(a, b, t) = 1 + \frac{a}{b}\,t + \frac{a(1+a)}{b(1+b)}\,t^2 + \frac{a(1+a)(2+a)}{b(1+b)(2+b)}\,t^3 + \ldots .$$

Если $b$ не целое число, то решение (13.80) имеет вид

$$x = c_1 F_1(a, b, t) + c_2 t^{1-b} F_1(a - b + 1,\ 2 - b,\ t). \qquad (13.81)$$

Гипергеометрические функции табулированы и изучены значительно беднее Бесселевых. Графики функций для различных значений $a$ и $b$ можно найти в книге Е. Янке и Ф. Эмде. *

При параметре $b$, равном целому числу, слагаемые в формуле (13.81) теряют линейную независимость. Для получения решения в этом случае используется гипергеометрическая функция второго рода $F_2(a, b, t)$, которая конструируется по типу второго слагаемого выражения (13.76).

На фиг. 13.16 приведены графики функций $F_1(a, b, t)$ и $F_2(a, b, t)$ для $b=2$ и $a=-4$, $a=-9$. Заметим, что если $a=-n$, где $n$ — натуральное число, то $F_1(a, b, t)$ и $F_2(a, b, t)$ превращаются в многочлены, причем $F_1(a, b, t)$ с точностью до постоянного множителя равна обобщенному многочлену Чебышева — Лягерра.

Как видно из этих графиков, при больших значениях аргумента течение обеих функций имеет монотонный характер, при малых значениях — колебательный. Функция $F_2(a, b, t)$ при $t \to 0$ уходит в бесконечность. Одно из решений (13.75), (13.78) или (13.81) при $t=0$ обращается в бесконечность, что можно установить, рассматривая корни определяющего уравнения. Если корень $\rho_2 < 0$, то, очевидно, второе слагаемое (13.75) при $t=0$ обращается в бесконечность.

Для уравнения Бесселя определяющее уравнение имеет вид

$$\rho(\rho - 1) + \rho - \nu^2 = 0$$

или

$$\rho^2 - \nu^2 = 0,$$

откуда

$$\rho_1 = \nu \quad \text{и} \quad \rho_2 = -\nu .$$

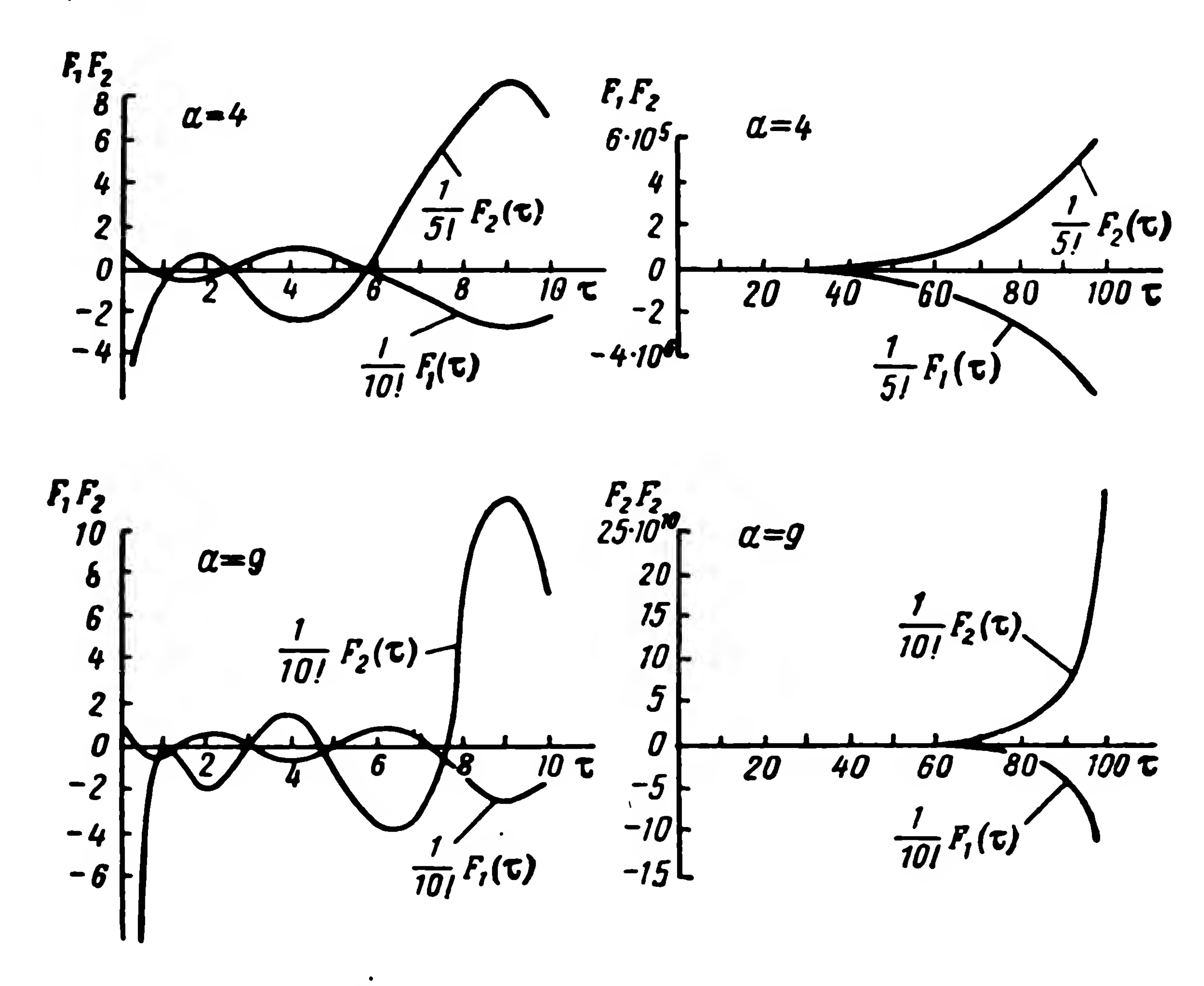
Таким образом, второе решение уравнения Бесселя, а соответственно и функция Бесселя второго рода всегда бесконечна при $t=0$.

* Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959.

Для гипергеометрического уравнения определяющее уравнение записывается так:

$$\rho(\rho-1)+b\rho=0.$$

Следовательно, $\rho_1=0$ и $\rho_2=1-b$ и второе решение гипергеометрического уравнения обращается в бесконечность при всех $b>1$, что видно также из формулы (13.81).




Фиг. 13.16. Графики функций $F_1(\tau)$ и $F_2(\tau)$.

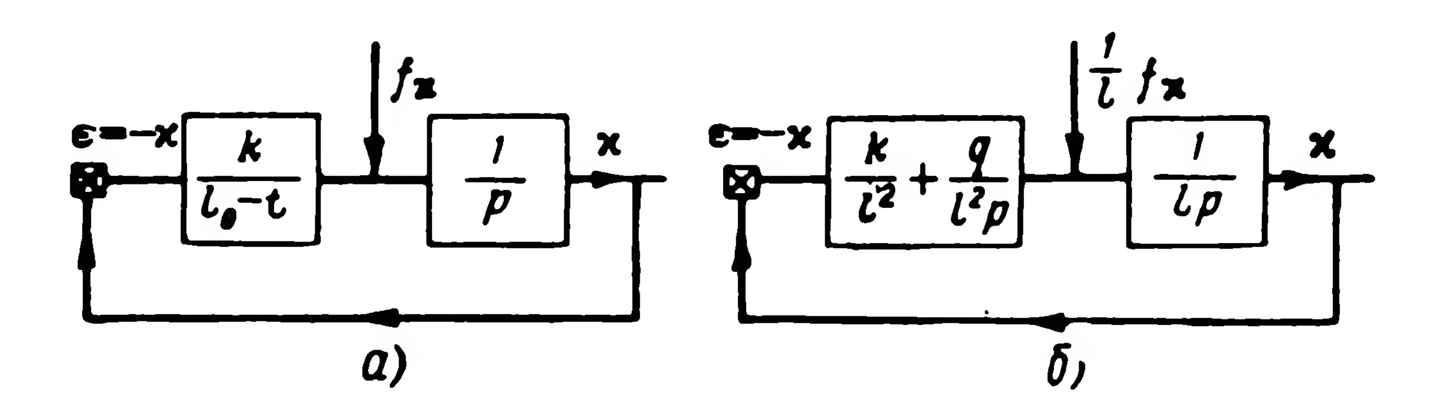
## 3. Анализ и сопоставление законов параллельного сближения

Параллельное сближение с законами управления (13.58) и (13.62), которые приводят к стационарным уравнениям, было обследовано в разд. 1 этого параграфа.

Обратимся теперь к уравнению (13.67). Это уравнение как, впрочем, и выражения (13.59), (13.63) и (13.69), представляет собой уравнение замкнутой системы автоматического регулирования промаха $\varkappa$. При этом ошибкой системы является отрицательное значение промаха $\varkappa$. Структурные схемы, соответствующие формулам (13.67) и (13.69), приведены на фиг. 13.17, *а*, *б*.

Необходимо отметить, что к структурным схемам, звенья которых имеют переменные параметры, неприменимы правила преобразования и свертывания структурных схем линейных стационарных систем. Однако о некоторых общих свойствах нестационар-

ных систем по их структурным схемам сделать выводы все же можно. Так, например, в схеме, приведенной на фиг. 13.17, *а*, имеется усилительное звено с коэффициентом $\frac{k}{l_0 - t}$, обращающимся в бесконечность при $t = l_0$. Из этого можно сделать вывод, что ограниченное по модулю возмущение $f_x$ не должно в данном




Фиг. 13.17. Структурные схемы, соответствующие уравнениям (13.67) и (13.69).

случае приводить к промаху. Справедливость этого вывода подтверждается решением уравнения (13.67) при $f_x = \text{const}$:

$$x = x_0\left(\frac{l}{l_0}\right)^k + \frac{f_x}{k-1}\, l\left[1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^{k-1}\right]. \qquad (13.82)$$

Из этого решения видно, что составляющая промаха от возмущения обращается в нуль при $l = 0$. Таким образом, необходимости в интегральном законе (13.66) как будто бы нет. Однако это не совсем так. Дело в том, что самонаведение из-за ослепления координатора цели приходится прекращать на некотором расстоянии до цели $L_{\min}$ (или $l_{\min}$). Поэтому именно при дальности $L_{\min}$, а не при дальности, равной нулю, нужно уменьшить промах до возможно малой величины. Потребность в интегральном законе с этой точки зрения по-прежнему остается. Из этих же соображений важное значение приобретает величина $k$ в выражении (13.82). Величина $k$ определяется выбором коэффициента пропорциональности в законе управления (13.65). Если потребовать, чтобы при достижении $l = l_{\min}$ промах уменьшался до 5% своего начального значения, то получим

$$k = \frac{\lg 20}{\lg \frac{l_0}{l_{\min}}}. \qquad (13.83)$$

Поскольку $l_{\min}$ задано, то из формулы (13.83) видно, что при большой начальной дальности одна и та же точность будет при меньшем коэффициенте усиления системы. Поскольку коэффи-

циент $k$ нельзя взять слишком большим, то получается, что самонаведение нельзя начинать при слишком малых начальных дальностях. Большая начальная дальность выгодна со всех точек зрения: успеет уменьшиться начальный промах и коэффициент усиления можно взять небольшим. При малом же коэффициенте усиления снаряд оказывается нечувствительным к высокочастотным помехам, определяемым, в частности, флюктуациями отраженного от цели сигнала.

Сопоставляя законы управления по промаху (13.58) и по угловой скорости (13.65), можно заключить, что закон управления по угловой скорости обеспечивает самонаведение с любых дальностей и, если отвлечься от шумовых помех, более высокую точность попадания; при законе управления по промаху происходит экспоненциальное уменьшение промаха и поэтому время самонаведения всегда должно быть больше времени регулирования. С учетом шумовых помех различия между обоими законами в смысле точности попадания становится несущественными. Закон управления по промаху, как выше уже отмечалось, значительно сложнее реализовать, чем закон по угловой скорости.

Таким образом, преимущество в основном остается за законом регулирования по угловой скорости. В § 1 настоящей главы указывалось, что закон управления по угловой скорости в некоторых источниках называется законом пропорциональной навигации.

Теперь обратимся к интегральному закону по угловой скорости. Рассмотрим уравнение (13.70) при $f_\varkappa = \dot{f}_\varkappa = 0$, введя новую независимую переменную $l = l_0 - t$.

Для новой переменной уравнение (13.70) примет вид

$$l^2 \frac{d^2\varkappa}{dl^2} - (k+1)\frac{d\varkappa}{dl} + (ql + 2k)\varkappa = 0. \qquad (13.84)$$

В первую очередь проверим значение промаха при $l=0$. Для этого составим определяющее уравнение

$$\rho(\rho - 1) - (k+1)\rho + 2k = 0.$$

Корни определяющего уравнения $\rho_1 = k$ и $\rho_2 = 2$ положительны, следовательно, согласно выражению (13.75) промах при $l=0$ также равен нулю.

Подстановками $\tau = 2\sqrt{ql}$ и $y = \varkappa l^{-\frac{k+2}{2}}$ уравнение (13.84) превращается в уравнение Бесселя порядка $\nu = k-2$. Следовательно, решение уравнения (13.84) будет иметь вид

$$\varkappa = l^{\frac{k+1}{2}} \left[C_1 I_{k-2}\left(2\sqrt{ql}\right) + C_2 I_{-(k-2)}\left(2\sqrt{ql}\right)\right], \qquad (13.85)$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

Для начальных условий $\varkappa\Big|_{l=l_0}=0,\ \dfrac{d\varkappa}{dl}\Big|_{l=l_0}=0$ постоянные $C_1$ и $C_2$ имеют следующие выражения:

$$C_1=\frac{\varkappa_0}{l_0^{\frac{k+2}{2}}}\cdot\frac{I'_{k+2}(\tau_0)}{I_{k-2}(\tau_0)\,I'_{k+2}(\tau_0)-I'_{k-2}(\tau_0)\,I_{-k+2}(\tau_0)},\qquad(13.86)$$

$$C_2=\frac{\varkappa_0}{l_0^{\frac{k+2}{2}}}\cdot\frac{I'_{k-2}(\tau_0)}{I_{k-2}(\tau_0)\,I'_{k+2}(\tau_0)-I'_{k-2}(\tau_0)\,I_{-k+2}(\tau_0)},\qquad(13.87)$$

где

$$I'_\nu(\tau_0)=\frac{d}{d\tau}I_\nu(\tau)\,|_{\tau=\tau_0}.$$

Для производных функций Бесселя справедлива формула

$$\frac{dI_\nu(\tau)}{d\tau}=I_{\nu-1}(\tau)-\frac{1}{\tau}I_\nu(\tau).\qquad(13.88)$$

Если $k-2$ — целое число $n$, то функции $I_{-k+2}(\tau)$ в выражениях (13.85), (13.86) и (13.87) следует заменить на функцию второго рода $K_n(\tau)$. Формула (13.88) справедлива и для функций второго рода.

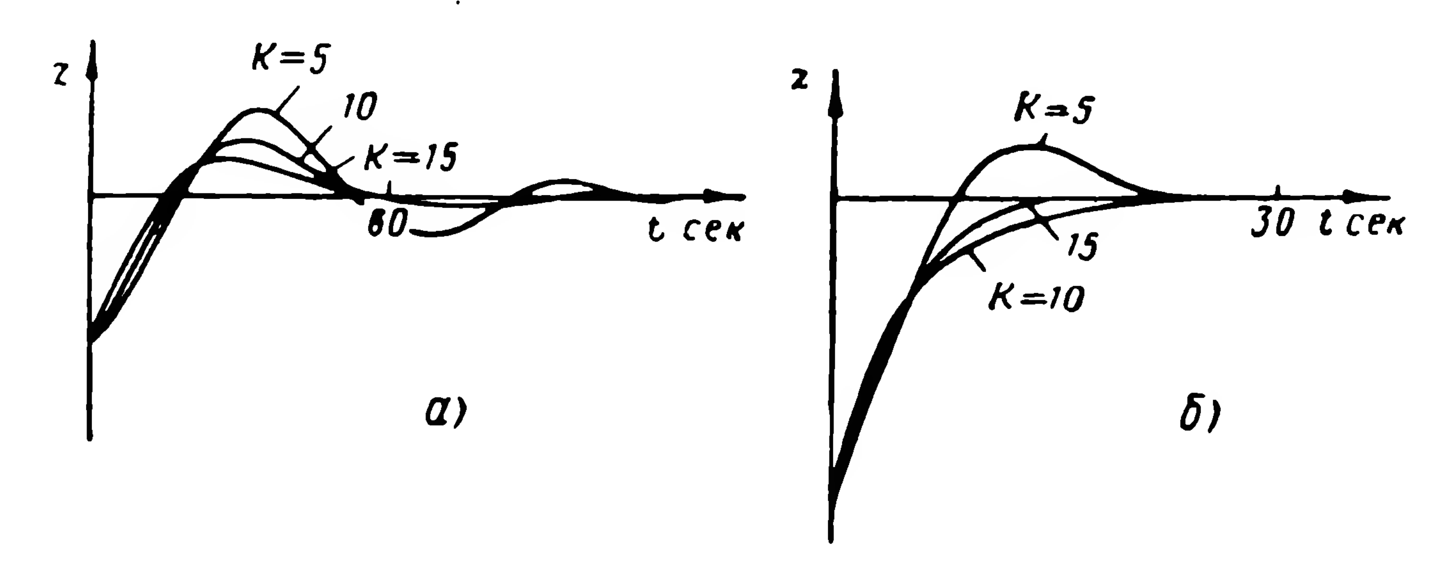
Функции Бесселя любого порядка $\nu$ представляют собой почти незатухающие колебания с переменным периодом. Как видно из решения (13.85), затухание колебаний текущего промаха определяется величиной $k$. Чем выше $k$, тем интенсивнее затухают колебания. Коэффициент $q$ (порция интегрального управления) определяет «периоды» колебательного затухающего движения. При одних и тех же значениях $k$ и $q$ характер колебаний промаха в сильной степени зависит от начальной дальности $L_0$ (или $l_0$). Чем больше дальность, тем более колебательным оказывается процесс уменьшения промаха. На фиг. 13.18 по формуле (13.85) вычислены кривые изменения промаха для $q=1{,}0\,\frac{1}{сек}$ и различных значений $k$ для $l_0=160$ *сек* и $l_0=30$ *сек*. Течение кривых подтверждает, что процесс уменьшения начального промаха при большой дальности носит более колебательный характер. Зависимость затухания от дальности можно установить из анализа уравнения (13.70), зафиксировав («заморозив») для различных моментов времени значение переменного коэффициента $l$. Запишем однородное уравнение (13.70) в нормированной форме, считая $l$ — параметром:

$$\frac{d^2\varkappa}{dt^2}+2\zeta\Omega_0\frac{d\varkappa}{dt}+\Omega_0^2\varkappa=0,\qquad(13.89)$$

где

$$\Omega_0 = \frac{q}{l} + \frac{2k}{l^2}; \quad 2\zeta\Omega_0 = \frac{k+1}{l}; \quad \zeta = \frac{k+1}{2\sqrt{ql+2k}}.$$

По мере сближения с целью растет и собственная частота колебаний и коэффициент относительного затухания.




Фиг. 13.18. Кривые изменения промаха снаряда.

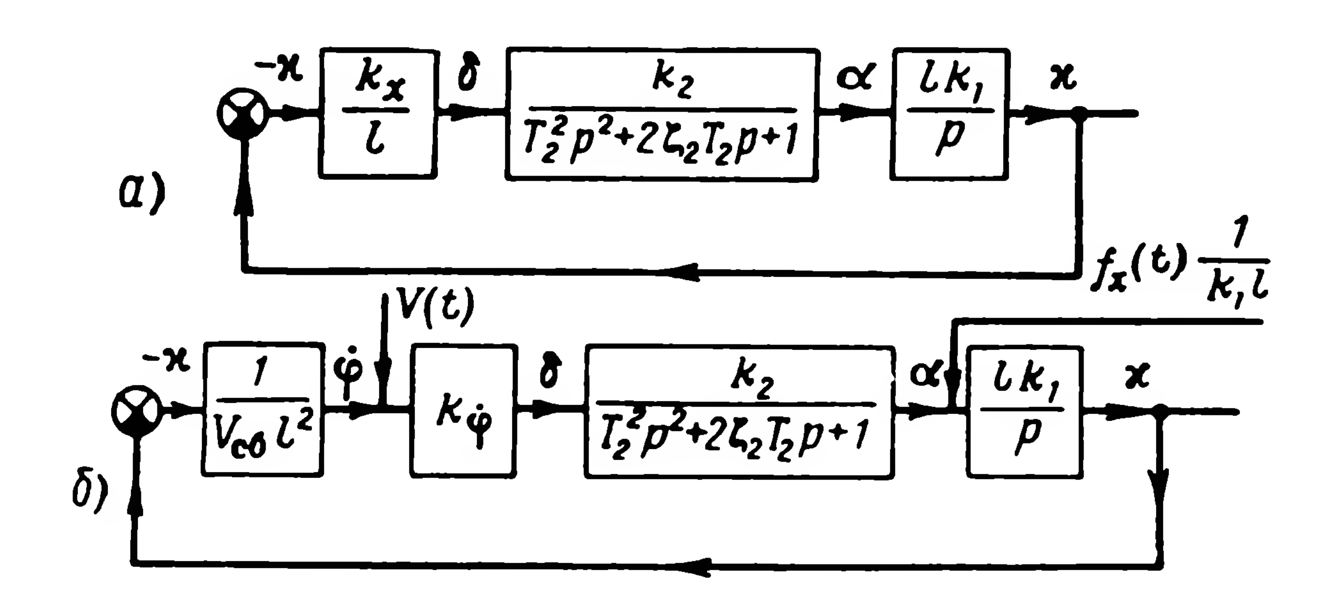
## 4. Влияние запаздывания в установлении управляющей силы на процесс параллельного сближения

Законы управления в виде выражений (13.58), (13.62), (13.65) и (13.66) предполагают, что угол атаки и пропорциональная ему боковая управляющая сила пропорциональны и без запаздывания следуют за всеми изменениями суммарного сигнала управления. Однако в действительности имеет место запаздывание сигналов управления при их усилении и преобразовании в бортовой системе управления снарядом и, кроме того, в снарядах с неподвижными крыльями имеется запаздывание между отклонением рулей и углом атаки. Последнее запаздывание наиболее существенно. Известно, что связь между углом атаки и углом отклонения руля в линейном приближении характеризуется передаточной функцией колебательного звена. На фиг. 13.19, *а*, *б* приведены структурные схемы, соответствующие законам управления (13.58) и (13.65) с учетом реальной связи между углом атаки и углом отклонения руля (запаздывание в системе управления не учитывается). На структурных схемах введены следующие обозначения:

$$k_1 = \frac{V_{сб} k_V}{T_V} [м/сек^2], \quad k_2 = \frac{m_\delta}{m_\alpha + \frac{m_\alpha}{T_V}}; \quad T_2^2 = \frac{1}{m_\alpha + \frac{m_\omega}{T_V}},$$

$$2\zeta_2 T_2 = \frac{m_\omega + m_\alpha + \frac{1}{T_V}}{m_\alpha + \frac{m_\omega}{T_V}}.$$

Для того чтобы можно было исследовать влияние запаздывания в установлении угла атаки или управляющей силы на процесс самонаведения, не выходя за пределы хорошо изученных линейных уравнений второго порядка, аппроксимируем колебательное звено в структурных схемах на фиг. 13.19 инерционным звеном. Такая аппроксимация возможна при коэффициенте затухания $\zeta > 1{,}0$,




Фиг. 13.19. Структурные схемы, соответствующие законам управления (13.58) и (13.65).

когда оба вещественных полюса колебательного звена сильно различаются. В этом случае, пренебрегая бóльшим из полюсов, получим вместо колебательного звена инерционное. Запаздывание управляющей силы в таком виде характерно также для снарядов с непосредственным регулированием боковой силы. К таким снарядам относятся снаряды с поворотными крыльями и снаряды с боковой реактивной тягой.

Уравнения самонаведения с учетом запаздывания управляющей силы для обоих законов управления будут иметь следующий вид:

для управления по промаху

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varkappa}{dt} = lk_1\alpha + f_\varkappa(t),\\ &T_2\frac{d\alpha}{dt} + \alpha = k_2\delta,\\ &\delta = -k_x\frac{1}{l}\varkappa; \end{aligned}\right\} \qquad (13.90)$$

для управления по угловой скорости линии снаряд — цель

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\varkappa}{dt} = lk_1\alpha + f_\varkappa(t), \\ &T_2\frac{d\alpha}{dt} + \alpha = k_2\delta, \\ &\delta = -k_{\dot\varphi}\dot\varphi, \\ &\dot\varphi = \frac{1}{V_{сб}l^2}\varkappa, \end{aligned}\right\} \tag{13.91}$$

(см. сноску на стр. 432).

Исключая из формул (13.90) переменные $\alpha$ и $\delta$, получим уравнение второго порядка для промаха

$$T_2\frac{d^2\varkappa}{dt^2} + \left(\frac{T_2}{l} + 1\right)\frac{d\varkappa}{dt} + k\varkappa =$$

$$= \left(1 + \frac{T_2}{l}\right)f_\varkappa(t) + T_2\dot f_\varkappa(t), \tag{13.90a}$$

где

$$k = k_1k_2k_\varkappa\left[\frac{1}{сек}\right].$$

Таким же образом получим уравнение для промаха из системы уравнений (13.91):

$$T_2\frac{d^2\varkappa}{dt^2} + \left(\frac{T_2}{l} + 1\right)\frac{d\varkappa}{dt} + \frac{k}{l}\varkappa =$$

$$= \left(\frac{T_2}{l} + 1\right)f_\varkappa(t) + T_2\dot f_\varkappa(t), \tag{13.91a}$$

где

$$k = k_1k_2k_{\dot\varphi}\frac{1}{V_{сб}}.$$

Изучим прежде всего значение промаха в обоих случаях при $l=0$. Для этой цели исследуем однородные уравнения (13.90 а) и (13.91 а), введя новую независимую переменную $l$:

$$\frac{d^2\varkappa}{dl^2} - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{T_2}\right)\frac{d\varkappa}{dl} + \frac{k}{T_2}\varkappa = 0, \tag{13.90б}$$

$$\frac{d^2\varkappa}{dl^2} - \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{T_2}\right)\frac{d\varkappa}{dl} + \frac{k}{T_2 l}\varkappa = 0. \tag{13.91б}$$

Умножим оба уравнения на $l^2$ и найдем определяющие уравнения, которые одинаковы для обоих случаев:

$$\rho(\rho-1)-\rho=0.$$

Один корень определяющего уравнения равен нулю, а второй двум. Следовательно, в обоих случаях при $l=0$ промах оказывается равным нулю. Однако заключение о попадании снаряда в цель на основании того, что при $l=0$ промах $\varkappa=0$, является преждевременным.

Кроме закона изменения промаха, следует в процессе сближения с целью изучить поведение других координат системы, таких, например, как угол атаки или угол отклонения руля. Рассмотрим в первую очередь уравнение (13.91 б). С помощью подстановки

$$\varkappa(\tau)=\tau^2 w(\tau),$$

где

$$\tau=\frac{l}{T_2},$$

уравнение (13.91 б) приводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению при $b=3$ и $a=-(k-2)$ [см. формулу 13.80)]:

$$\tau\frac{d^2w}{d\tau^2}+(3-\tau)\frac{dw}{d\tau}+(k-2)w=0. \qquad (13.91\text{в})$$

Переменное $w$ в уравнении (13.91 в), как это видно из системы (13.91), с точностью до постоянных множителей равно углу отклонения руля $\delta$ и угловой скорости линии снаряд — цель $\dot{\varphi}$. Если из уравнений (13.91) исключить все переменные, кроме $\alpha$, то также получится гипергеометрическое уравнение с тем же параметром $a$ и с параметром $b=2$:

$$\tau\frac{d^2\alpha}{d\tau^2}+(2-\tau)\frac{d\alpha}{d\tau}+(k-2)\alpha=0, \qquad (13.91\text{г})$$

где по-прежнему $\tau=\frac{l}{T_2}=\frac{l_0-t}{T_2}$.

Определяющие уравнения для (13.91 в) и (13.91 г) имеют один корень нулевой, а второй отрицательный [$\rho_2=-3$ для (13.91 в) и $\rho_2=-2$ для (13.91 г)]. Таким образом, все координаты $\dot{\varphi}$, $\delta$ и $\alpha$ около цели стремятся к бесконечности, несмотря на то, что промах обращается в нуль. Правильнее следовало бы сказать, что точное попадание в цель возможно при бесконечно большом значении угла атаки или бесконечно большом значении боковой управляющей силы. А так как последнее невозможно, то самонаведение следует прекращать при достижении угла атаки (или перегрузки) некоторого допустимого предельного значения.

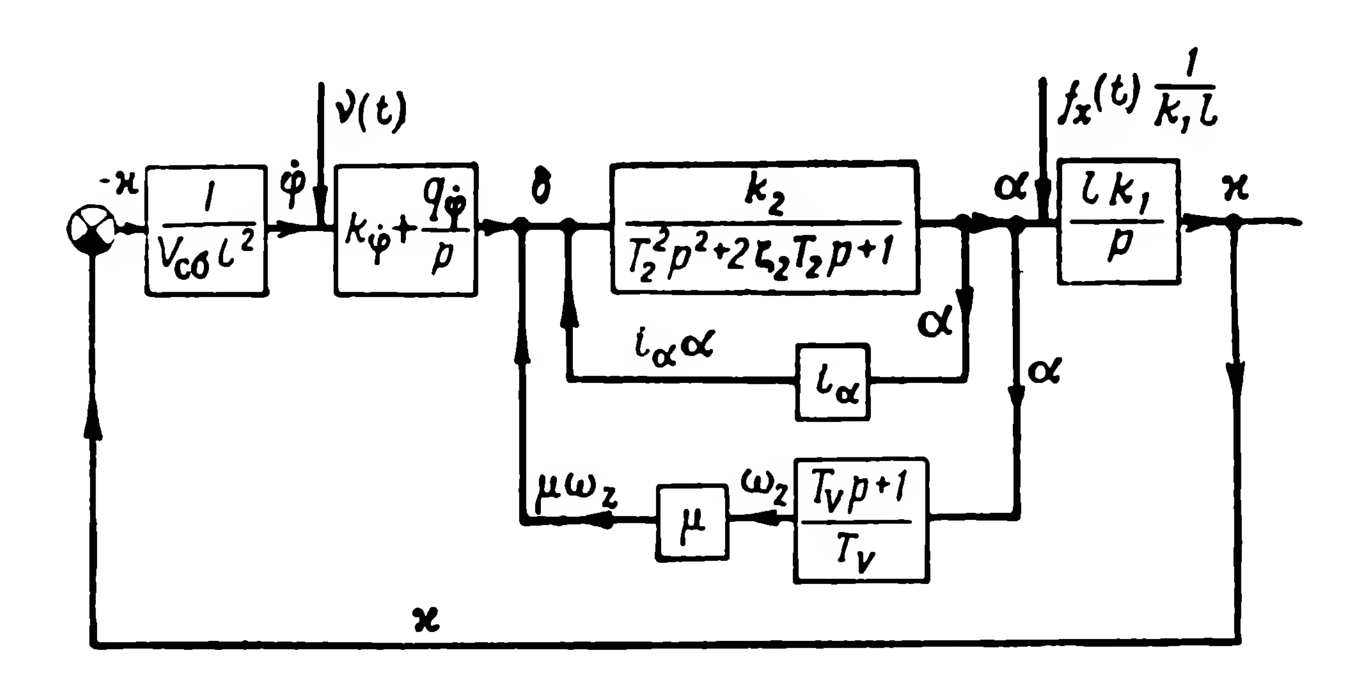
В процессе самонаведения угол атаки будет изменяться в соответствии с кривыми гипергеометрических функций. В начальный момент при большой дальности угол атаки будет уменьшаться и снаряд будет выходить в режим параллельного сближения. Интенсивность выбора начального промаха и уменьшение угла атаки тем выше, чем выше коэффициент усиления $k$. При приближении к цели, когда течение гипергеометрических функций принимает колебательный характер, любое возмущение приведет к колебательно-нарастающему изменению угла атаки. Самонаведение целесообразно выключить до того момента, когда колебания смогут возбудиться, и после того как режим параллельного сближения установился и угол атаки практически обратился в нуль. После выключения самонаведения полет снаряда становится неуправляемым и нужно считаться с наличием неизбежного промаха. Чем меньше дальность, при которой выключается самонаведение, тем, очевидно, меньше время неуправляемого полета и тем меньше промах. Из кривых гипергеометрических функций можно установить значение $\tau=\tau_{выкл}$, при котором следует выключить самонаведение. Так как $\tau=\frac{l}{T_2}=\frac{r}{V_{сб}T_2}$, то дальность выключения будет равна

$$L_{выкл}=\tau_{выкл}V_{сб}T_2. \tag{13.92}$$

Выражение (13.92) показывает, что чем меньше запаздывание, тем меньше $L_{выкл}$, меньше промах (при неуправляемом полете) и выше вероятность поражения цели. Таким образом, скородействие системы управления выступает как решающий фактор повышения вероятности поражения цели. Под скородействием системы управления в данном случае следует понимать скородействие всего контура угловых движений снаряда, который состоит из собственно бортовой системы управления и колебательного звена, характеризующего связь угла атаки с углом отклонения руля. Повышение скородействия этого контура требует повышения собственной частоты колебаний $\Omega_0$ колебательного звена при сохранении оптимального коэффициента демпфирования $\zeta$. Повышение собственной частоты колебаний требует использование сигнала по углу атаки или перегрузке. Обеспечение необходимого демпфирования осуществляется за счет сигнала $\omega_z=\dot{\vartheta}$, получаемого от скоростного гироскопа. Таким образом, закон управления рулем снаряда при параллельном сближении (по $\dot{\varphi}$) будет выглядеть следующим образом:

$$\delta=-\mu\omega_z-i_\alpha\alpha-k_{\dot{\varphi}}\dot{\varphi}-q_{\dot{\varphi}}\int_0^t\dot{\varphi}dt. \tag{13.93}$$

Структурная схема самонаведения с законом (13.93) при идеальных датчиках угловой скорости $\omega_z = \dot{\vartheta}$ и перегрузки (или угла атаки) $\alpha$ имеет вид, представленный на фиг. 13.20.



Фиг. 13.20. Структурная схема, соответствующая закону управления (13.93).

Теперь обратимся к управлению по промаху, динамика которого дается группой уравнений (13.90). Уравнение относительно угла атаки в этом случае будет иметь вид

$$\tau \frac{d^2\alpha}{d\tau^2} + (1 - \tau) \frac{d\alpha}{d\tau} + (T_2 k\tau - 1)\,\alpha = 0,$$

где по-прежнему $\tau = \frac{l}{T_2}$.

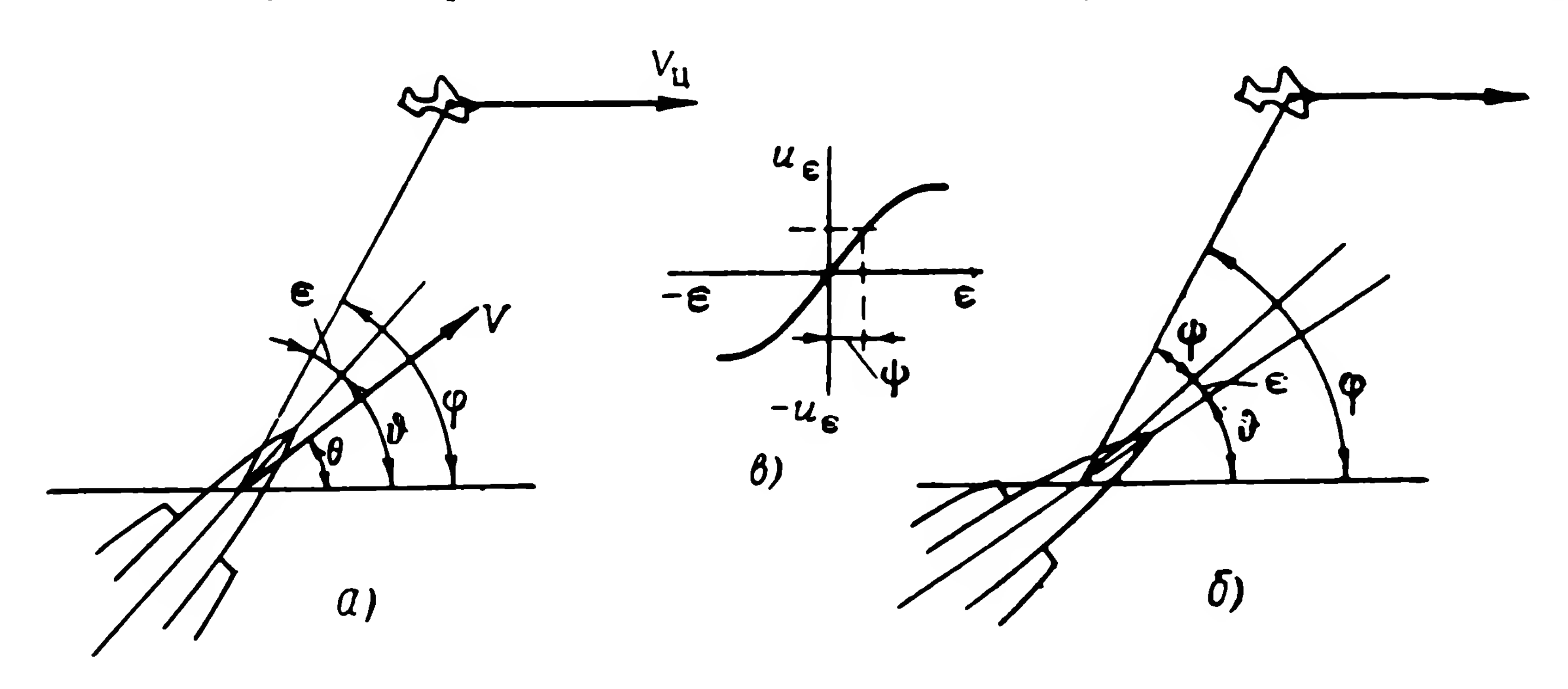
Оба корня определяющего уравнения равны нулю. Поэтому нарастания угла атаки при $l \to 0$ происходить не будет. С этой точки зрения закон управления по промаху имеет преимущество перед законом управления по угловой скорости. Можно рекомендовать совместное использование обоих законов: на начальном этапе управление по угловой скорости, а по мере приближения к цели уменьшать коэффициент усиления $k_{\varphi}$ пропорционально дальности $l$ [см. формулы (13.90) и (13.91)]. Если дальность измерить невозможно, то можно уменьшать коэффициент усиления в функции времени, поскольку особо большой точности здесь не требуется. Также можно поступить и при интегральном законе (13.93), изменяя соответствующим образом оба коэффициента $k_{\dot{\varphi}}$ и $q_{\dot{\varphi}}$.

## § 13.4. ДИНАМИКА САМОНАВЕДЕНИЯ ПРИ МЕТОДЕ ПОГОНИ

Рассмотрим динамику самонаведения по методу погони без упреждения, а также с упреждением на постоянный угол и на угол, пропорциональный угловой скорости линии снаряд — цель.

## 1. Динамика самонаведения при методе погони без упреждения и с постоянным углом упреждения

В качестве невозмущенного режима самонаведения, как и в предыдущем случае, принимается такой режим, при котором векторы скорости цели и снаряда считаются постоянными, а постоянный угол упреждения $\psi = \varphi_e - \theta_e$ выбирается таким, чтобы в невозмущенном режиме угловая скорость линии снаряд — цель $\dot{\varphi}_e$ равнялась нулю. При самонаведении без упреждения в невозмущенном режиме векторы скорости цели и снаряда расположены на одной линии. Они или совпадают по направлению (атака в хвост), или направлены навстречу (атака в лоб).




Фиг. 13.21. Схема самонаведения по методу погони без упреждения и с упреждением.

Таким образом, выведенные ранее (см. § 13.2) линеаризованные кинематические уравнения и выражения для промаха остаются в силе и для рассматриваемого случая.

При самонаведении по методу погони без упреждения используются простейшие координаторы цели (головки самонаведения), которые дают электрический сигнал, пропорциональный (в некотором диапазоне) углу $\varepsilon$ между линией снаряд — цель и оптической осью координатора цели (фиг. 13.21, *а*). Использование сигнала по углу $\varepsilon$ в качестве основного сигнала для наведения снаряда по методу погони является совершенно естественным. Этот сигнал воздействует на рулевые органы снаряда так, чтобы угол $\varepsilon$ уменьшался до нуля. Оптическая ось координатора совпадает или с продольной осью снаряда, или с направлением полета (с вектором скорости снаряда). В последнем случае метод самонаведения называют флюгерным. Для реализации флюгерного самонаведения координатор цели ориентируется по набегающему

потоку воздуха или в суммарный сигнал, воздействующий на рули, вводится сигнал, пропорциональный углу атаки.

При самонаведении по методу погони с постоянным углом упреждения (фиг. 13.21, *б*) можно использовать те же простейшие координаторы цели, которые применяются при самонаведении без упреждения. Постоянный угол упреждения задается в момент старта снаряда и может быть зафиксирован на снаряде двумя способами:

1) с помощью позиционного гироскопа координатора цели, ось которого совпадает с продольной осью снаряда;

2) с помощью поворотного координатора цели.

В первом случае от позиционного гироскопа на рулевые органы снаряда поступает постоянный сигнал. Этот сигнал уравновешивается сигналом от координатора цели, что и приводит к возникновению необходимого угла упреждения $\psi$. Для реализации этого способа требуется сравнительно большой участок пропорциональности характеристики координатора $u_\varepsilon = f(\varepsilon)$ (фиг. 13.21, *в*) с независимой от дальности крутизной. При втором способе этот участок может быть значительно меньше.

При самонаведении методом погони с постоянным углом упреждения сигналом, воздействующим на рули, также является сигнал угла $\varepsilon$ — угла между оптической осью головки самонаведения и направлением линии снаряд — цель, смещенной на постоянный угол упреждения $\psi$. При самонаведении с постоянным углом упреждения возможна также реализация флюгерного наведения.

Итак, по определению угол $\varepsilon$ при нефлюгерном наведении выражается следующим образом:

$$\varepsilon = \varphi - \psi - \vartheta,$$

а при флюгерном

$$\varepsilon = \varphi - \psi - \theta.$$

Выражая $\varphi$, $\theta$ и $\vartheta$ через их невозмущенные значения $\varphi_e$, $\theta_e$ и $\vartheta_e$ и приращения $\Delta\varphi$, $\Delta\theta$ и $\Delta\vartheta$ и учитывая, что в первом случае $\varphi_e - \psi - \vartheta_e = 0$, а во втором $\varphi_e - \psi - \theta_e = 0$, получим соответственно

$$\varepsilon = \Delta\varphi - \Delta\vartheta = \Delta\varphi - \Delta\theta - \Delta\alpha, \qquad (13.95)$$

$$\varepsilon = \Delta\varphi - \Delta\theta. \qquad (13.96)$$

Учитывая, что в выражениях для угла $\varepsilon$ фигурирует угол $\varphi$ (или $\Delta\varphi$), кинематическое уравнение связи движения цели и снаряда целесообразно взять в форме (13.51). При построении структурных схем удобнее рассматривать отрицательное значение $\Delta\varphi$ —

величину $\Delta\varphi^* = -\Delta\varphi$. В этом случае $\varepsilon = -\Delta\varphi^* - \Delta\theta$. С учетом этого система уравнений движения снаряда примет следующий вид[1]:

$$\left.\begin{aligned} & l\frac{d\Delta\varphi}{dt} - \Delta\varphi = +k_V\Delta\theta, \\ & T_V\frac{d\Delta\theta}{dt} = \alpha, \\ & T_2^2\frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2\zeta_2T_2\frac{d\alpha}{dt} + \alpha = k_2\delta, \\ & \Delta\vartheta = \alpha + \Delta\theta, \\ & \delta = k_\varepsilon\varepsilon, \\ & \varepsilon = \Delta\psi_0 - \Delta\varphi - \Delta\vartheta \end{aligned}\right\} \qquad (13.97)$$

или для флюгерного наведения

$$\varepsilon = \Delta\psi_0 - \Delta\varphi - \Delta\theta.$$

Второе, третье и четвертое уравнения системы (13.97) являются известными уравнениями динамики движения снаряда с постоянной скоростью. Пятое и шестое уравнения этой группы являются уравнениями идеальной (безынерционной) системы управления. Сигнал $\Delta\psi_0 = \text{const}$ в последних уравнениях представляет возможную ошибку в установке угла упреждения $\psi$ или угловую ошибку в установке координатора цели при наведении без упреждения.

Структурные схемы, соответствующие формулам (13.97) для нефлюгерного и флюгерного самонаведения приведены на фиг. 13.22. Выражения (13.97) и структурные схемы справедливы как для наведения с постоянным углом упреждения, так и для наведения без упреждения.

От различных направлений самонаведения с постоянным углом упреждения (в том числе равным нулю) зависит коэффициент

$$k_V = \frac{V}{V_{\text{сб}}}\cos(\varphi_e - \theta_e) = \frac{V}{V_{\text{сб}}}\cos\psi. \qquad (13.98)$$

Этот коэффициент входит в первое уравнение (13.97). Так, при атаке в хвост без упреждения $k_V > 1{,}0$, а при атаке в лоб $k_V < 1$. При атаке неподвижной цели $k_V = 1{,}0$. Коэффициент $k_V$ положителен, поскольку угол упреждения $\psi > \frac{\pi}{2}$ трудно реализуем и не нужен.

---

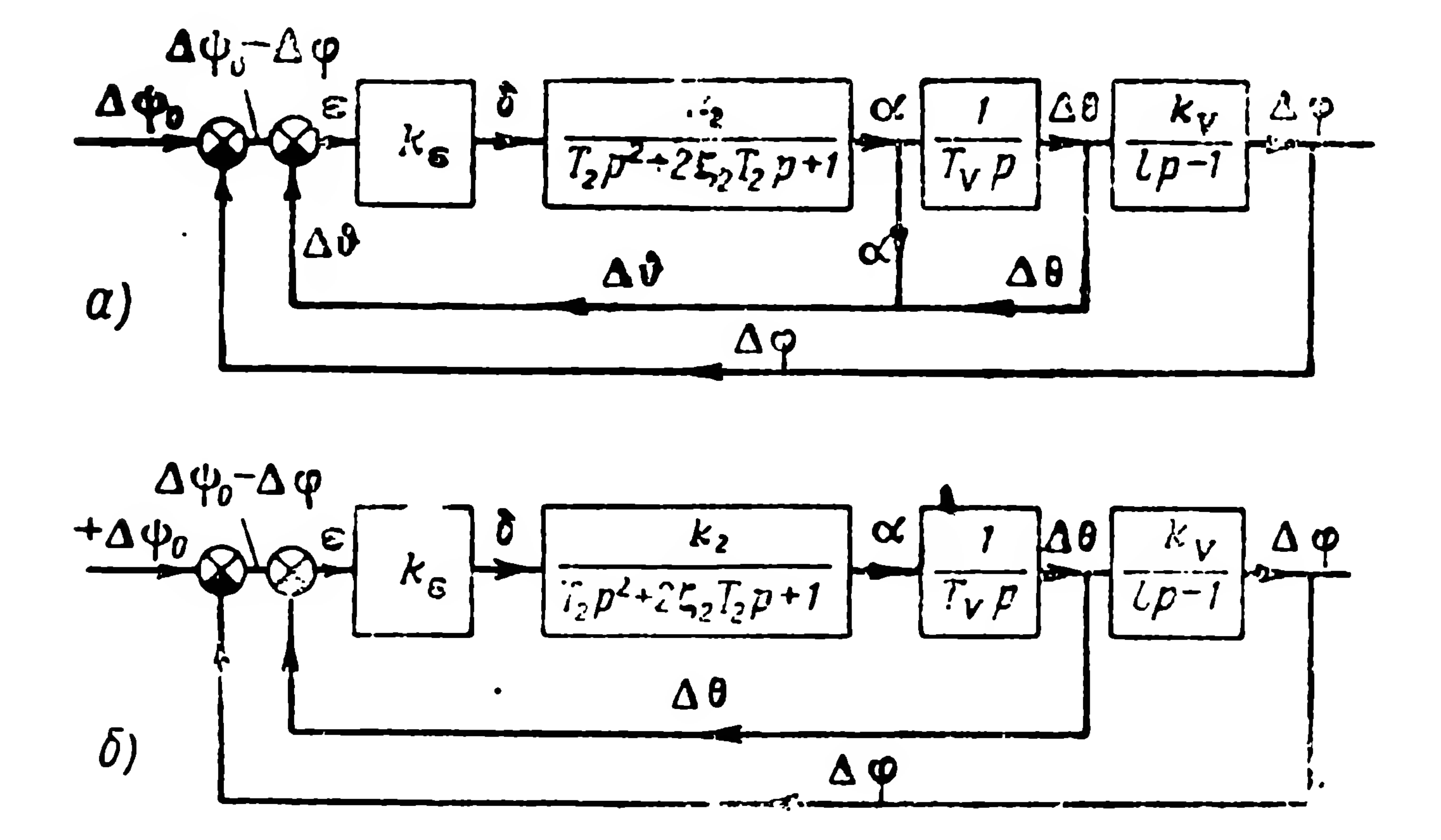
[1] Невозмущенное значение угла атаки $\alpha_e = 0$.
Знак (*) для $\Delta\varphi$ в уравнениях и структурных схемах опущен.

Для исследования динамики самонаведения доступными методами пренебрежем запаздыванием в установлении угла атаки снаряда и рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &l\frac{d\Delta\varphi}{dt} - \Delta\varphi = +k_V\Delta\theta, \\ &T_V\frac{d\Delta\theta}{dt} = \alpha, \\ &\Delta\vartheta = \alpha + \Delta\theta, \\ &\alpha = k_\varepsilon\varepsilon, \\ &\varepsilon = \Delta\psi_0 - \Delta\varphi - \Delta\nu \end{aligned}\right\} \quad (13.99)$$

или для флюгерного наведения

$$\varepsilon = \Delta\psi_0 - \Delta\varphi - \Delta\theta.$$




Фиг. 13.22. Структурные схемы, соответствующие уравнениям (13.97).

*а* — для нефлюгерного наведения, *б* — для флюгерного наведения.

Коэффициент $k_\varepsilon$ в четвертом уравнении (13.99) в отличие от пятого уравнения (13.97) является порцией угла атаки на единицу угла $\varepsilon$.

Проанализируем сначала случай нефлюгерного самонаведения. Исключая из уравнений (13.99) переменные $\Delta\theta, \Delta\alpha$, $\Delta\vartheta$ и $\varepsilon$, получим выражение для $\Delta\varphi$:

$$l\frac{d^2\Delta\varphi}{dt^2} + \left(\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}l - 2\right)\frac{d\Delta\varphi}{dt} + \frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}(k_V - 1)\Delta\varphi = \frac{k_V k_{\varepsilon 1}}{T_V}\Delta\psi_0, \quad (13.100)$$

где

$$k_{\varepsilon 1} = \frac{k_\varepsilon}{k_\varepsilon + 1}.$$

Из уравнения (13.100) видно, что, во-первых, ошибка в установке угла упреждения $\Delta\psi_0$ приводит к отклонению траектории снаряда от невозмущенного режима; во-вторых, увеличение коэффициента усиления $k_\varepsilon > 1$ не оказывает влияния на динамику самонаведения и, в-третьих, выражение (13.100) является вырожденным гипергеометрическим уравнением типа (13.80) с параметрами $b = 2$ и $a = -(k_V - 1)$ *. В этом случае в районе цели будет наблюдаться нарастание координаты $\Delta\varphi$. К этому нужно добавить, что нарастание координаты $\Delta\varphi$ будет наиболее интенсивным при атаках из передней полусферы, когда $k_V < 1$ и последний коэффициент уравнения (13.100) оказывается отрицательным. Для «замороженных» коэффициентов формулы (13.100) случай $k_V < 1$ означает потерю устойчивости, поскольку один из корней характеристического уравнения оказывается положительным. Аналогично в решении уравнения с переменными коэффициентами, т. е. в решении уравнения (13.100), как оно есть, при $k_V < 1$ будет иметь место нарастающая со временем компонента. При неблагоприятной комбинации начальных условий $\Delta\varphi_0$ и $\Delta\dot{\varphi}_0$ эта компонента может оказаться основной и тогда с самого начала самонаведения будет наблюдаться монотонное нарастание отклонения $\Delta\varphi$.

Остановимся на этом вопросе несколько подробнее и выясним, при какой комбинации начальных условий движение, описываемое уравнением (13.100), будет носить особенно неблагоприятный характер. «Заморозим» коэффициенты уравнения (13.100). В этом случае решение однородного уравнения при заданных начальных значениях $\Delta\varphi_0$ и $\Delta\dot{\varphi}_0$ будет иметь вид

$$\Delta\varphi = -\frac{\Delta\dot{\varphi}_0 \pm \Delta\varphi_0\eta}{\sigma \mp \eta} e^{-\sigma t} + \frac{\Delta\dot{\varphi}_0 + \Delta\varphi_0\sigma}{\sigma \mp \eta} e^{\mp\eta t}, \qquad (13.101)$$

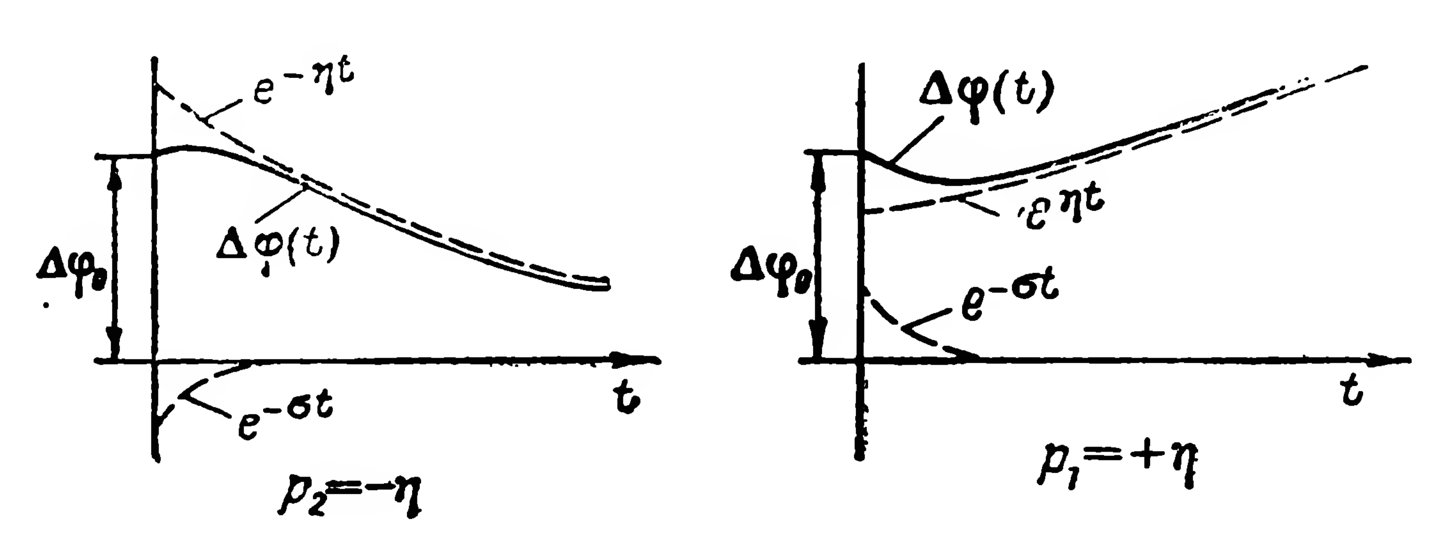
где $\sigma$ — абсолютное значение большого корня характеристического уравнения $p_1 = -\sigma$;

$\eta$ — абсолютное значение малого корня характеристического уравнения.

---

* В этом можно убедиться, введя новую независимую переменную $\tau = l^{\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}} = \left(l_0 - t\right)^{\frac{k_{\varepsilon 1}}{}}$.

При $k_V > 1$ малый корень отрицателен ($p_2 = -\eta$), а при $k_V < 1$ — положителен ($p_2 = \eta$). Как видно из (13.101), комбинация начальных условий $\Delta\varphi_0 = 0$, $\Delta\dot{\varphi}_0 \neq 0$ относится к неблагоприятной, поскольку в этом случае решающее значение будет иметь компонента, определяемая малым корнем. На фиг. 13.23 показан процесс, определяемый выражением (13.101) при положительном и отрицательном малом корне $p_2 = \pm\eta$ для упомянутых начальных условий.




Фиг. 13.23. Графики, построенные по уравнению (13.101).

Как видно из фиг. 13.23, начальное отклонение крайне медленно затухает при $p_2 = -\eta$ и начинает практически сразу нарастать при $p_2 = \eta$. При нулевом корне $p_2 = 0$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\dot{\varphi}_0}{\sigma}(1 - e^{-\sigma t}) + \Delta\varphi_0. \tag{13.102}$$

Начальное отклонение будет изменяться от $\Delta\varphi_0$ до $\Delta\varphi_0 + \frac{\Delta\dot{\varphi}_0}{\sigma}$ при $t \to \infty$. Теперь посмотрим, как будет изменяться угловая скорость $\Delta\dot{\varphi}$. После дифференцирования (13.101) находим

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{\Delta\dot{\varphi}_0 \pm \Delta\varphi_0\eta}{\sigma \mp \eta}\sigma e^{-\sigma t} \mp \eta\frac{\Delta\dot{\varphi}_0 + \Delta\varphi_0\sigma}{\sigma \mp \eta}e^{\mp\eta t}. \tag{13.103}$$

При начальных условиях $\Delta\varphi_0 = 0$, $\Delta\dot{\varphi}_0 \neq 0$ будем иметь

$$\Delta\dot{\varphi} = \frac{\Delta\dot{\varphi}_0}{\sigma \mp \eta}[\sigma e^{-\sigma t} \mp \eta e^{\mp\eta t}]. \tag{13.104}$$

При такой комбинации начальных условий малый корень (положительный или отрицательный) не оказывает практически влияния на интенсивность убывания угловой скорости.

Малый корень характеристического уравнения означает малое значение коэффициента $\frac{k_{\varepsilon 1}}{TV}(k_V - 1)$ в уравнении (13.100). Поэтому проведенный анализ полностью справедлив в отношении

начального этапа решения, даваемого нестационарными уравнениями типа (13.100). От уравнения (13.100) можно перейти к уравнению относительно промаха $\varkappa$. Для этого следует продифференцировать уравнение (13.100) и учесть, что

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt} = -\frac{1}{V_{\text{сб}} l^2}\varkappa. \qquad (13.105)$$

После дифференцирования (13.100), использования (13.105) и перехода к независимой переменной $l$ получим

$$l^2 \frac{d^2\varkappa}{dl^2} - l\left[1 + \frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V} l\right]\frac{d\varkappa}{dl} + \frac{k_{\varepsilon 1} k_V}{T_V} l\varkappa =$$

$$= \frac{V_{\text{сб}} k_V k_{\varepsilon 1}}{T_V} l^3 \frac{d\Delta\bar{\psi}_0}{dl}. \qquad (13.106)$$

Из уравнения (13.106) видно, что постоянная ошибка $\Delta\bar{\psi}_0$ не приводит к промаху. Определяющее уравнение для (13.106) не имеет отрицательных корней. Следовательно, несмотря на нарастание угла $\Delta\varphi$, начальный промах будет выбираться до нуля. Однако это уменьшение промаха до нуля сопровождается не только нарастанием координаты $\Delta\varphi$, но и нарастанием угла атаки, и собственно нулевое значение промаха может быть только при бесконечно большом значении угла атаки, что, конечно, невозможно.

Исключением ненужных переменных из выражений (13.99) находим уравнение для угла атаки (при $\Delta\psi_0 = 0$)

$$l\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V} l - 2\right)\frac{d\alpha}{dt} + \frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}(k_V - 2)\alpha = 0. \qquad (13.107)$$

Это соотношение также является вырожденным гипергеометрическим уравнением типа (13.80). Уравнение относительно промаха (13.106) может иметь малое значение последнего коэффициента $\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V} k_V$, а уравнение для угла атаки (13.107), как и формула (13.100), — отрицательное значение этого коэффициента. Однако промах пропорционален $d\Delta\varphi/dt$, а угол атаки пропорционален $d\Delta\theta/dt$, а для угловых скоростей согласно (13.104) влияние малого последнего коэффициента уравнения не существенно. Таким образом, для промаха и угла атаки процесс на начальном этапе самонаведения будет интенсивно сходиться. Для углов $\Delta\varphi$ и $\Delta\theta$, как следует из (13.101), процесс может или медленно сходиться ($k_V > 1$) или расходиться ($k_V < 1$). Однако это несущественно, поскольку такой результат просто означает неопределенность углов $\Delta\varphi$ и $\Delta\theta$ при сближении снаряда с целью.

Теперь рассмотрим случай флюгерного самонаведения. Из уравнений (13.99) и (13.96) получим соответственно выражения для отклонения $\Delta\varphi$, промаха $\varkappa$ и угла атаки $\alpha$:

$$\left.\begin{aligned} & l\frac{d^2\Delta\varphi}{dt^2}+\left(\frac{k_\varepsilon}{T_V}l-2\right)\frac{d\Delta\varphi}{dt}+\frac{k_\varepsilon}{T_V}(k_V-1)\Delta\varphi=\frac{k_V k_\varepsilon}{T_V}\Delta\psi_0,\\ & l\frac{d^2\varkappa}{dl^2}-l\left[1+\frac{k_\varepsilon}{T_V}l\right]\frac{d\varkappa}{dl}+\frac{k_\varepsilon k_V}{T_V}l\varkappa=V_{\text{сб}}\frac{k_V k_\varepsilon}{T_V}l^3\frac{d\Delta\psi_0}{dl},\\ & l\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\left(\frac{k_\varepsilon}{T_V}l-2\right)\frac{d\alpha}{dt}+\frac{k_\varepsilon}{T_V}(k_V-2)\alpha=0. \end{aligned}\right\} \qquad (13.108)$$

Уравнения (13.108) ничем не отличаются от соответствующих уравнений нефлюгерного самонаведения. Однако коэффициенту усиления $k_\varepsilon$ $\left(\text{в отличие от } k_{\varepsilon 1}=\dfrac{k_\varepsilon}{k_\varepsilon+1}\right.$ — при нефлюгерном наведении) можно придать любое желаемое значение. Следовательно, выбором $k_\varepsilon$ можно обеспечить желаемую интенсивность уменьшения отклонений и промаха на начальном участке самонаведения. Таким образом, флюгерное наведение может обеспечить более высокую точность попадания в цель именно благодаря возможности влияния на коэффициент $k_\varepsilon$. Что касается неблагоприятных явлений в движении снаряда, могущих возникнуть при $k_V<1$ (для угла $\Delta\varphi$), то картина при флюгерном самонаведении остается такой же, что и при нефлюгерном.

## 2. Динамика самонаведения при методе погони с дополнительным углом упреждения, пропорциональным угловой скорости линии снаряд—цель

Потребуем, чтобы угол упреждения при всяком отклонении от невозмущенного режима увеличивался на величину, пропорциональную угловой скорости линии снаряд — цель. Для достижения такого эффекта достаточно воздействовать на рули сигналом, пропорциональным $d\varphi/dt=d\Delta\varphi/dt$. При пренебрежении процессом установления угла атаки это будет означать, что угол атаки должен изменяться по закону

$$\alpha=k_\varepsilon\varepsilon+k_{\dot\varphi}\frac{d\Delta\varphi}{dt}. \qquad (13.109)$$

Из первых трех уравнений (13.99), уравнения (13.95) и закона управления (13.109) после исключения соответствующих переменных получим выражение для $\Delta\varphi$:

$$l\frac{d^2\Delta\varphi}{dt^2}+\left[\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}l-\left(2-\frac{k_V k_{\dot\varphi}}{T_V(1+k_\varepsilon)}\right)\right]\frac{d\Delta\varphi}{dt}+\frac{k_V-1}{T_V}k_{\varepsilon 1}\Delta\varphi=0, \qquad (13.110)$$

где

$$k_{\varepsilon 1} = \frac{k_\varepsilon}{k_\varepsilon + 1}.$$

После замены переменной $t$ на $\tau = \frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V} l = \frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}(l_0 - t)$ формула (13.110) превращается в гипергеометрическое уравнение (13.80) с параметрами

$$b = 2 - \frac{k_V k_{\dot{\varphi}} k_\varepsilon}{T_V}$$

и

$$a = -(k_V - 1).$$

Один из корней определяющего уравнения равен нулю, а второй равен $\rho = 1 - b$. Выбором $k_{\dot{\varphi}}$ можно всегда обеспечить $b < 1$ (или $\rho > 0$) и, следовательно, предотвратить нарастание координаты $\Delta\varphi$ в районе цели. Такой же точно вывод получается и в отношении угла атаки.

Из сопоставления выражений (13.110) и (13.100) видно, что путем введения сигнала $d\Delta\varphi/dt$ в закон управления можно увеличить демпфирующие свойства системы (поскольку выбором коэффициента $k_{\dot{\varphi}}$ можно изменить значение коэффициента при первой производной). Последний коэффициент уравнения не изменился от введения дополнительного сигнала $d\Delta\varphi/dt$ с порцией $k_{\dot{\varphi}}$ Поэтому все сказанное относительно поведения координаты $\Delta\varphi$ остается в силе и в данном случае.

Реализация закона управления (13.109) требует измерителя угловой скорости линии снаряд — цель такого же самого, какой необходим при реализации метода параллельного сближения. Для перехода к параллельному сближению достаточно в законе управления (13.109) положить коэффициент $k_\varepsilon$ равным нулю. Уравнение (13.110) превращается в этом случае в уравнение первого порядка относительно $\dot{\varphi} = d\Delta\varphi/dt$.

### 3. Динамика самонаведения по методу погони (с упреждением и без упреждения) при атаке неподвижной цели

При неподвижной цели $k_V = 1$ и все рассмотренные в разд. 1 и 2 настоящего параграфа уравнения вырождаются в уравнения первого порядка для угла атаки и для промаха, поскольку эти величины соответственно пропорциональны угловым скоростям $d\Delta\theta/dt$ и $d\Delta\varphi/dt$. Уже указывалось выше, что в этом случае имеет место неопределенность углов $\Delta\theta$ и $\Delta\varphi$ при сближении снаряда с целью. Покажем сначала, каким образом вырождается в урав-

нение первого порядка уравнение для промаха (13.106). Умножим это уравнение на $l^{-3}$ и запишем его относительно переменной $t$.

$$l^{-1}\frac{d^2\varkappa}{dt^2}+\left(l^{-2}+\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}l^{-1}\right)\frac{d\varkappa}{dt}+\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}l^{-2}\varkappa=0. \qquad (13.111)$$

Проверкой можно установить, что уравнение (13.111) является однократно продифференцированным уравнением первого порядка

$$\frac{d\varkappa}{dt}+\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}\varkappa=0, \qquad (13.112)$$

умноженным предварительно на $l^{-1}=\frac{1}{l_0-t}$. Таким образом, промах при атаке неподвижной цели изменяется в соответствии с решением уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами, а именно:

$$\varkappa=\varkappa_0 e^{-\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}t}. \qquad (13.113)$$

Чем меньше $T'_V$ и больше $k_{\varepsilon 1}$, тем интенсивнее убывает промах. При флюгерном наведении $k_{\varepsilon 1}$ должно быть заменено на $k_\varepsilon$ и интенсивность убывания промаха может быть увеличена.

Обращаясь к уравнению (13.107), для угла атаки при $k_V=1$ будем иметь:

$$l\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\left(\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}l-2\right)\frac{d\alpha}{dt}-\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}\alpha=0. \qquad (13.114)$$

Аналогично выражению (13.111) это уравнение получается однократным дифференцированием уравнения первого порядка:

$$l\frac{d\alpha}{dt}+\left(\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}l-1\right)\alpha=0. \qquad (13.115)$$

Уравнение (13.115) может быть решено путем разделения переменных:

$$\alpha=\alpha_0\frac{l_0}{l_0-t}e^{-\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}t}. \qquad (13.116)$$

Согласно уравнению (13.116) сначала угол атаки будет убывать так, как вначале $e^{-\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}t}$ убывает быстрее, чем нарастает $\frac{l_0}{l_0-t}$

К концу самонаведения картина изменится и начнется интенсивное возрастание $\frac{l_0}{l_0 - t}$ при почти неизменном $e^{-\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}t}$. В результате при $t \to l_0$ угол атаки $\alpha \to \infty$. Таким образом, экспоненциальное затухание промаха обеспечивается только бесконечно большим значением угла атаки в районе цели. Поскольку это невозможно, то самонаведение должно быть прекращено на некотором расстоянии до цели.

Согласно выражению (13.116) угол атаки имеет минимум. Найдем этот минимум и время, когда он наступает. После дифференцирования формулы (13.116) и приравнивания нулю производной получим

$$l_{\min} = l_0 - \frac{T_V}{k_{\varepsilon 1}} \tag{13.117}$$

и

$$\alpha_{\min} = \alpha_0 l_0 \frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V} e^{-\left(\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V} l_0 - 1\right)}. \tag{13.118}$$

Согласно уравнению (13.113) промах затухает до 5% своего начального значения через $3\frac{T_V}{k_{\varepsilon 1}}$. Это значение промаха совпадет с минимальным значением угла атаки при начальной дальности $l_0 = 4\frac{T_V}{k_{\varepsilon 1}}$. Если принять $T_V = 1{,}0$ *сек*, $k_\varepsilon = 2$ $\left(k_{\varepsilon 1} = \frac{2}{3}\right)$, то $l_0 = 4^3/_2 = 6$ *сек*, что, например, при скорости 200 *м/сек* составит 1200 *м*. При большей начальной дальности, чем $4V\frac{T_V}{k_{\varepsilon 1}}$, промах достигнет 5% от начального значения раньше, чем угол атаки достигнет минимального значения. Минимальное значение угла атаки тем меньше, чем больше начальная дальность $l_0 = \frac{L_0}{V}$. Определим минимальное значение угла атаки при $l_0 = 4\frac{T_V}{k_{\varepsilon 1}}$:

$$\alpha_{\min} = \alpha_0 4e^{-3} \approx 0{,}2\alpha_0.$$

Таким образом, в момент, когда промах снижается до 5% своего начального значения, угол атаки снижается до 20% своего начального значения. Начальное значение угла атаки определяется через начальное значение промаха. Для установления этой связи

выпишем систему исходных уравнений для неподвижной цели (например, для нефлюгерного наведения):

$$\left.\begin{aligned} & l\frac{d\Delta\varphi}{dt} = \Delta\varphi - \Delta\theta, \\ & T_V\frac{d\Delta\theta}{dt} = \alpha, \\ & \alpha = k_\varepsilon \varepsilon, \\ & \varepsilon = \Delta\varphi - \Delta\theta - \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (13.\ 119)$$

Из последних двух уравнений найдем

$$\frac{1}{k_{\varepsilon 1}}\alpha = \Delta\varphi - \Delta\theta. \qquad (13.\ 120)$$

Далее из формулы (13.105) для неподвижной цели получим

$$\frac{d\Delta\varphi}{dt} = -\frac{1}{Vl^2}\varkappa. \qquad (13.\ 121)$$

Сравнивая первое уравнение (13.119) и выражения (13.120) и (13.121), находим выражение для промаха, специфическое для данного случая:

$$\varkappa = -\frac{Vl}{k_{\varepsilon 1}}\alpha = -\frac{L}{k_{\varepsilon 1}}\alpha. \qquad (13.\ 122)$$

Отсюда начальное значение угла атаки при начальном промахе будет

$$\alpha_0 = -\frac{k_{\varepsilon 1}}{L_0}\varkappa_0. \qquad (13.\ 123)$$

Заметим, что уравнение для угла атаки (13.115) можно получить непосредственно из системы (13.119), а далее, используя связь (13.123), получим уравнение для промаха.

Рассмотрим еще влияние сигнала, пропорционального угловой скорости $d\Delta\varphi/dt$, в законе управления (13.109). Заменив в системе (13.119) третье выражение на формулу (13.109), получим уравнение для угла атаки

$$l\frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}l - 1 + \frac{k_{\varepsilon 1}k_{\dot\varphi 1}}{T_V} - \frac{k_{\dot\varphi 1}}{l + k_{\dot\varphi 1}}\right)\alpha = 0, \qquad (13.\ 124)$$

где

$$k_{\varepsilon 1}=\frac{k_{\varepsilon}}{k_{\varepsilon}+1} \quad \text{и} \quad k_{\dot\varphi 1}=\frac{k_{\dot\varphi}}{k_{\varepsilon}}.$$

Для данного случая промах через угол атаки будет иметь следующее выражение:

$$\varkappa=-\frac{Vl^2\alpha}{k_{\varepsilon 1}(l+k_{\dot\varphi 1})}. \tag{13.125}$$

Используя это выражение, получим из формулы (13.124) уравнение для промаха

$$\frac{d\varkappa}{dt}+\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}\frac{l+k_{\dot\varphi 1}}{l}\varkappa=0. \tag{13.126}$$

Оба уравнения решаются путем разделения переменных:

$$\alpha=\alpha_0\frac{l+k_{\dot\varphi 1}}{l_0+k_{\dot\varphi 1}}\left(\frac{l}{l_0}\right)^{b-2}e^{-\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}t} \tag{13.127}$$

и

$$\varkappa=\varkappa_0\left(\frac{l}{l_0}\right)^{b}e^{-\frac{k_{\varepsilon 1}}{T_V}t}, \tag{13.128}$$

где

$$b=\frac{k_{\varepsilon 1}k_{\dot\varphi 1}}{T_V}=\frac{k_{\dot\varphi}}{T_V(k_{\varepsilon}+1)}.$$

Как видно из этих выражений, промах убывает быстрее, чем по экспоненте, а угол атаки при $b>2$ не будет иметь минимума и при $t=l_0$ обращается, как и промах, в нуль. Таким образом, дополнительное регулирование по угловой скорости дает весьма благоприятные результаты.

Сопоставим законы (13.109) с законом параллельного сближения при атаке неподвижной цели. Для наведения по методу параллельного сближения достаточно в выражении (13.109) положить $k_{\varepsilon}=0$:

$$\alpha=k_{\dot\varphi}\frac{d\Delta\varphi}{dt}. \tag{13.129}$$

Используя первые два уравнения (13.119) и уравнение (13.129), находим выражение для промаха и угла атаки:

$$l\frac{d\varkappa}{dt} + \frac{k_{\dot{\varphi}}}{T_V}\varkappa = 0 \qquad (13.130)$$

и

$$l\frac{d\alpha}{dt} + \left(\frac{k_{\dot{\varphi}}}{T_V} - 2\right)\alpha = 0. \qquad (13.131)$$

В результате решения этих уравнений получим

$$\varkappa = \varkappa_0\left(\frac{l}{l_0}\right)^{\frac{k_{\dot{\varphi}}}{T_V}}, \qquad (13.132)$$

$$\alpha = \alpha_0\left(\frac{l}{l_0}\right)^{\frac{k_{\dot{\varphi}}}{T_V} - 2}. \qquad (13.133)$$

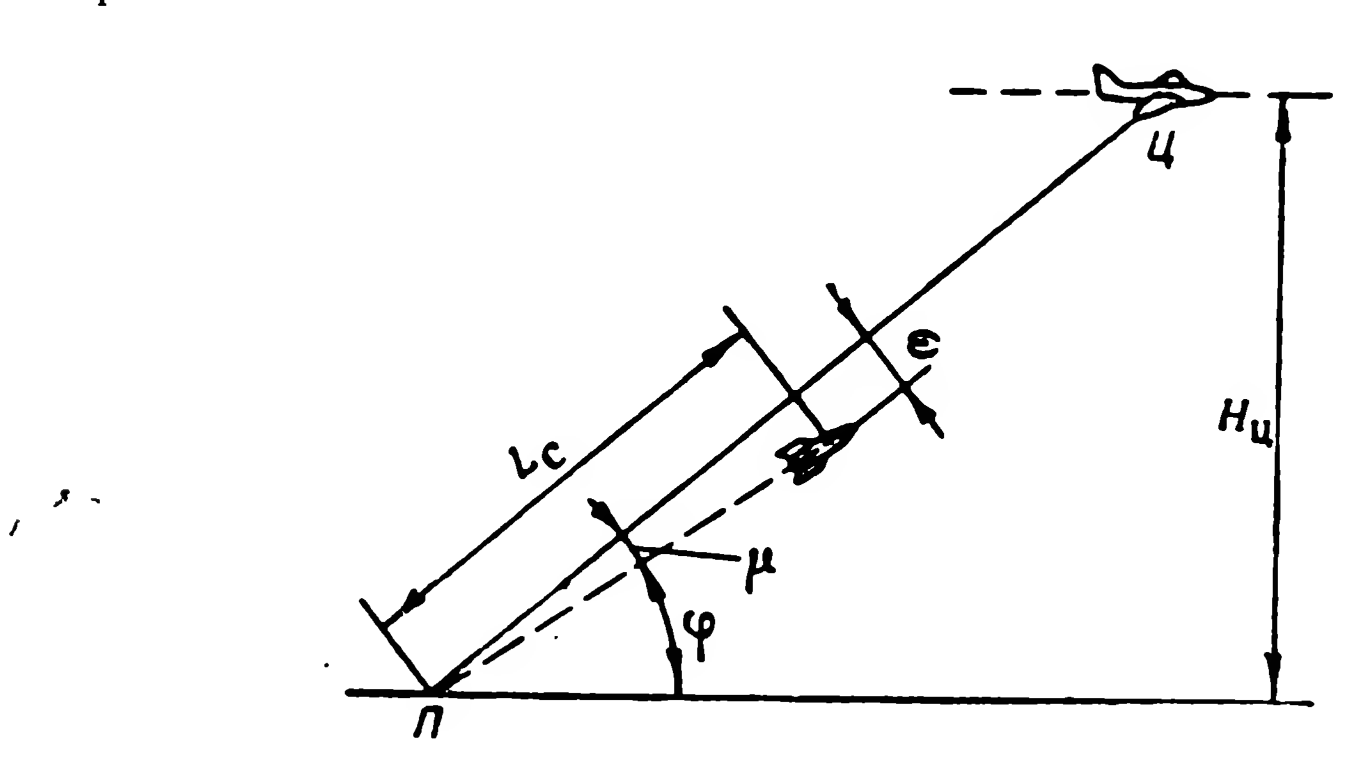
Сравнивая выражения (13.128) и (13.132), замечаем, что в первом случае убывание промаха за счет экспоненциального множителя будет происходить интенсивнее. С этой точки зрения комбинированный закон (13.109) оказывается более эффективным, чем закон параллельного сближения.

*Глава XIV*

# ДИНАМИКА ТЕЛЕУПРАВЛЯЕМЫХ СНАРЯДОВ

## § 14.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Согласно определению телеуправляемые снаряды наводятся на цель по сигналам пункта управления. Простейшим способом наведения телеуправляемых снарядов является метод наведения по лучу или метод трех точек. Напомним, что при этом методе с пункта управления осуществляется непрерывное визирование цели и снаряда.




Фиг. 14.1. Схема наведения снаряда методом трех точек.

Наведение сводится к удержанию снаряда на линии визирования цели (фиг. 14.1). Если снаряд удерживается на линии визирования, то три точки — пункт управления, снаряд и цель — всегда лежат на одной прямой. Сигналом рассогласования служит угловое $\mu$ или линейное $\varepsilon$ отклонение снаряда от линии визирования. Угловое рассогласование учитывается при визуальном контроле за полетом снаряда и цели. При этом оператор по линии телеуправления посылает сигналы для отклонения рулевых органов снаряда. Измерение линейного отклонения $\varepsilon$ может быть реализовано с помощью радиолуча. В этом случае его равносигнальная зона совпадает с линией пункт управления — цель (*ПЦ*).

В общем случае, когда на пункте управления измеряются координаты цели и снаряда, то с помощью вычислительного устройства можно получить самые разнообразные способы и методы наведения снарядов на цель. В частности, могут быть реализованы все методы самонаведения, которые были рассмотрены в гл. XIII. В этом случае динамика самонаводящихся и телеуправляемых снарядов будет совпадать. Различие будет только в способах технической реализации тех или иных методов наведения. При самонаведении управляющие сигналы образуются на снаряде, а при телеуправлении — на пункте управления и посылаются по линии телеуправления на снаряд.

В этой главе рассмотрена кинематика и динамика метода трех точек, а также некоторые другие виды наведения снарядов на наземные и воздушные цели, осуществляемые с помощью средств телеуправления.

## § 14.2. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ ПРИ МЕТОДЕ ТРЕХ ТОЧЕК

В общем случае цель и пункт управления перемещаются со скоростями $V_ц$ и $V_п$. Этот общий случай относится к наведению по лучу снаряда класса «воздух — воздух». При этом обычно скорость снаряда $V$ больше скорости $V_п$ самолета, с которого снаряд выпущен и с которого управляется этот снаряд. Важными частными случаями являются: 1) $V_п=0$ — наведение снаряда «земля — воздух» и 2) $V_ц=0$ — наведение снаряда «воздух — земля».

Напишем кинематические уравнения для пар цель — пункт управления и цель — снаряд, считая, что снаряд находится точно на линии визирования цели (фиг. 14.2). Уравнения цель — пункт управления имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{L}_п &= V_ц \cos\varphi - V_п \cos(\varphi - \theta_п), \\ L_п\dot{\varphi} &= -V_ц \sin\varphi + V_п \sin(\varphi - \theta_п), \end{aligned}\right\} \qquad (14.1)$$

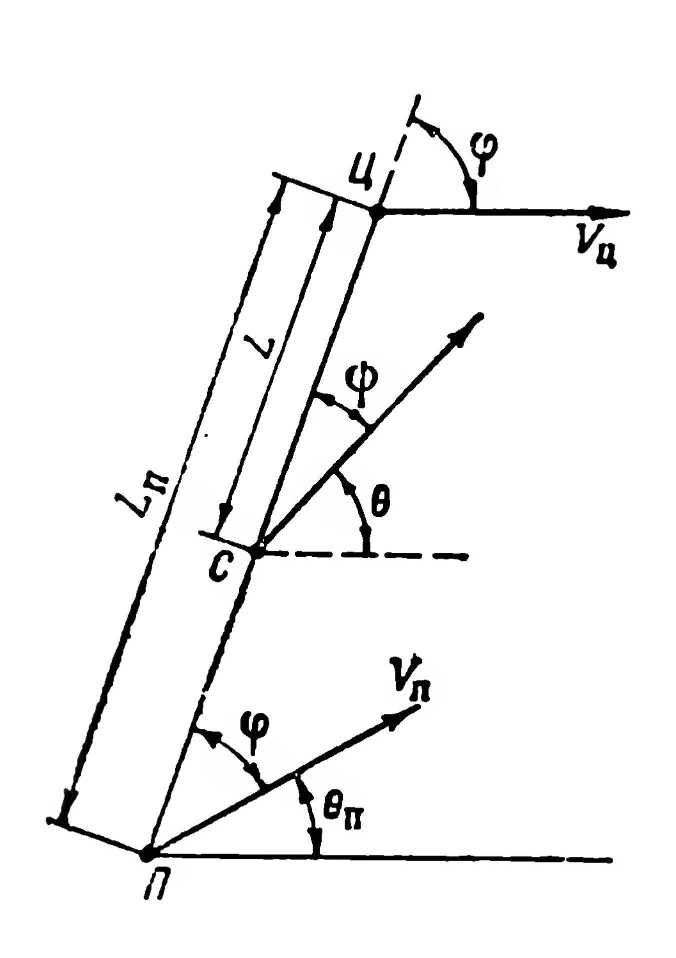
а уравнения цель — снаряд

$$\left.\begin{aligned} \dot{L} &= V_ц \cos\varphi - V\cos(\varphi - \theta), \\ L\dot{\varphi} &= -V_ц \sin\varphi + V\cos(\varphi - \theta). \end{aligned}\right\} \qquad (14.2)$$

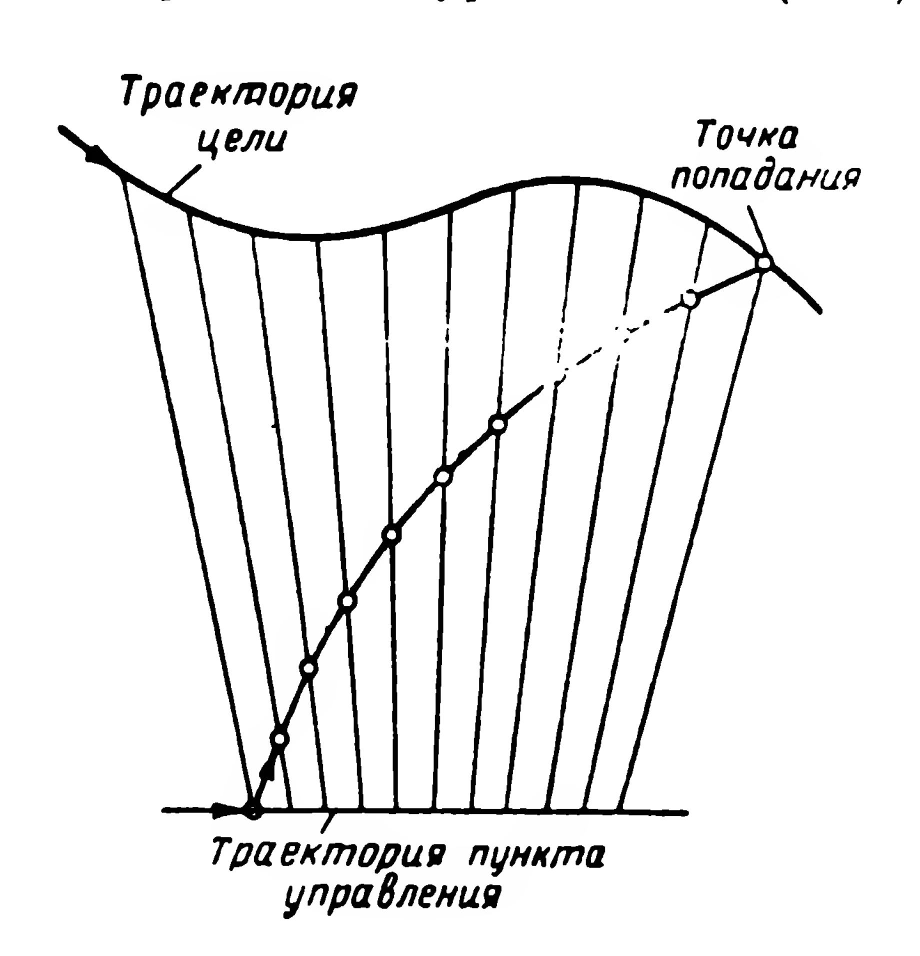
Значения углов в уравнениях (14.1) и (14.2) приведены на фиг. 14.2. Уравнения записаны для прямолинейного движения цели, и величины $V_ц$, $V$, $V_п$ и $\theta_п$ должны быть заданы как функции времени. Поскольку при кинематической трактовке задачи снаряд всегда удерживается на линии визирования, то угловые скорости и мгновенные угловые положения отрезков *ПЦ* и *СЦ*

(фиг. 14.2) всегда совпадают. Это отражено в формулах (14.1) и (14.2) путем введения общих для обеих групп уравнений величин $\dot{\varphi}$ и $\varphi$.

Для аналитического определения траектории снаряда и требуемых перегрузок необходимо сначала решить уравнения (14.1) и найти $\varphi=\varphi(t)$, а затем из решения уравнений (14.2) определить $L=L(t)$, $\theta=\theta(t)$. Аналитическое решение уравнений (14.1) и




Фиг. 14.2. Схема, иллюстрирующая геометрическое соотношение для цели, снаряда и пункта управления при методе трех точек.




Фиг. 14.3. Пример построения кинематических траекторий для метода трех точек.

(14.2) можно найти только в виде рядов, поэтому для получения кинематических траекторий и времени наведения прибегают к графическим построениям. Эти построения очень просты (пример графического построения траектории приведен на фиг. 14.3). Что касается потребных перегрузок или угловых скоростей вектора скорости снаряда, то для частных случаев можно получить их аналитические выражения. Так, например, для снаряда «земля — воздух» имеем следующее аналитическое выражение угловой скорости вектора скорости снаряда*

$$\dot{\theta}=\frac{2V_ц \sin^2\varphi}{H_ц}\left(1+\frac{L_c \operatorname{ctg}\varphi}{\sqrt{\frac{k^2}{\sin^4\varphi}-L_c}}\right), \qquad (14.3)$$

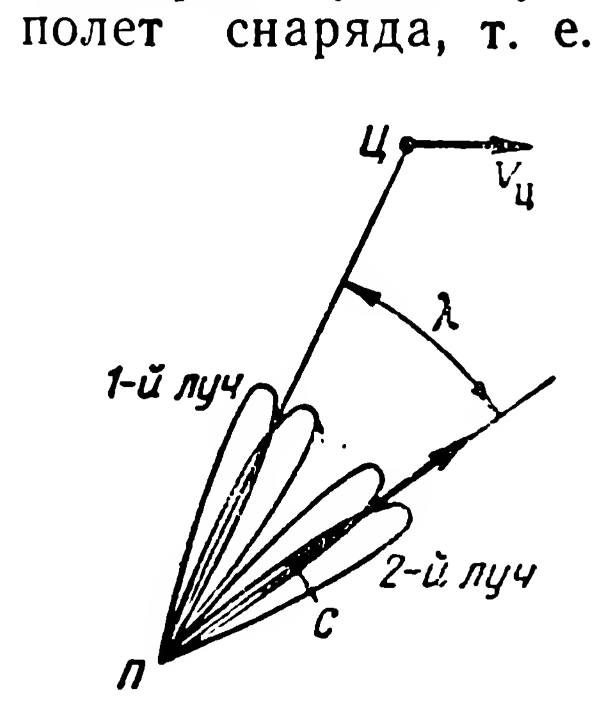
где $H_ц$ — постоянная высота цели;

* А. С. Локк, Управляемые снаряды, Гостехиздат, 1957.

$L_c = L_п - L$ — расстояние от пункта управления до снаряда; $k = \frac{V}{V_ц}$.

Приведенная формула справедлива для $H_ц = \text{const}$, $V_ц = \text{const}$ и $V = \text{const}$.

При наведении снарядов «воздух — воздух» за счет маневра самолета, с которого управляется снаряд, можно добиться снижения перегрузок снаряда. При $V_ц = \text{const}$ маневром пункта управления можно получить прямолинейный полет снаряда, т. е. полет с перегрузками, равными нулю. Полет самолета, с которого управляется снаряд, в режиме параллельного сближения с целью дает возможность получить наименьшие перегрузки снаряда при маневре цели и сделать их равными нулю при атаке неманеврирующей цели. В самом деле при полете самолета с пунктом управления в режиме параллельного сближения $\dot{\varphi} = 0$ и $\varphi = \text{const}$. Оба эти условия выполняются и для снаряда. Следовательно, снаряд также движется к цели по методу параллельного сближения, т. е. по методу, наиболее экономному в отношении перегрузок. Таким образом, наведение по лучу при оптимальном маневре самолета с пунктом управления сводится к самонаведению по методу параллельного сближения, рассмотренному в гл. XIII.




Фиг. 14.4. Схема наведения снаряда по лучу с использованием второй радиолокационной станции, следящей за целью.

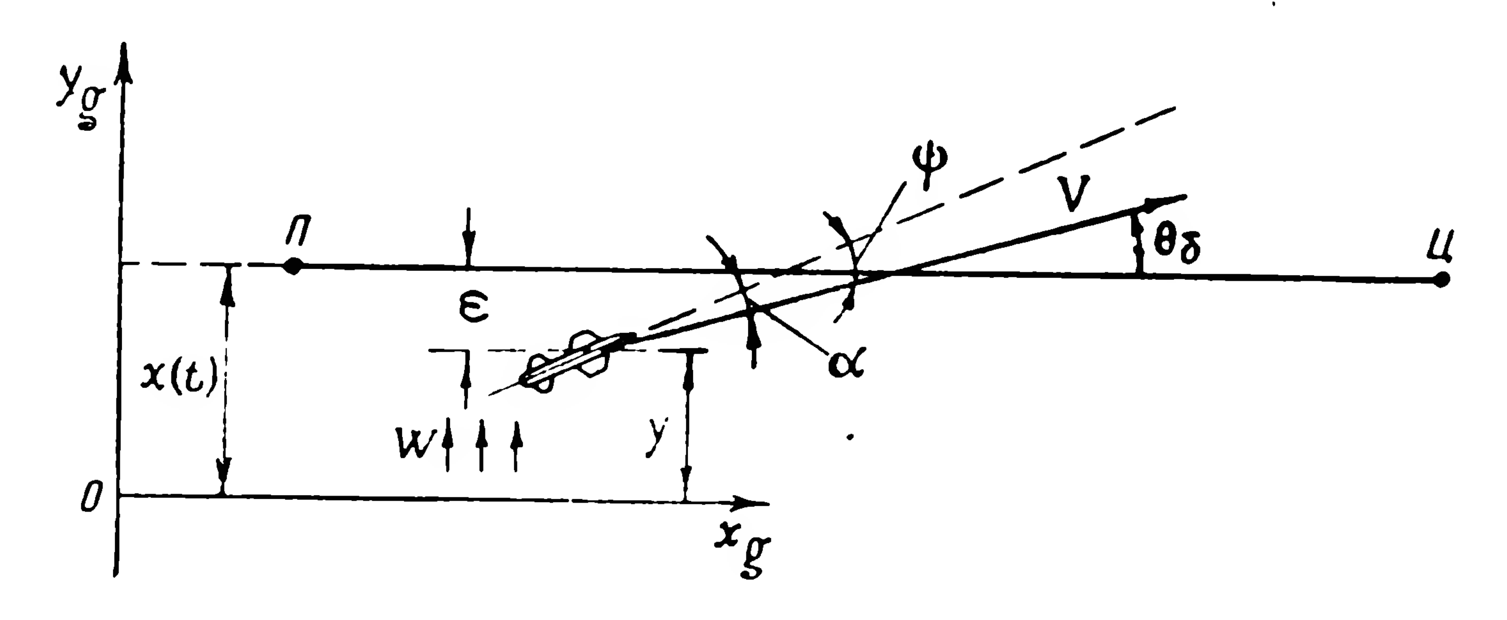
Заметим, что в любом случае задача наведения по лучу сводится к задаче самонаведения с углом упреждения $\psi$, являющимся функцией времени и различных величин, определяемых методом самонаведения. При наведении по лучу снарядов «земля — воздух» также можно получить режим параллельного сближения снаряда с целью. Однако, поскольку пункт управления в этом случае неподвижен, параллельное сближение можно реализовать только с помощью двух лучей (фиг. 14.4). Один луч следит за целью, а второй луч используется для наведения снаряда. Угол $\lambda$ между лучами за счет поворота второго луча можно изменять по любому желаемому закону, в том числе по такому, при котором будет происходить параллельное сближение снаряда и цели. Однако при любом законе изменения угла $\lambda$ в момент попадания снаряда в цель угол $\lambda$ должен обратиться в нуль и оси обоих лучей должны совпадать.

В настоящей главе будут описаны другие разновидности систем телеуправления, позволяющие реализовать любые методы наведения, в том числе параллельное сближение.

## § 14.3. ДИНАМИКА НАВЕДЕНИЯ СНАРЯДА ПО ЛУЧУ

Исследование динамики движения снаряда по лучу дает возможность выяснить структуру системы управления снарядом, обеспечивающую удержание снаряда на луче, и точность этой операции или точность выдерживания кинематической траектории.

Рассмотрим сначала динамику снаряда в простейшем случае, когда луч неподвижен в пространсгве. Неподвижным луч может стать тогда, когда векторы скорости цели и пункта управления



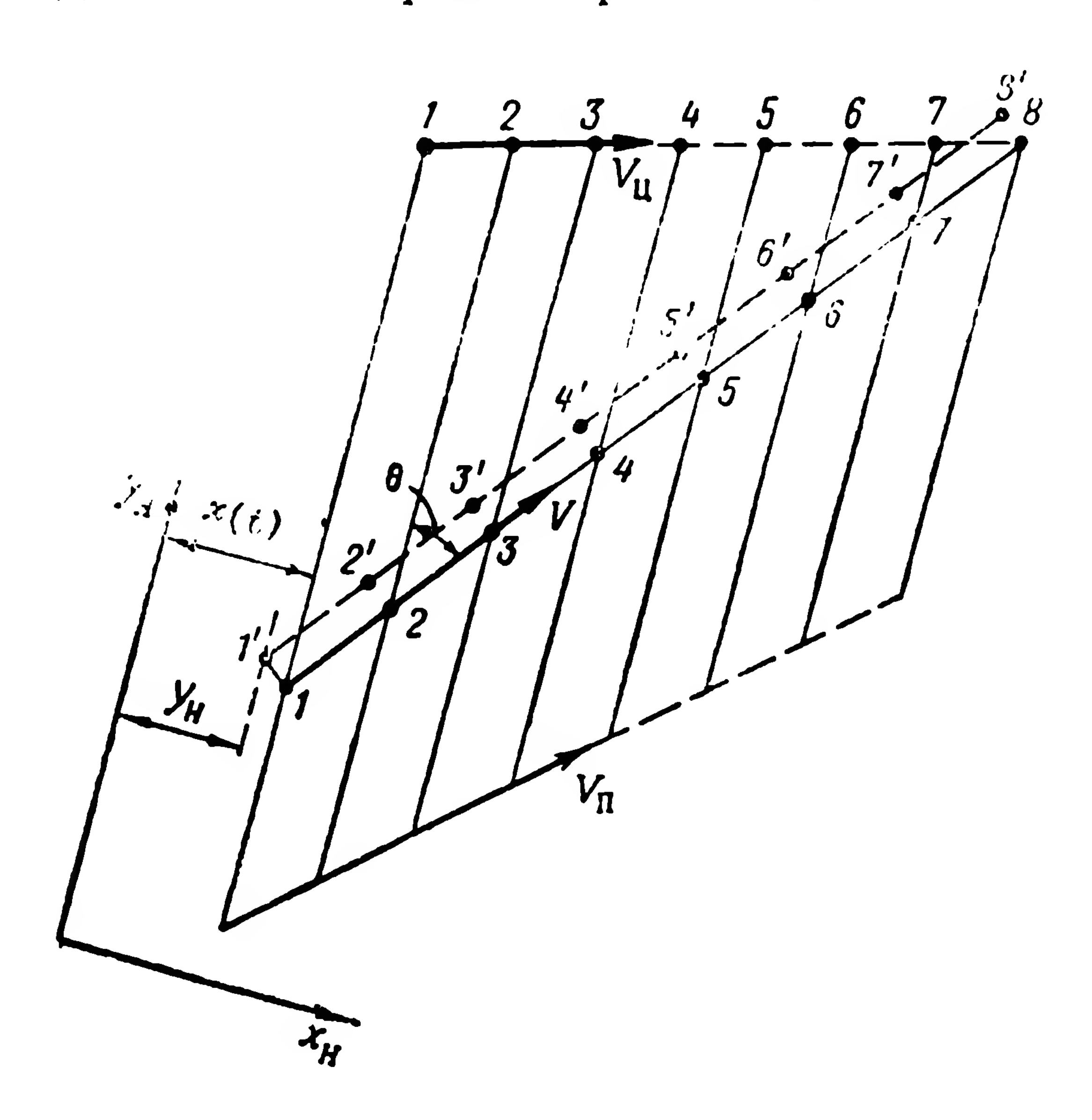

Фиг. 14.5. Положение снаряда относительно линии визирования цели.

совпадают с линией визирования или с равносигнальной зоной луча или же скорости цели и пункта управления равны нулю. Такая ситуация возникает при атаке цели снарядом «воздух — воздух» строго в хвост или в лоб или при атаке неподвижной цели с неподвижного пункта управления.

На фиг. 14.5 приведен общий случай положения снаряда относительно линии визирования цели, которая и является в данном случае заданной траекторией. Снаряд отклонился от заданной траектории и имеет ненулевую начальную скорость $dy_g/dt$. Кроме того, на него может действовать боковой ветер. В данной главе рассматривается также динамика только плоского движения. Поскольку при этом движение может происходить в вертикальной, горизонтальной и любой другой плоскости, то выходная координата системы будет обозначаться $y$ (в гл. XI это $z_g$ и $y_g$), входная координата $x(t)$ [в гл. XI это $z_з(t)$ и $y_з(t)$], ошибка $\varepsilon = x(t) - y(t)$, угол между вектором скорости и направлением заданной траектории $\theta_б$ и угол между продольной осью снаряда и направлением заданной траектории $\psi$. Управление движением центра тяжести снаряда как в спокойной атмосфере, так и при действии ветра детально рассмотрено в гл. XI и XII. Там приведены структурные схемы систем управления центром тяжести при различных законах управления и даны рекомендации по выбору параметров этих систем управления.

Рассмотрим, какие особенности в движении центра тяжести возникают, если снаряд должен двигаться в подвижном луче. Именно этот случай представляет наибольший интерес.

В гл. XI приведены общие сведения об ошибках, возникающих при движении снаряда по подвижным и криволинейным траекториям, а также указаны методы ликвидации этих ошибок. Именно такие случаи движения снарядов представляют наибольший практический интерес при наведении по лучу. Приведем пример, поясняющий использование этих сведений для изучения движения снарядов по лучу. Рассмотрим простейший случай, когда луч перемещается в пространстве параллельно самому себе. Как уже упоминалось, такое движение луча будет иметь место, если пункт управления движется к цели по закону параллельного сближения.



Фиг. 14.6. Траектории снаряда, наводимого по лучу методом параллельного сближения.

Если расположить неподвижную систему координат так, как показано на фиг. 14.6, то заданное значение координаты будет изменяться по закону

$$x(t) = kt.$$

В гл. XI указывалось, что в зависимости от принятого закона управления снаряд может двигаться при таком законе изменения координаты $x(t)$ или точно по лучу или с ошибкой, которую можно определить на основании дифференциального уравнения систе-

мы управления снарядом. Сплошная линия на фиг. 14.6, проходящая через точки *1*, *2*, *3*..., есть траектория установившегося движения снаряда, не имеющего статической ошибки при законе $x(t)=kt$. Встреча снаряда с целью происходит в точке *8*.

Пунктирная траектория *1'*, *2'*, *3'*, ... — траектория снаряда, двигающегося с систематической ошибкой. Такая траектория возникнет при законах управления без интегрального члена. Поскольку снаряд движется с ошибкой, то в тот момент, когда цель прибывает в точку *8*, снаряд оказывается в точке *8'*. Как видно, в этом случае возникает промах. В обоих случаях, когда имеется ошибка и когда ее нет, между лучом и вектором скорости снаряда устанавливается постоянный угол упреждения $\theta_{уст}$ (аналогичный углу сноса при ветре). Этот угол соответствует режиму параллельного сближения снаряда с целью *.

При криволинейных кинематических траекториях при любых законах управления будет наблюдаться ошибка или отклонение снаряда от кинематической траектории. Это отклонение можно определить, если вычислить предварительно ускорение (или перегрузку), необходимое для реализации кинематической траектории (см. гл. XVI).

## § 14.4. ДИНАМИКА МЕТОДА ТРЕХ ТОЧЕК ПРИ ВИЗУАЛЬНОМ НАВЕДЕНИИ

В настоящее время применяются различные системы выделения целей, использующие тот или иной контраст цели на окружающем ее фоне **. Эти системы используют излучение или отражение целью какого-либо вида энергии. До сих пор большое значение имеет визуальное распознавание цели в процессе наведения снаряда. Кроме того, иногда визуальное наведение снарядов оказывается более простым и надежным, чем использование сложных радиолокационных или инфракрасных систем наведения снарядов. Визуально можно наводить снаряды класса «воздух—земля», «земля — воздух», «воздух—воздух» (при небольших скоростях) и, наконец, класса «земля—земля», применяемые на поле боя.

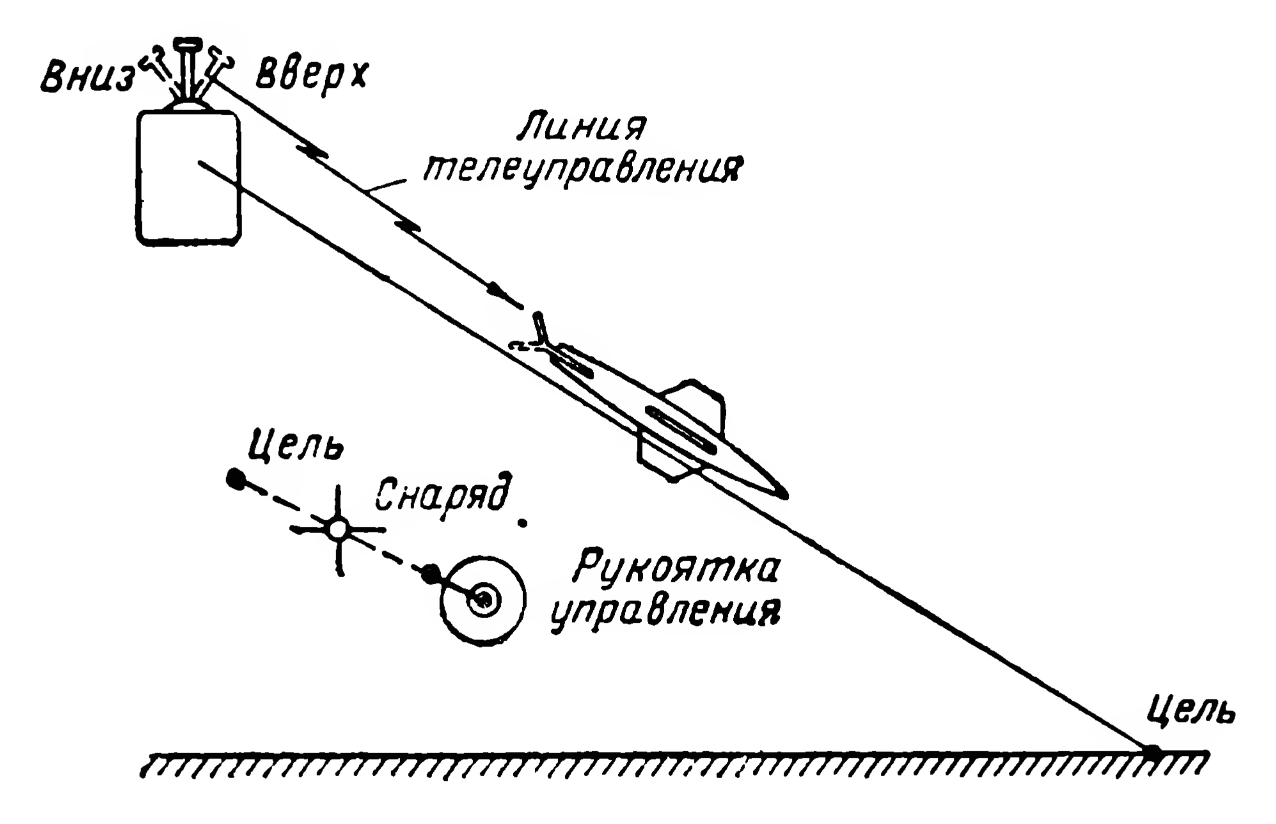
Метод трех точек является естественным методом визуального наведения снарядов. Оператор наблюдает в прицел за положением снаряда и цели и по линии телеуправления посылает сигналы на органы управления снарядом, стремясь удерживать снаряд на линии визирования цели. При идеальном наведении изображение снаряда в прицеле всегда совмещается с изображением цели.

---

* При движении снаряда с ошибкой угол $\theta_{уст}$ соответствует режиму параллельного сближения с точкой, находящейся сзади цели на некотором постоянном расстоянии.

** В. И. Марисов, И. К. Кучеров, Управляемые снаряды. Воениздат, 1959.

Для получения сигналов, посылаемых на снаряд, используется специальная рукоятка управления. Кинематика и конструкция рукоятки управления определяются аэродинамической формой снаряда. При наведении крестокрылых снарядов, которые управляются в декартовых координатах, рукоятка может двигаться в двух взаимно перпендикулярных направлениях «Вправо—влево», и «Вверх — вниз». На фиг. 14.7 изображена картина наведения снаряда «воздух — земля». Отклонение рукоятки «Вверх — вниз» через линию телеуправления приводит к пропорциональному от-



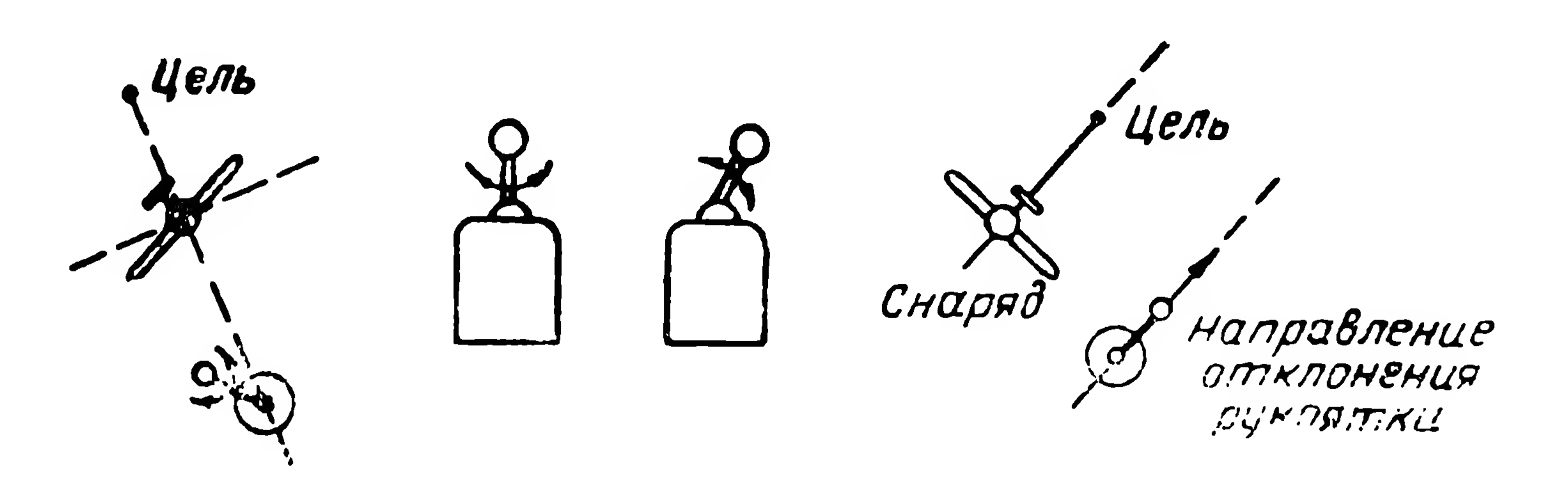

**Фиг. 14.7. Схема наведения крестокрылого снаряда класса «воздух—земля» методом трех точек с помощью рукоятки управления.**

клонению рулей высоты снаряда. Движение рукоятки «Вправо — влево» (нормальное к плоскости чертежа на фиг. 14.7) приводит к пропорциональному отклонению рулей направления. Для того чтобы не переменилось действие рулей высоты и направления, снаряд в процессе движения к цели должен быть стабилизирован относительно продольной оси точно так же, как стабилизируется любой крестокрылый снаряд, наводимый по лучу.

При наведении плоскокрылых снарядов используется управление в полярной системе координат. Рукоятка управления, как показано на фиг. 14.8, может вращаться вокруг продольной оси и отклоняться от вертикального положения в любом направлении. Поворот рукоятки вокруг продольной оси приводит через систему управления креном к точно такому же повороту снаряда вокруг продольной оси. Отклонение рукоятки от вертикального положения вызывает пропорциональное отклонение руля высоты. Как при декартовом, так и при полярном управлении для оператора существует одно правило: при отклонении изображения снаряда от изображения цели перемещать рукоятку в направлении линии снаряд — цель. При декартовом управлении это приве-

дет к необходимому соотношению отклонений рулей направления и высоты, а при полярном — к совмещению плоскости симметрии снаряда с линией снаряд — цель и к соответствующему отклонению рулей высоты.

При описанном способе управления оператор непосредственно включается в контур управления снарядом. При визуальном управлении оператор оказывает воздействие на снаряд в зависи-




**Фиг. 14.8. Схема управления плоскокрылыми снарядами с помощью рукоятки управления.**

мости от углового отклонения $\mu$ снаряда от линии визирования цели (см. фиг. 14.1). При малом $\mu$ имеем

$$\varepsilon = L_c \mu, \tag{14.4}$$

где $\varepsilon$ — отклонение снаряда от луча в вертикальной плоскости;
$L_c$ — расстояние от пункта управления до снаряда. При постоянной скорости удаления снаряда от пункта управления $L_c = V_c t$, где $V_c$ — скорость удаления снаряда.

Считая $V_c = \text{const}$, продифференцируем (14.4):

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = V_c t \dot{\mu} + V_c \mu. \tag{14.5}$$

Учитывая, что в данном случае $V\theta + W = \frac{d\varepsilon}{dt}$, получим

$$t\dot{\mu} + \mu = \frac{V}{V_c}\theta + \frac{W}{V_c}, \tag{14.6}$$

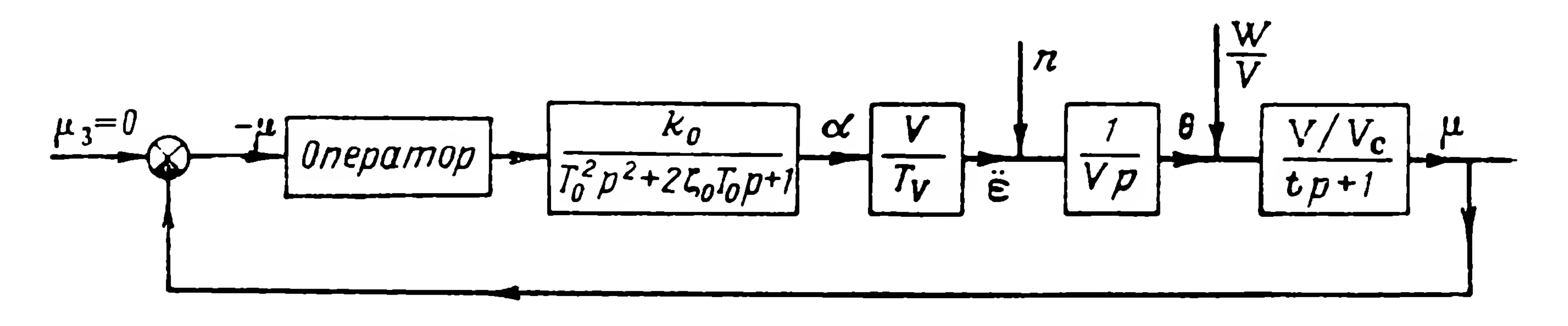
где $\theta$ — отклонение вектора скорости направления от луча;
$W$ — нормальная составляющая ветра.

Зная связь угла $\mu$ с углом $\theta$, можно построить структурную схему визуального управления снарядом. Структурная схема приведена на фиг. 14.9. Передаточная функция связи угла $\mu$ с углом $\theta$ представляет собой инерционное звено с непрерывно нарастающей постоянной времени. Для осуществления процесса наведения оператор должен развивать такую передаточную функцию, при которой не только обеспечивалась бы устойчивость контура

(см. фиг. 14.9), но также и достаточная точность и жесткость стабилизации при возмущениях в виде бокового ветра или перегрузки, возникающей при движении снаряда по криволинейной траектории. Известно, что оператору наиболее просто выполнять функции простого усилителя. В этом случае согласно многочисленным экспериментам передаточная функция оператора имеет вид

$$W_{\text{оп}}(p) = \frac{e^{-p\tau_{\text{оп}}}}{T_{\text{оп}}p + 1} k_{\text{оп}}, \tag{14.7}$$

где $\tau_{\text{оп}} \approx 0{,}25$ *сек* и $T_{\text{оп}} = 0{,}1 \div 0{,}3$ *сек.*




Фиг. 14.9. Структурная схема системы визуального управления снарядом.

Как показывает выражение (14.7), усиление сигнала в $k_{\text{оп}}$ раз сопровождается у оператора передаточным запаздыванием $\tau_{\text{оп}}$ и запаздыванием типа инерционного звена с постоянной времени $T_{\text{оп}}$. Однако в рассмотренном контуре (фиг. 14.9) передаточной функции оператора в виде простого усиления явно недостаточно. Оператор вынужден реализовать передаточную функцию типа форсирующего звена:

$$W_{\text{оп}}(p) = \frac{(T_{1\text{оп}}p + 1)\ e^{-p\tau_{\text{оп}}}}{T_{2\text{оп}}p + 1} k_{\text{оп}}, \tag{14.8}$$

где $T_{1\text{оп}} \gg T_{2\text{оп}}$.

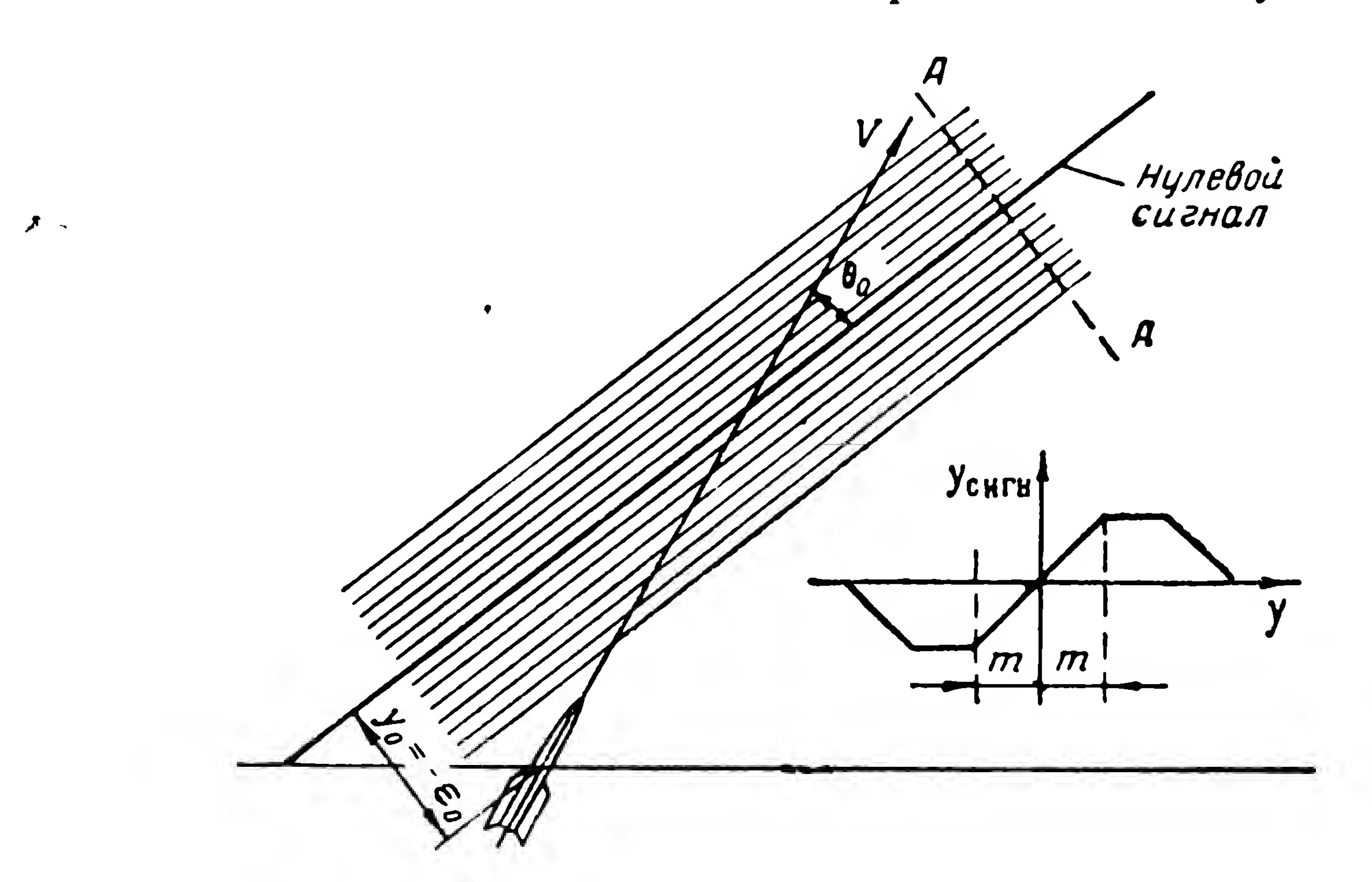
Реализация оператором форсирующего звена представляет для него значительные трудности. Оператор может реализовать такую передаточную функцию и, следовательно, обеспечить необходимое качество управления снарядом только после большой тренировки. Однако в сложных условиях боевого применения возможно снижение навыков оператора и срыв процесса наведения снаряда.

Для повышения эффективности управления целесообразно исключить оператора из контура управления снарядом, не теряя при этом всех достоинств оператора с точки зрения распознавания целей. Этого можно достигнуть, разделив каналы визирования цели и снаряда. Канал визирования цели остается за оператором. Канал визирования снаряда автоматизируется путем установки на пункте управления системы автосопровождения снаряда. Система автосопровождения снаряда несложна, поскольку на

снаряде может быть установлен ответчик на сигналы пункта управления. Задача оператора теперь сильно упрощается. В его обязанность входит только удерживать цель в перекрестии прицела путем смещения подвижной планки с перекрестком относительно поля прицела. Сигнал, снимаемый с датчиков планки, будет равен пеленгу $\varepsilon_ц$ с пункта управления на цель. Сигнал, снимаемый с датчика системы автосопровождения снаряда, будет пеленгом на снаряд $\varepsilon_с$. Разность $\varepsilon_ц - \varepsilon_с = \varepsilon$ — есть искомый угол между направлением на цель и направлением на снаряд из пункта управления. Так как сигнал $\varepsilon$ теперь получен как электрический сигнал, с ним можно делать любые необходимые преобразования. В частности, умножив $\varepsilon$ на $L_с$, получим $y_н$ — боковое отклонение снаряда от луча. Имея сигнал $y_н$, можем построить любые рассмотренные выше системы управления снаряда по лучу. Оператор теперь находится вне контура управления, в то же самое время его свойства по распознаванию целей полностью сохранены.

## § 14.5. ВВОД СНАРЯДА В ЛУЧ

Как правило, точка старта снаряда не совпадает с осью луча. Поэтому снаряд стартует в направлении луча и система управления должна обеспечить выход снаряда на ось луча. Система

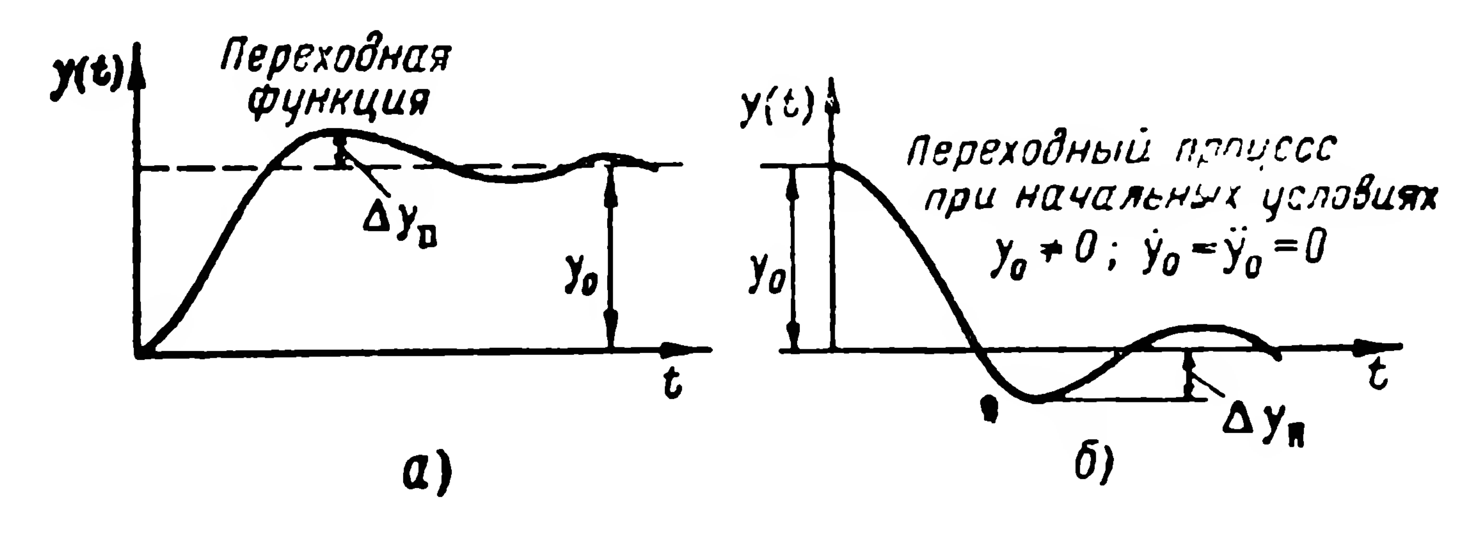



Фиг. 14.10. Положение снаряда относительно радиолуча.

управления снарядом включается при некоторых ненулевых начальных условиях $y\Big|_{t=0} = y_0$ и $\dfrac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = V \sin \theta_0 = V\theta_0$ (фиг. 14. 10).

Процесс выхода снаряда на ось луча при этих начальных условиях обычно и носит название ввода снаряда в луч. Сигнал откло-

нения, получающийся на борту снаряда, всегда является нелинейной функцией самого отклонения $y$. Типичный вид этой нелинейной функции представлен на фиг. 14.10. Нелинейная функция имеет линейный участок $-m \leqslant y \leqslant m$, для которого только и справедливы все линейные уравнения и структурные схемы, приведенные в гл. XI и XII. У всех этих структурных схем с интегральным управлением переходные функции непременно будут иметь перерегулирование. Известно, что переходная функция как реак-



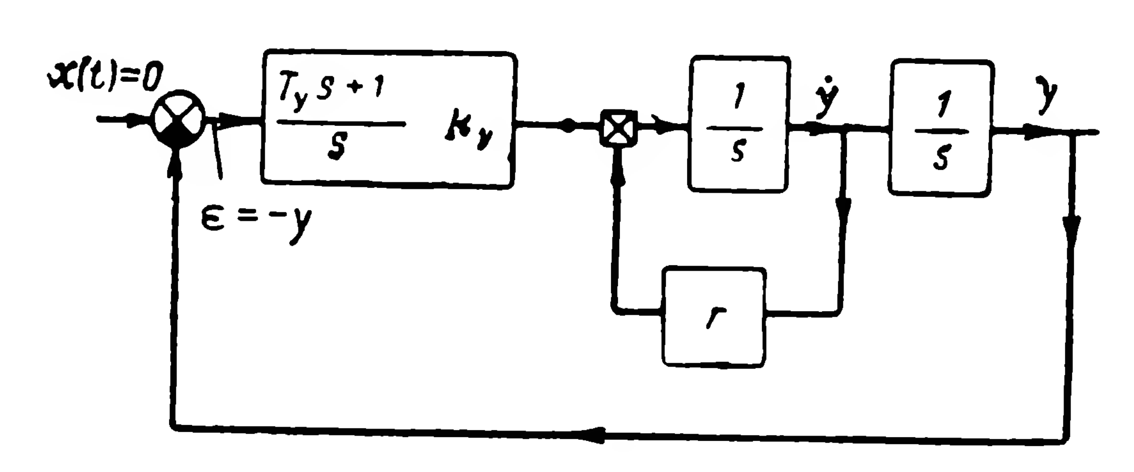

Фиг. 14.11. Графики переходной функции (*а*) и переходного процесса (*б*) при указанных начальных условиях.

ция на ступенчатый сигнал $y_0\,1(t)$ представляет собой зеркальное отображение относительно оси абсцисс переходного процесса при начальных условиях $y(0)=y_0$; $\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=\ldots=0$, смещенное на величину $y_0$ (фиг. 14.11).

Если в момент включения системы управления $\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=$ $=\dddot{y}(0)=\ldots=0$, а $|y_0|\leqslant m$, т. е. снаряд находится в зоне пропорциональности луча, то переходный процесс закончится благополучно в том смысле, что снаряд войдет в луч, поскольку перерегулирование $\Delta y_п$ всегда меньше $y_0$. Однако нужно всегда считаться с тем, что в момент включения начальная скорость снаряда относительно луча $\dot{y}(0)=\dot{y}_0$ равна не нулю, а $V\theta_0$ (см. фиг. 14.10). При этом знак $\dot{y}_0$ всегда такой, который будет приводить к увеличению перерегулирования. С учетом влияния $\dot{y}_0$ может оказаться, что $\Delta y_п > m$, т. е. возникает опасность выхода снаряда из луча и потери управления. Для того чтобы эту опасность свести к минимуму, необходимо выбирать параметры системы так, чтобы перерегулирование у переходной функции было как можно меньше. Однако в структурных схемах, рассмотренных в гл. XI, уменьшение перерегулирования достигается за счет увеличения времени регулирования. Следовательно, такой метод уменьшения перерегулирования нежелателен. Существуют другие пути решения задачи ввода снаряда в луч, не приводящие к увеличению времени регулирования. Применение современных элементов вычислительных

устройств (логических цепей, устройств памяти и т. п.) позволяет весьма успешно решить задачу ввода снаряда в луч.

Проиллюстрируем метод решения задачи ввода снаряда в луч на примере упрощенной структурной схемы системы с интегральным управлением (фиг. 14. 12). В упрощенной схеме боковая управляющая сила и пропорциональное ей ускорение $\ddot{y}$ устанав-




Фиг. 14.12. Упрощенная структурная схема системы с интегральным управлением.

ливаются без запаздывания и пропорциональны суммарному управляющему сигналу. Для схемы, приведенной на фиг. 14. 12, соответственно этому будем иметь

$$\ddot{y} = -r\dot{y} - k_y T_y y - k_y \int_0^t y\, dt,$$

где $r$ — коэффициент обратной связи, пропорциональный передаточному числу автопилота $i_\vartheta$.

Передаточная функция замкнутой системы вход — выход для этой структурной схемы имеет вид [1]

$$\Phi(s) = \frac{(T_y s + 1)\, k_y}{s^3 + rs^2 + T_y k_y s + k_y}. \tag{14. 9}$$

Поскольку эта передаточная функция имеет нуль, равный $-\frac{1}{T_y}$, то переходная функция всегда будет иметь перерегулирование (см. фиг. 14. 11, *а*). Изображение этой переходной функции получим, умножив $\Phi(s)$ на $y_0/s$:

$$H^*(s) = \Phi(s)\frac{y_0}{s}.$$

Соответственно изображение процесса $y(t)$ при начальных условиях $y_0 \neq 0$; $\dot{y}_0 = \ddot{y}_0 = 0$ (см. фиг. 14. 11, *б*) будет иметь вид

$$Y^*(s) = \frac{y_0}{p} - H^*(s) = \frac{s^2 + rs}{s^3 + rs^2 + T_y k_y s + k_y}\, y_0. \tag{14. 10}$$

---

[1] Здесь и далее $s$ — параметр преобразования Лапласа.

Если, кроме того, и $\dot{y}_0 \neq 0$, то

$$Y^*(s) = \frac{s^2 + \left(r + \frac{\dot{y}_0}{y_0}\right)s}{s^3 + rs^2 + T_y k_y s + k_y} \cdot y_0. \qquad (14.11)$$

При этом перерегулирование возрастает за счет $\dot{y}_0$ при противоположных знаках $y_0$ и $\dot{y}_0$ и уменьшается при одинаковых знаках $y_0$ и $\dot{y}_0$. Для того чтобы не получилось слишком большое значение перерегулирования при структуре передаточной функции (14.9), корни характеристического полинома

$$A(s) = s^3 + rs^2 + T_y k_y s + k_y$$

берутся вещественные и располагаются по арифметической прогрессии (см. табл. 2.3). Однако, как упоминалось, это увеличивает время регулирования. Если же, например, взять корни $A(s)$ кратными, то это приведет к недопустимому перерегулированию, хотя время регулирования будет сокращено. Имея в виду устранение перерегулирования специальными средствами, возьмем корни $A(s)$ кратными, тогда

$$A(s) = (s + \alpha)^3 = s^3 + 3\sigma s^2 + 3\sigma^2 s + \sigma^3,$$

$$r = 3\sigma, \quad T_y k_y = 3\sigma^2, \quad \sigma^3 = k_y.$$

Заметим, что при всех вещественных корнях характеристического полинома и при передаточной функции вида

$$\Phi(s) = \frac{k_y}{A(s)}, \qquad (14.12)$$

где $A(0) = k_y$, переходная функция не будет иметь перерегулирования. Если при этом для постоянного $A(0) = k_y$ принять все корни $A(s)$ кратными, то время регулирования будет меньше, чем при любых других вещественных корнях. Эти обстоятельства и служат обоснованием того, что корни характеристического полинома выбираются кратными.

Возьмем однородное дифференциальное уравнение

$$\dddot{y} + 3\sigma\ddot{y} + 3\sigma^2\dot{y} + \sigma^3 y = 0. \qquad (14.13)$$

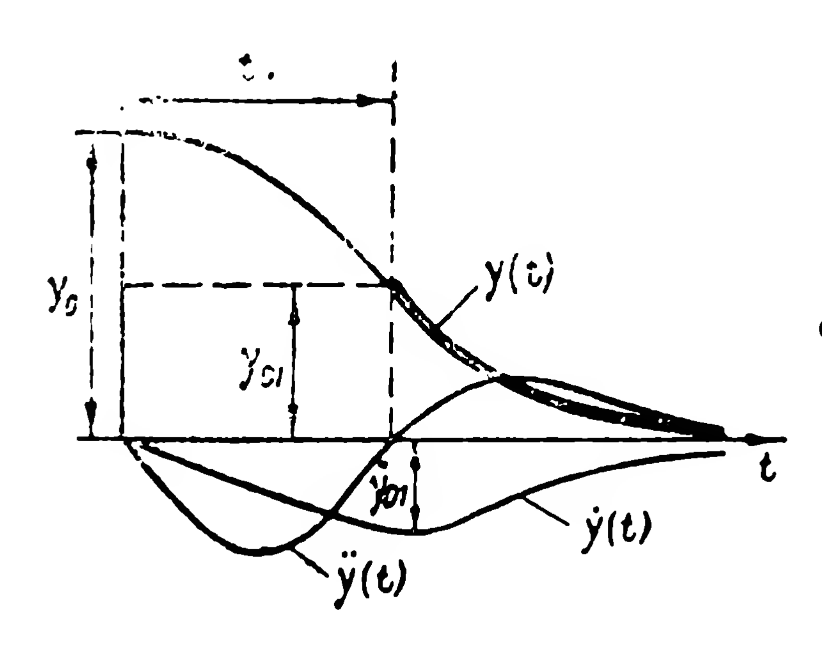
Его решение при $y_0 \neq 0$; $\dot{y}_0 = \ddot{y}_0 = 0$ имеет следующий вид:

$$y = y_0 e^{-\sigma t}\left(1 + \sigma t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right). \qquad (14.14)$$

График функции (14. 14) приведен на фиг. 14. 13. Там же изображены

$$\dot{y}(t) = -y_0\sigma e^{-\sigma t}\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \quad \text{и} \quad \ddot{y}(t) = y_0\sigma^2 e^{-\sigma t}\left(\frac{\sigma^2 t^2}{2} - \sigma t\right).$$

Максимум скорости $\dot{y}(t)$ и нуль ускорения $\ddot{y}(t)$ имеют место при $t_1 = \frac{2}{\sigma}$. Величина максимума производной будет $\dot{y}(t_1) = -y_0 2\sigma e^{-2}$. В этот момент отклонение равно $y(t_1) = 5y_0 e^{-2}$.




Фиг. 14.13. Графики функции (14.14) и ее первой и второй производных.

Примем кривую $y(t)$ начиная от момента $t_1$ за эталонную $y_э(t)$, по которой должен осуществляться выход снаряда на ось луча. Такая кривая изображена на фиг. 14.13 двойной линией. Перенесем начало отсчета времени в $t_1$ и найдем изображение этой кривой. Для получения изображения кривой необходимо преобразовать по Лапласу уравнение (14.13) при начальных условиях:

$$y(0) = y_{01}, \quad \dot{y}(0) = -\dot{y}_{01} \quad \text{и} \quad \ddot{y}(0) = 0$$

$$Y_э^*(s) = \frac{s^2 + \left(3\sigma - \frac{\dot{y}_{01}}{y_{01}}\right)s - 3\sigma\frac{\dot{y}_{01}}{y_{01}} + 3\sigma^2}{(s+\sigma)^3}\, y_{01}.$$

Так как $y_{01} = y(t_1)$, а $\dot{y}_{01} = -\dot{y}(t_1)$ и $\frac{\dot{y}_{01}}{y_{01}} = \frac{2}{5}\sigma$, то, опуская индекс «1», окончательно получим изображение желательной кривой ввода снаряда в луч

$$Y_э^*(s) = \frac{s^2 + \left(3 - \frac{2}{5}\right)\sigma s + \frac{9}{5}\sigma^2}{(s+\sigma)^3}\, y_0. \tag{14. 15}$$

В то же время из формулы (14. 11) при кратных корнях получим следующее изображение:

$$Y^*(s) = \frac{s^2 + \left(3 + \frac{\dot{y}_0}{\sigma y_0}\right)\sigma s}{(s+\sigma)^3} y_0. \qquad (14.16)$$

Выражение (14. 15) есть изображение желаемой или эталонной кривой $y_э(t)$ без перерегулирования. Изображение (14. 16) соответствует кривой с перерегулированием и притом весьма большим. Из сопоставления (14. 16) и (14. 15) видно, каких слагаемых недостает в числителе (14. 16), чтобы кривая совпадала с эталонной. Постараемся обеспечить появление этих слагаемых в (14. 16) за счет воздействия на систему ступенчатого сигнала $y_0 1(t)$ через специально подобранные фильтры.

Воздействие ступенчатого сигнала, пропущенного через фильтр, может быть приложено на вход системы или, например, в точку $a$ структурной схемы, приведенной на фиг. 14. 12. Остановимся на последнем варианте. Найдем передаточную функцию системы для воздействия в точке $a$

$$\Phi_a(s) = \frac{\frac{1}{(s+r)s}}{1 + \frac{(T_y s + 1)k_y}{(s+r)s^2}} = \frac{s}{s^3 + rs^2 + T_y k_y s + k_y}$$

или при кратных корнях характеристического уравнения

$$\Phi_a(s) = \frac{s}{(s+\sigma)^3}. \qquad (14.17)$$

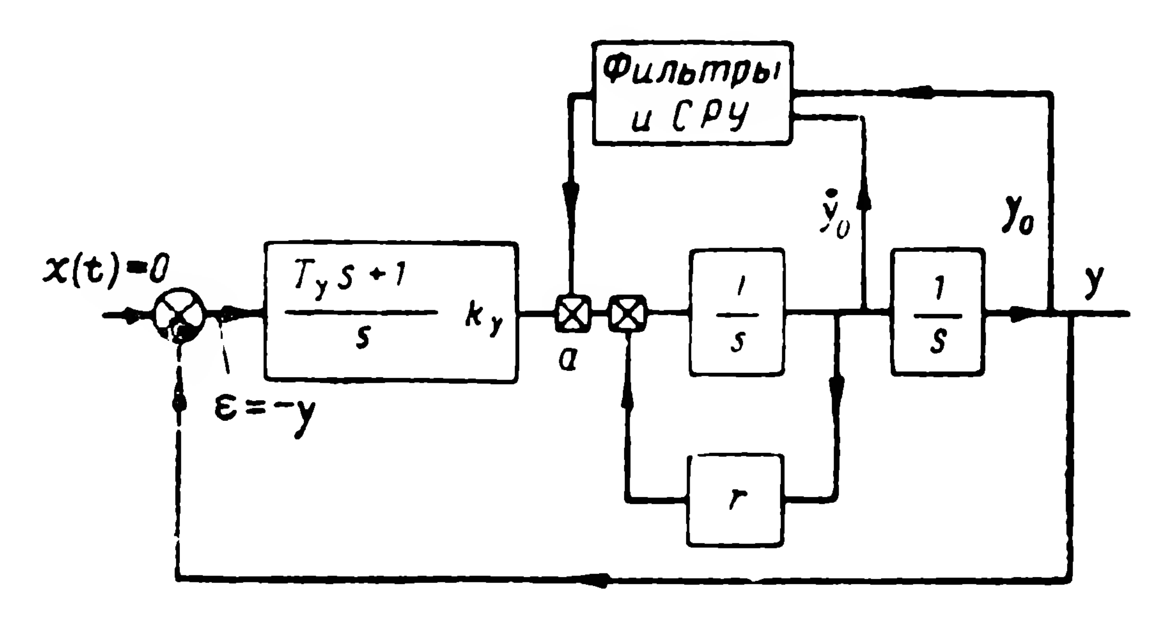
Вид передаточной функции (14. 17) указывает, что для образования слагаемого $\frac{\frac{9}{5}\sigma^2}{(s+\sigma)^3} y_0$ в изображении (14. 15) достаточно в точке $a$ ввести ступенчатый сигнал $y_0 1(t)$ (изображение которого есть $\frac{y_0}{s}$) через усилитель с коэффициентом усиления $\frac{9}{5}\sigma^2$. Далее, для того чтобы изображение процесса в структурной схеме на фиг. 14. 12 оказалось тождественным (14. 15) в точку $a$ необходимо ввести дополнительный сигнал:

$$-\left(\frac{2}{5}\sigma + \frac{\dot{y}_0}{y_0}\right) y_0 \delta(t). \qquad (14.18)$$

Поскольку воздействие в виде $\delta(t)$ реализовать невозможно, удовлетворимся воздействием ступенчатого сигнала $y_0 1(t)$ через реальное дифференцирующее звено с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{s}{Ts + 1}.$$

Если при этом $T \ll \frac{1}{\sigma}$, то приближение к действию $\delta(t)$-функции будет вполне удовлетворительным.




Фиг. 14.14. Структурная схема системы с дополнительным сигналом по начальным условиям.

На фиг. 14. 14 приведена структурная схема управления снарядом с дополнительными воздействиями ступенчатого сигнала, величина которого определится начальными условиями. На фиг. 14. 14 видно, что сигналы начальных условий $y_0$ и $\dot{y}_0$ в фильтрах и счетно-решающем устройстве преобразуются в сигнал, воздействующий на систему. Образованную таким образом связь можно назвать обратной связью по начальным условиям.

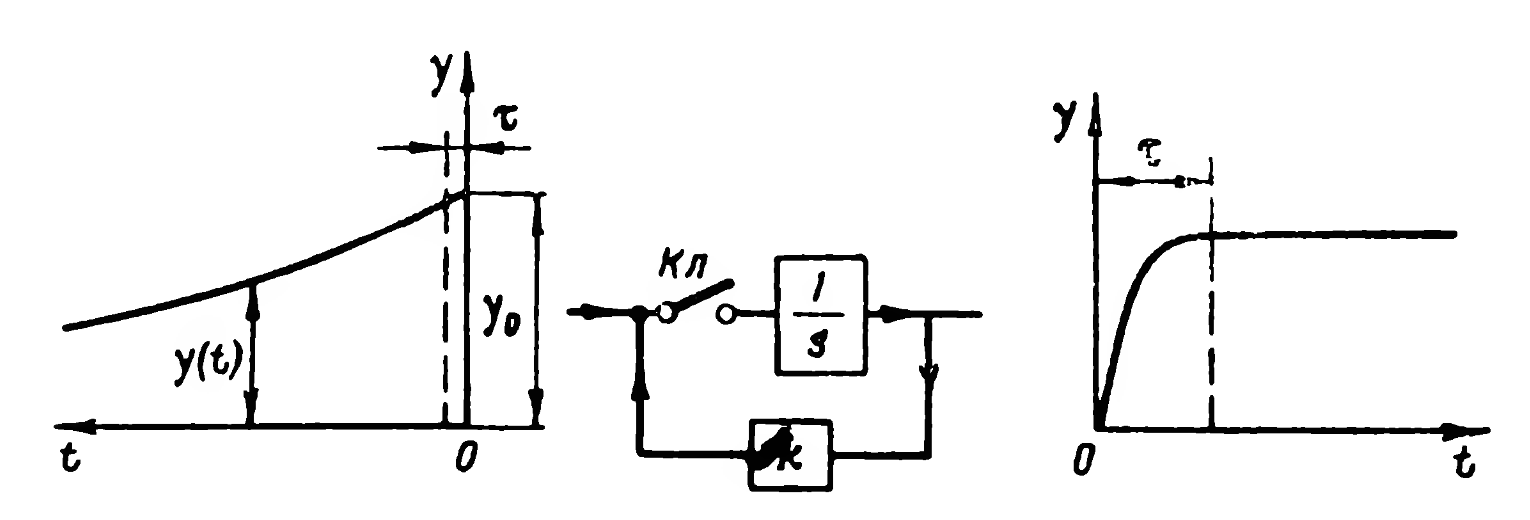
В рассмотренном случае в точку $a$ подается сигнал

$$\left[\frac{6}{5}\sigma^2 - \left(\frac{2}{5}\sigma + \frac{\dot{y}_0}{y_0}\right)\frac{s}{Ts+1}\right] y_0 1(t). \qquad (14.\ 19)$$

Для образования этого сигнала необходимо измерить $y_0$ и $\dot{y}_0$ и произвести с ними операции, указанные в выражении (14. 19). Операции, предписываемые выражением (14. 19), могут быть выполнены бортовой вычислительной машиной дискретного действия. Если такой машины на снаряде нет, то выполнение указанных операций может быть обеспечено набором пассивных фильтров и усилителей. При применении дискретного вычислителя для образования ступенчатого сигнала начальные условия $y_0$ и $\dot{y}_0$ закладываются в память машины на все время ввода снаряда в луч. При отсутствии дискретного вычислителя начальные условия $y_0$

и $\dot{y}_0$ можно «запомнить» с помощью интегрирующего устройства с кратковременно замыкающейся отрицательной обратной связью.

На фиг. 14. 15 приведена схема такого запоминающего устройства и показан принцип его действия. В момент включения бортовой системы управления снарядом ключ *Кл* интегратора замыкается на короткое время $\tau$, за которое координата $y(t)$ существенно не меняется. При замыкании ключа интегратор превращается в следящую систему с коэффициентом в цепи обратной связи $k$. Если взять $\frac{3}{k} < \tau$, то за время $\tau$ входной сигнал, равный $y_0$,




Фиг. 14.15. Структурная схема и графики, поясняющие принцип действия запоминающего устройства.

полностью будет отработан следящей системой и может быть снят с ее выходного датчика. После размыкания ключа *Кл* этот сигнал по-прежнему будет сниматься как постоянная величина или как $y_0 1(t)$ с этого датчика.

Выше рассмотрено применение обратных связей по начальным условиям в линейной системе ввода снаряда в луч. Не представляет трудностей применение этих обратных связей и в нелинейной системе, где связь между отклонением $y$ и сигналом $y_{\text{сигн}}$ является нелинейной функцией, приведенной на фиг. 14.10. В этом случае следует включить систему в момент, когда $y_{\text{сигн}}$ пройдет через максимум и начнет уменьшаться. До этого момента снаряд не управляется и на борту только контролируется координата $y$ по величине $y_{\text{сигн}}$ и скорости сближения $\dot{y}$. Вместо измерения скорости $\dot{y}$ можно ограничиться измерением угла $\vartheta$ между продольной осью снаряда и осью луча. Этот угол может быть измерен с помощью позиционного гироскопа, который ориентируется вдоль оси луча.

## § 14.6. УПРАВЛЕНИЕ СНАРЯДАМИ С ПОМОЩЬЮ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СТАНЦИЙ И РАДИОНАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

С помощью наземных радиолокационных станций кругового обзора, снабженных вычислительными машинами, можно осуществлять наведение крылатых снарядов «земля — земля» и «зем-

ля — воздух», а также истребителей-перехватчиков. Радионавигационные системы могут быть использованы для наведения снарядов «земля — земля».

Радиолокационные станции дают возможность определять как координаты цели, так и координаты снаряда. Как уже указывалось в § 14. 1, в этом случае с помощью вычислительной машины можно реализовать любые законы и методы наведения снарядов на цели. Однако в таких системах управления снарядами будет одна существенная особенность, состоящая в том, что радиолокационные станции измеряют координаты не непрерывно, а дискретно. За каждый оборот антенной системы координаты снаряда или цели получаются один раз в виде импульсов, длительность которых ничтожна по сравнению с временем оборота антенны $T$. Такая прерывистость или дискретность в поступлении информации о координатах цели и снаряда и является наиболее существенной особенностью использования радиолокационных станций кругового обзора для наведения снарядов. Вместо непрерывных систем управления снарядами возникают дискретные или импульсные системы.

Для пояснения работы импульсных систем наведения обратимся сначала к задаче наведения снарядов «земля — земля».

## 1. Наведение крылатых снарядов «земля—земля»

Для наведения этого типа снарядов должны быть известны взаимные координаты цели и станции наведения.

Расположим радиолокационную станцию в начале некоторой полярной системы координат, связанной с землей. Полярная система координат наиболее естественна при использовании радиолокационных станций, поскольку радиолокационная станция измеряет дальность $L$ и азимут $\varphi$ до снаряда или цели. На фиг. 14.16 показана траектория движения снаряда. В результате вращения антенны с частотой $1/T_п$ измеряются координаты дальности $L$ и азимута $\varphi$, которые запоминаются или фиксируются на весь период вращением антенны $T_п$. В результате этого как $\varphi=\varphi(t)$, так и $L=L(t)$ становятся ступенчатыми функциями, составленными из последовательности прямоугольных импульсов.

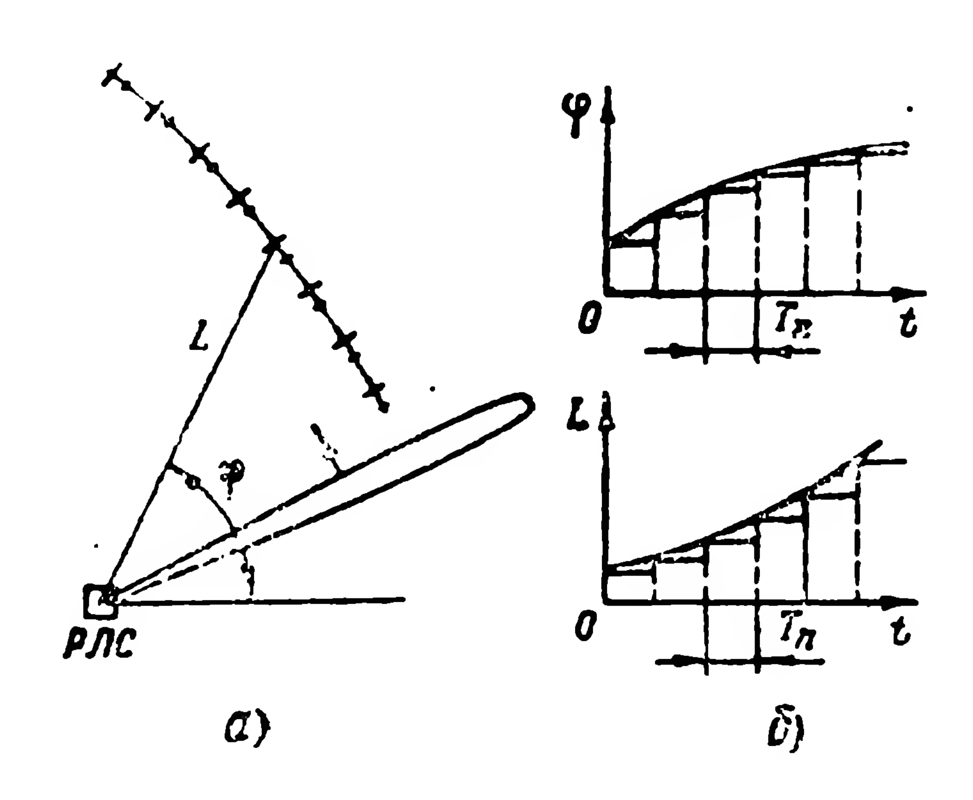
Для наведения снаряда на наземную цель надо назначить траекторию, проходящую через цель и район старта снаряда. Для удержания снаряда на назначенной траектории необходимо измерять отклонения $\varepsilon$ от этой траектории и передавать их в виде сигналов на снаряд.

Любая прямолинейная траектория полностью определяется длиной перпендикуляра $L_0$ до этой траектории и полярным углом этого перпендикуляра $\varphi_0$ или курсом этой траектории $\psi_0=\varphi_0-\frac{\pi}{2}$ (фиг. 14. 17).

Из построения на фиг. 14.17 вытекает, что боковое отклонение от заданной траектории равно

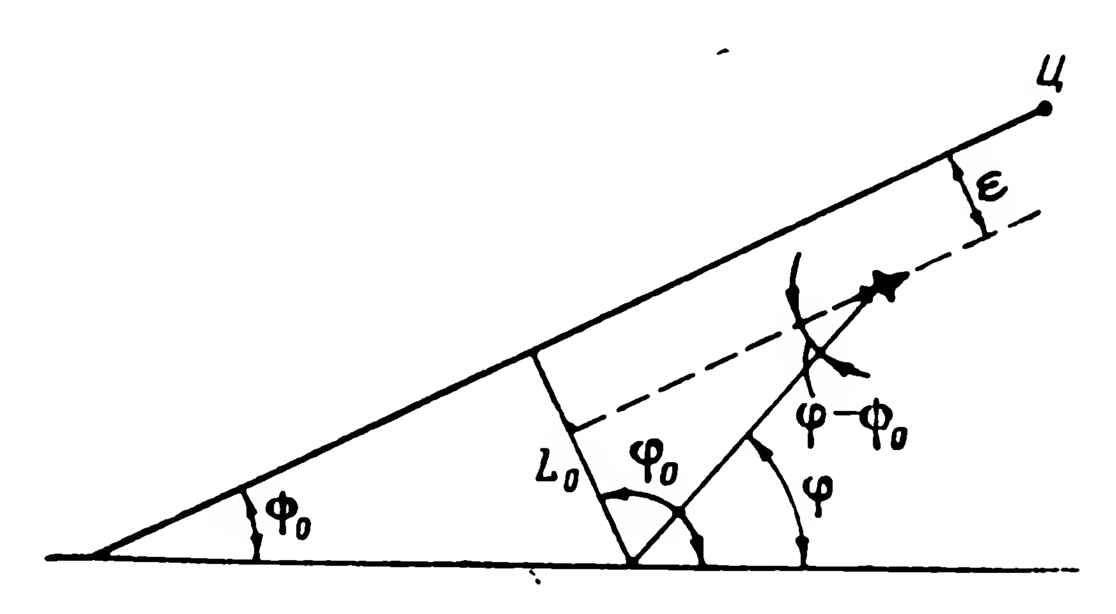
$$\varepsilon = L_0 - L\sin(\varphi - \psi_0). \qquad (14.20)$$

Вычислительная машина радиолокационной станции вычисляет отклонение $\varepsilon$ каждый раз за один оборот антенны. Если вычис-




Фиг. 14.16. Схема, иллюстрирующая использование системы кругового обзора для наведения (*а*) и графики дальности и азимута снаряда (*б*).

лить значения $\varepsilon$ и далее зафиксировать $\varepsilon$ на время одного оборота антенны, то получим ступенчатую функцию $\varepsilon = \varepsilon[t]$. Посылая сиг-

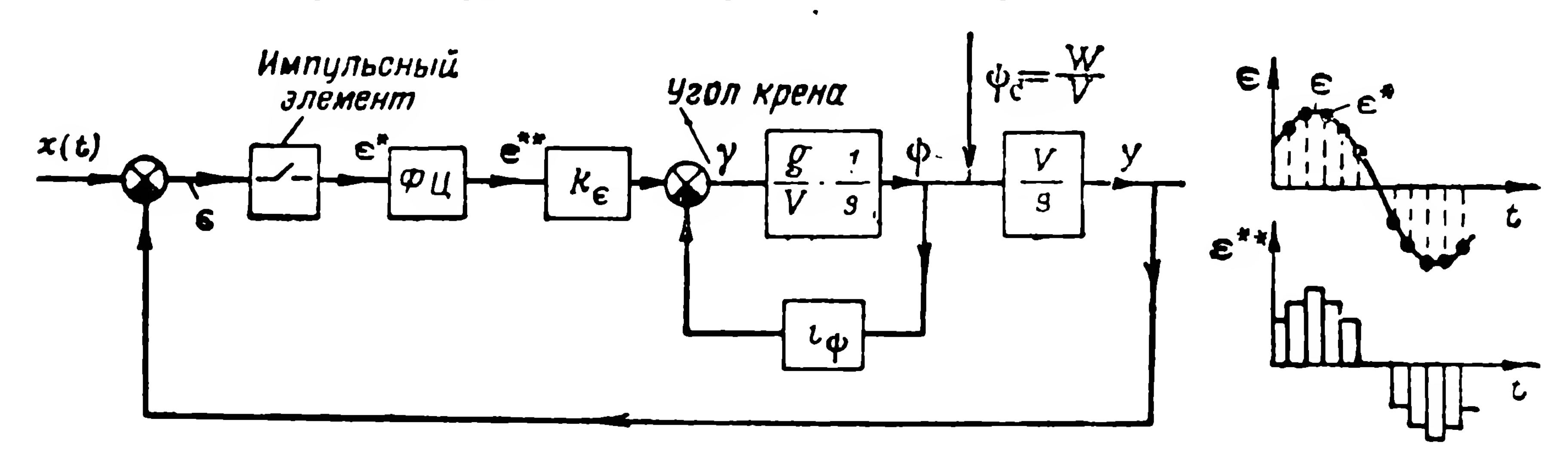



Фиг. 14.17. Схема относительного положения снаряда и заданной траектории.

налы $\varepsilon = \varepsilon[t]$ на борт снаряда, получим дискретную систему автоматической стабилизации снаряда на заданной траектории.

Структурная схема дискретного автоматического управления снарядом на заданной траектории приведена на фиг. 14.18.

Структурная схема построена для крылатого снаряда при скольжении, равном нулю, и для мгновенной реакции снаряда по каналу крена. Для обеспечения структурной устойчивости использована жесткая обратная связь по отклонению курса снаряда $\psi$ от курса траектории $\psi_0$. Сигнал $\psi$ измеряется позиционным гироскопом, ориентированным вдоль заданной траектории. Ориентация гироскопа осуществляется специальной командой с земли в момент назначения траектории *. Дискретное измерение отклонения $\varepsilon$ характеризуется на структурной схеме импульсным элементом, генерирующим $\delta(t)$-функции. При этом интенсивность $\delta(t)$-функции равна значению ошибки $\varepsilon = x(t) - y$ в $n$-й момент времени, т. е.




Фиг. 14.18. Структурная схема системы дискретного управления снарядом.

$$\varepsilon_n = \int_{nT_n}^{\infty} \delta(t - nT_n)\, dt$$

Далее последовательность $\delta(t)$-функций поступает на так называемую формирующую цепь (ФЦ) первого порядка. Эта формирующая цепь преобразует каждый $\delta(t)$-импульс в прямоугольный импульс высоты $\varepsilon_n$. $\delta(t)$-импульсный элемент и формирующая цепь достаточно точно моделируют рабочий процесс радиолокационной станции и вычислительной машины по измерению отклонения или ошибки $\varepsilon = -y$ [при $x(t) = 0$]. Здесь не учитывается запаздывание $\tau \ll T_n$, обусловленное необходимостью обработки измерений $\varphi$ и $L$ и вычисления $\varepsilon = -y$ по формуле (14.20) На вычисления тратится время $\tau$ порядка долей секунд, тогда как $T_n$ — время оборота антенны может быть 4—10 *сек*. Поскольку каждый $\delta(t)$-импульс превращается формирующей цепью в прямоугольный импульс, то изображение Лапласа прямоугольного импульса единичной высоты будет в то же самое время пере-

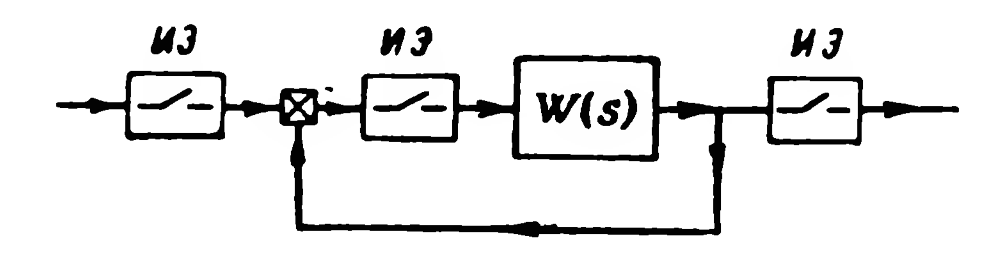
---

* Для такой ориентации на снаряде должна быть представлена курсовая система.

даточной функцией формирующей цепи *. Изображение же прямоугольного импульса равно разности двух смещенных на $T_n$ ступенчатых функций $1(t)$, т. е.

$$W_{\Phi}(s)=\frac{1-e^{-sT_n}}{s}=\frac{z-1}{z}\cdot\frac{1}{s},$$

где обозначено $z=e^{sT_n}$.




Фиг. 14.19. Схема одноконтурной дискретной системы автоматического регулирования.

Передаточная функция всех непрерывных звеньев совместно с передаточной функцией формирующей цепи образуют передаточную функцию непрерывной части системы $W(p)$. В данном случае

$$W(s)=\frac{z-1}{z}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{k}{(T_\psi s+1)s}, \tag{14. 21}$$

где

$$k=\frac{k_\varepsilon}{i_\psi}V\left[\frac{1}{сек}\right],\quad T_\psi=\frac{V}{gi_\psi}\,[сек].$$

Непрерывная часть с передаточной функцией $W(s)$ и $\delta(t)$-импульсный элемент (ИЭ) образуют одноконтурную дискретную систему автоматического регулирования (фиг. 14. 19). Для анализа такой системы непрерывную передаточную функцию $W(s)$ аргумента $s=\sigma\pm j\omega$ целесообразно преобразовать в дискретную передаточную функцию $W[z]$ аргумента $z=e^{sT_n}$. Такое преобразование можно сделать по таблицам соответствия для передаточных функций элементарных звеньев **. Передаточная функция (14.21) после разложения на элементарные дроби или звенья принимает вид

$$W(s)=kT_\psi\cdot\frac{z-1}{z}\left[-\frac{1}{s}+\frac{1}{T_\psi}\cdot\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+1/T_\psi}\right]. \tag{14. 22}$$

* Эта цепь по устройству может быть аналогична ячейке памяти, приведенной на фиг. 14.15.

** Г. С. Поспелов, Импульсные системы автоматического регулирования, Сб. статей «Автоматическое управление и вычислительная техника», Машгиз, вып. 3, 1960.

Имеются следующие соотношения:

$$\frac{1}{s} \div \frac{z}{z-1}, \qquad \frac{1}{s^2} \div \frac{zT_n}{(z-1)^2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{s+1/T_\psi} \div \frac{z}{z-a},$$

где

$$a = e^{-\frac{T_n}{T_\psi}}.$$

Используя эти соотношения, получим

$$W[z] = \lambda_2 \frac{(\lambda_1 + a - 1)z + 1 - a(\lambda_1 + 1)}{z^2 - (a+1)z + a}, \tag{14.23}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{T_n}{T_\psi}; \qquad \lambda_2 = kT_\psi.$$

Передаточная функция (14.23) является передаточной функцией разомкнутой системы. Для получения передаточной функции замкнутой системы воспользуемся соотношением между этими функциями, которое аналогично соответствующему выражению для непрерывных систем:

$$\Phi[z] = \frac{W[z]}{1 + W[z]} = \frac{d_1 z + d_0}{z^2 + b_1 z + b_0}, \tag{14.24}$$

где

$$d_1 = (\lambda_1 + a - 1)\lambda_2, \quad d_0 = [1 - a(\lambda_1 + 1)]\lambda_2,$$

$$b_0 = d_0 + a, \quad b_1 = d_1 - (a+1).$$

Знаменатель передаточной функции (14.24) представляет собой характеристическое уравнение разностного уравнения, описывающего поведение выходной координаты $y$ в дискретных точках $t=0$; $T_n$, $2T_n, \ldots, nT_n$. Само однородное уравнение в конечных разностях в данном случае имеет вид

$$y_{n+2} + b_1 y_{n+1} + b_0 y_n = 0, \tag{14.25}$$

где

$$y_n = y(t)\,|_{t=nT_n}.$$

Уравнение (14.25) представляет собой рекуррентное соотношение, позволяющее вычислить все значения $y_n$ начиная с $y_2$ по заданным начальным условиям $y_0$ и $y_1$.

Для устойчивости системы, т. е. чтобы $y_n \to 0$ при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения

$$z^2 + b_1 z + b_0 = 0$$

по модулю были бы меньше единицы. Очевидно, что корни и их расположение в единичном круге на плоскости $z$, определят и характер переходных процессов.

Передаточная функция (14. 24), как и в непрерывных системах, является изображением * импульсной реакции системы. Для получения импульсной реакции разложим $\Phi[z]$ в ряд по степеням $z^{-1}$ **

$$\Phi[z] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-nT_n p}. \tag{14.26}$$

Как видно из выражения (14. 26), коэффициенты ряда, называемые в данном случае коэффициентами веса, представляют собой ординаты импульсной реакции системы в точках $t=0$, $T_n$, $2T_n$, $3T_n, \ldots, nT_n$.

Для получения переходной функции следует разложить в ряд выражение $\Phi[z]\dfrac{z}{z-1}$:

$$\Phi[z]\frac{z}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n z^{-n}. \tag{14.27}$$

Здесь $H_n$ — ордината переходной функции ($n=0, 1, 2, \ldots$).

Переходная функция $H(t)$ рассматриваемой системы является непрерывной функцией. Указанная выше методика позволяет определить значения этой функции в дискретных точках $t=0$, $T_n$, $2T_n; \ldots, nT_n$ (фиг. 14. 20). Требования к переходной функции аналогичны требованиям к непрерывным переходным функциям при наведении по лучу.

Рассмотренная выше методика использования радиолокационных станций для наведения снарядов «земля — земля» в общих чертах может быть использована при наведении этого класса снарядов различными радионавигационными системами. С помощью радионавигационных систем и счетно-решающего устройства, которое в этом случае располагается на борту снаряда, задается траектория, проходящая через цель. Для удержания снаряда на заданной траектории используются сигналы отклонения центра тяжести снаряда от заданной траектории, получаемые с помощью радионавигационной системы. Методы получения управляющих сигналов рассмотрены в гл. IV.

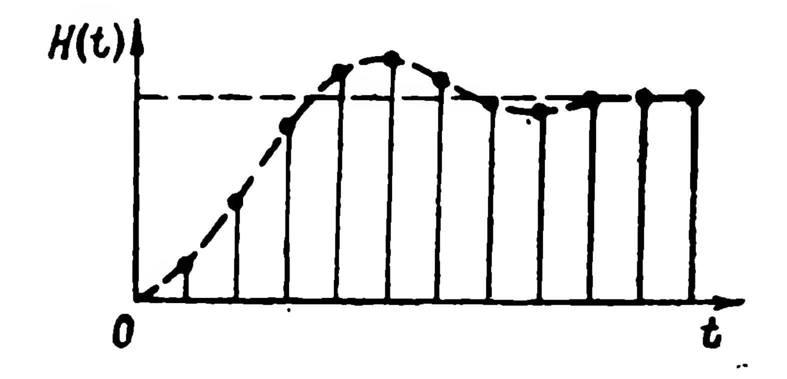
---

* $Z$-изображением или дискретным изображением.

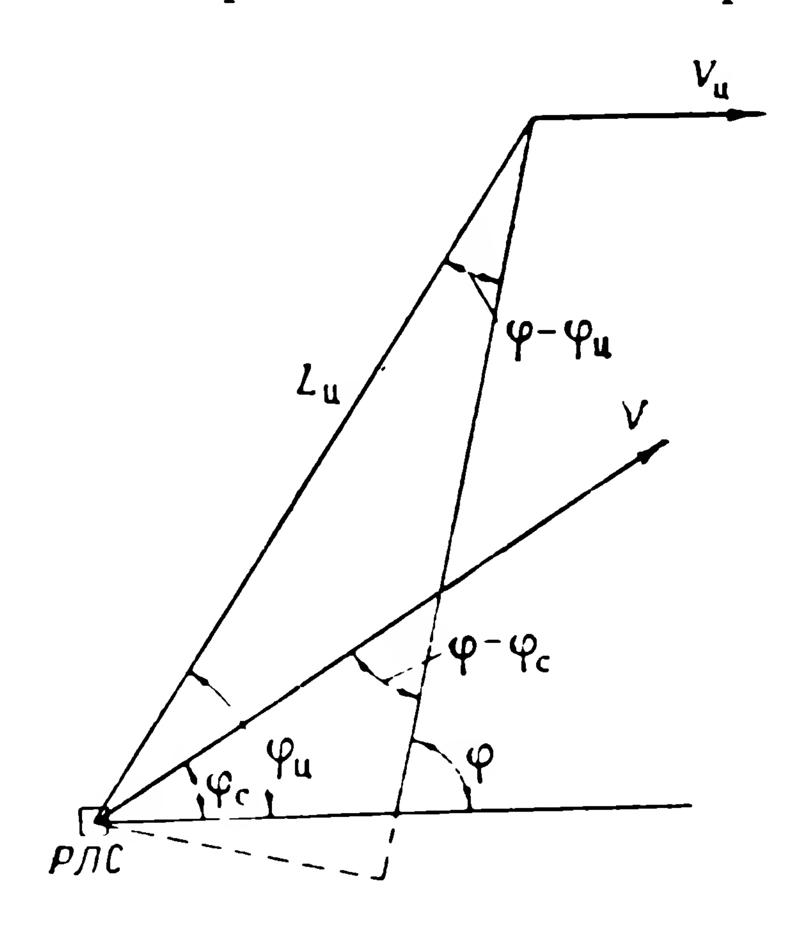
** Разложить в ряд можно последовательным делением числителя $\Phi[z]$ на знаменатель.

## 2. Наведение крылатого снаряда «земля—воздух» и истребителей-перехватчиков с помощью радиолокационных станций

Счетно-решающее устройство наземной радиолокационной станции позволяет реализовать любой метод наведения снаряда. Рассмотрим реализацию метода параллельного сближения. Радиолокационная станция за каждый оборот антенны измеряет азимут снаряда $\varphi_c$, дальность до снаряда $L_c$, азимут цели $\varphi_ц$ и дальность до цели $L_ц$ (фиг. 14.21). По этим данным можно определить положение цели и снаряда в принятой системе координат, векторы скоростей цели и снаряда, вычислить расстояние между целью и снарядом, определить




Фиг. 14.20. График дискретных значений переходной функции.




**Фиг. 14.21. Геометрические соотношения при наведении снаряда наземной радиолокационной станцией.**

значение угловой скорости линии снаряд — цель и т. п. Наконец, воспользовавшись выражением (13.46), можно определить текущий промах $y$. Так же как и отклонение от траектории $y$ в предыдущем случае, промах определяется один раз за оборот антенны $T_n$ и фиксируется на весь промежуток. Текущий промах, который можно получить, будет представляться в виде такой же ступенчатой кривой, как $\varphi$ и $L$ на фиг. 14.16.

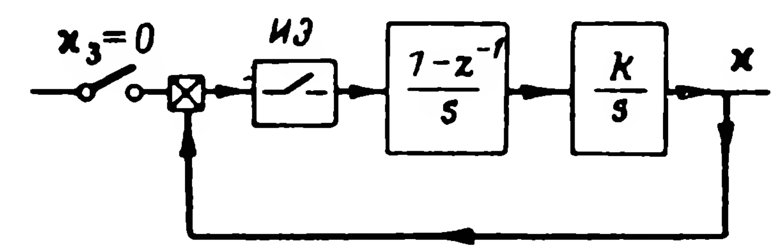
Пусть теперь согласно выражению (13.58) формируется управляющий сигнал, посылаемый по линии телеуправления на снаряд. Сигнал $v(t) = -\frac{k_y}{k_c}x$ также будет представлять собой последовательность прямоугольных импульсов. Поскольку связь между промахом и углом атаки дается выражением (13.56), то получим дискретную систему автоматического регулирования первого порядка. Структурная схема этой системы приведена на

фиг. 14. 22. Передаточная функция непрерывной части в данном случае будет иметь вид

$$W(s) = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{k}{s^2}.$$

Соответственно передаточная функция аргумента $z$ должна быть записана в форме

$$W[z] = \frac{kT_n}{z-1}.$$




Фиг. 14.22. Структурная схема дискретной системы первого порядка.

Откуда передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi[z] = \frac{kT_n}{z-(1-kT_n)} = \frac{1-a}{z-a}, \tag{14.28}$$

где $1 - kT_n = a$.

Система устойчива и промах уменьшается, если $|a| < 1$. Уравнение в конечных разностях, соответствующее передаточной функции, имеет вид

$$x_{n+1} - ax_n = 0$$

или

$$x_{n+1} = ax_n. \tag{14.29}$$

Если начальный промах был $x_0$, то

$$x_1 = ax_0, \qquad x_2 = ax_1 = a^2x_0,$$

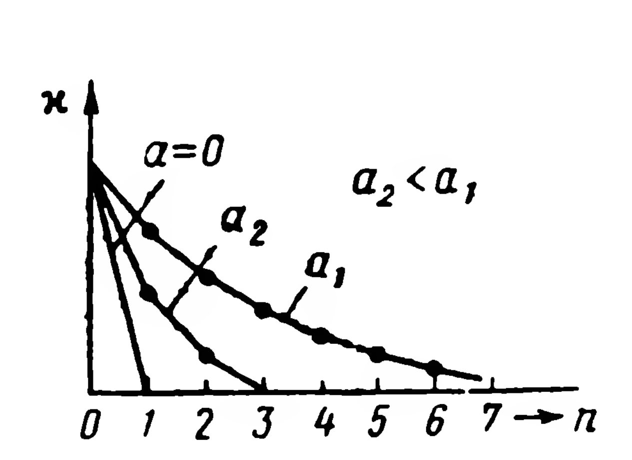
$$x_n = a^nx_0 \tag{14.30}$$

$$n = (0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \infty).$$

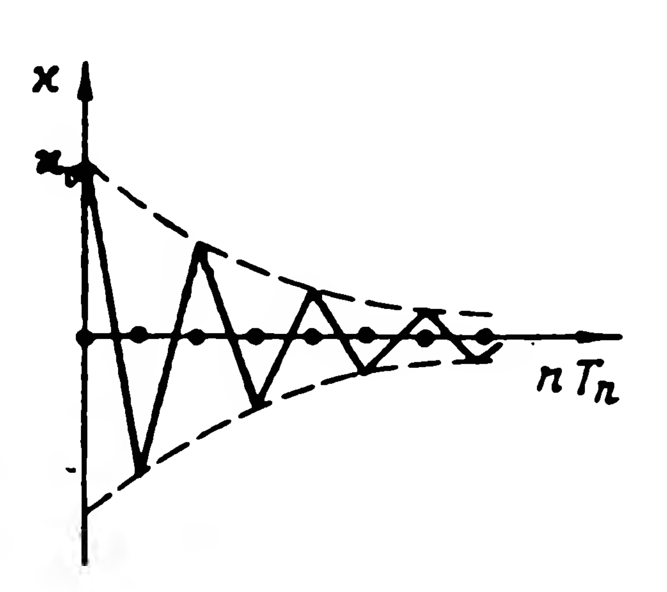
Последнее выражение является решением разностного уравнения (14. 29), поскольку оно определяет значение промаха за $n$-й период поворота антенны через начальный промах и параметр системы $a = 1 - kT_n$. Из этого выражения также видно, что $x_n|_{n\to\infty} \to 0$, только если $|a| < 1$. При этом чем меньше $|a|$, тем быстрее убывает промах. Выражение (14. 30) показывает, что промах убывает по закону геометрической прогрессии. Это означает, что огибающей ординат промаха будет экспонента с показателем $-\frac{1}{T_n}\ln\frac{1}{a}$. Как видно из структурной схемы, приведенной

на фиг. 14.22, на вход интегрирующего звена действуют прямоугольные импульсы. Это значит, что в пределах $T_n$ выход интегрирующего звена или промах $\varkappa$ будет изменяться по линейному закону.

На фиг. 14.23 представлены графики изменений $\varkappa$ для двух положительных значений $a$, меньших единицы. Как уже упоминалось, чем меньше $a$, тем быстрее затухает промах $\varkappa$. Из выражения для $a=1-kT_n$ видно, что выбором величины $k$ можно сделать $a=0$. В этом случае промах $\varkappa$ обратится в нуль за один период повторения $T_n$ (на фиг. 14.23 случай $a=0$). Однако при значении $a$, равном или близком к нулю, будет неблагоприятной реакция системы на шумы и помехи. Поэтому эти значения $a$ не всегда могут быть рекомендованы. Не рекомендуется также брать $a$ отрицательным. Согласно уравнению (14.30) отрицательное $a$ (меньшее единицы) приведет к колебательно-затухающему изменению промаха. Частота колебаний при этом равняется $1/2T_n$. График изменения промаха при отрицательном $a$ приведен на фиг. 14.24.




Фиг. 14.23. Графики изменения промаха при положительных значениях параметра $a$, меньших единицы.




Фиг. 14.24. График изменения промаха при отрицательном значении параметра $a$.

Уравнение (14.29) получено путем формального применения аппарата теории дискретных систем автоматического регулирования. Это же выражение можно получить непосредственно. В самом деле, вместо дифференциального уравнения (13.56) запишем уравнение в конечных разностях, отвечающее существу дискретного управления снаряда:

$$\frac{\Delta\varkappa_n}{T_n}=L_{en}\frac{k_V}{T_V}\alpha_n, \tag{14.31}$$

где

$$\Delta\varkappa_n=\varkappa_{n+1}-\varkappa_n;$$

$L_{en}$ — значение дальности в момент $t=nT_n$;
$\alpha_n$ — угол атаки в момент $t=nT_n$.

Потребуем, чтобы

$$\alpha_n = -\frac{k_y}{L_{en}} \varkappa_n. \tag{14.32}$$

Тогда из формулы (14.31) получим

$$\Delta\varkappa_n + kT_n\varkappa_n = 0, \tag{14.33}$$

где

$$k = \frac{k_y k_V}{T_V}.$$

Так как $\Delta\varkappa_n = \varkappa_{n+1} - \varkappa_n$, то от уравнения (14.33) приходим к уравнению (14.29).

Вычисление промаха $\varkappa$ вычислительной машиной представляет собой достаточно сложную операцию. Ограничимся вычислением только $\dot{\varphi}$. Кроме того, как было указано в гл. XIII, изменение угла атаки в функции $\varphi$ несколько выгоднее, чем изменение в функции промаха. Угловую скорость $\dot{\varphi}$ можно определить через приращение угла $\varphi$ за оборот антенны, т. е.

$$\dot{\varphi}_n = \frac{\Delta\varphi_n}{T_n} = \frac{\varphi_{n+1} - \varphi_n}{T_n}. \tag{14.34}$$

Угол $\varphi$ при каждом обороте антенны вычисляется вычислительной машиной по формуле

$$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg} \frac{L_{\text{ц}n} \sin \varphi_{\text{ц}n} - L_{\text{с}n} \sin \varphi_{\text{с}n}}{L_{\text{ц}n} \cos \varphi_{\text{ц}n} - L_{\text{с}n} \cos \varphi_{\text{с}n}}, \tag{14.35}$$

где $L_{\text{с}n}$, $L_{\text{ц}n}$ — дальность до снаряда и цели;
$\varphi_{\text{с}n}$, $\varphi_{\text{ц}n}$ — азимуты снаряда и цели.

Теперь потребуем, чтобы $\alpha_n = -k_{\dot{\varphi}}\dot{\varphi}_n$. В этом случае, учитывая связь промаха $\varkappa_n$ с $\dot{\varphi}_n$ и выражение (14.31), получим уравнение в конечных разностях в следующем виде:

$$\frac{\Delta\varkappa_n}{T_n} + \frac{k}{l_0 - nT_n}\varkappa_n = 0$$

или

$$\varkappa_{n+1} = \left(1 - \frac{kT_n}{l_0 - nT_n}\right)\varkappa_n. \tag{14.36}$$

Формула (14.36), как и дифференциальное уравнение (13.67), является уравнением с переменными коэффициентами. Решение (14.36) можно представить в форме

$$\varkappa_n = \varkappa_0 \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{l_0/T_n - i}\right). \qquad (14.37)$$

В табл. 14.1 приведены результаты вычислений по формуле (14.37) для

$$l_0/T_n = 9{,}5, \quad k = 6 \quad \text{и} \quad k = 2.$$

Если в непрерывной системе при любом $k$ начальный промах $\varkappa$ согласно выражению (13.82) всегда обращается в нуль при $l=0$, то в дискретной системе этого не наблюдается. Промах не только не обращается в нуль, но и может менять знак в районе цели *. Таким образом, точность попадания при дискретном наведении оказывается всегда меньше, чем при непрерывном.

*Таблица 14.1*

**Результаты вычисления промаха по формуле (14.37)**

| $n$ | $i$ | $k=6$: $\frac{6}{9{,}5-i}$ | $k=6$: $1-\frac{6}{9{,}5-i}$ | $k=6$: $\varkappa_n$ | $k=2$: $\frac{2}{9{,}5-i}$ | $k=2$: $1-\frac{2}{9{,}5-i}$ | $k=2$: $\varkappa_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | — | — | — | 1 | — | — | 1 |
| 1 | 0 | 0,63 | 0,37 | 0,37 | 0,210 | 0,790 | 0,790 |
| 2 | 1 | 0,706 | 0,294 | 0,109 | 0,235 | 0,765 | 0,605 |
| 3 | 2 | 0,8 | 0,2 | 0,0216 | 0,267 | 0,733 | 0,442 |
| 4 | 3 | 0,925 | 0,075 | $0{,}162\cdot10^{-2}$ | 0,308 | 0,692 | 0,306 |
| 5 | 4 | 1,09 | —0,09 | $-0{,}146\cdot10^{-3}$ | 0,364 | 0,636 | 0,195 |
| 6 | 5 | 1,33 | —0,33 | $0{,}48\cdot10^{-4}$ | 0,445 | 0,555 | 0,109 |
| 7 | 6 | 1,72 | —0,72 | $-0{,}346\cdot10^{-4}$ | 0,572 | 0,428 | 0,0465 |
| 8 | 7 | 2,4 | —1,4 | $0{,}485\cdot10^{-4}$ | 0,8 | 0,2 | $0{,}93\cdot10^{-2}$ |
| 9 | 8 | 4 | —3,0 | $-0{,}145\cdot10^{-3}$ | 1,33 | —0,33 | $-0{,}307\cdot10^{-2}$ |
| 10 | 9 | 12 | —11 | $0{,}18\cdot10^{-2}$ | 4 | —3 | $0{,}92\cdot10^{-2}$ |

* В частном случае, когда при каком-либо $n$ $\frac{k}{l_0/T_n - i}$ обращается в 1,0, промах начиная с этого интервала становится равным нулю.

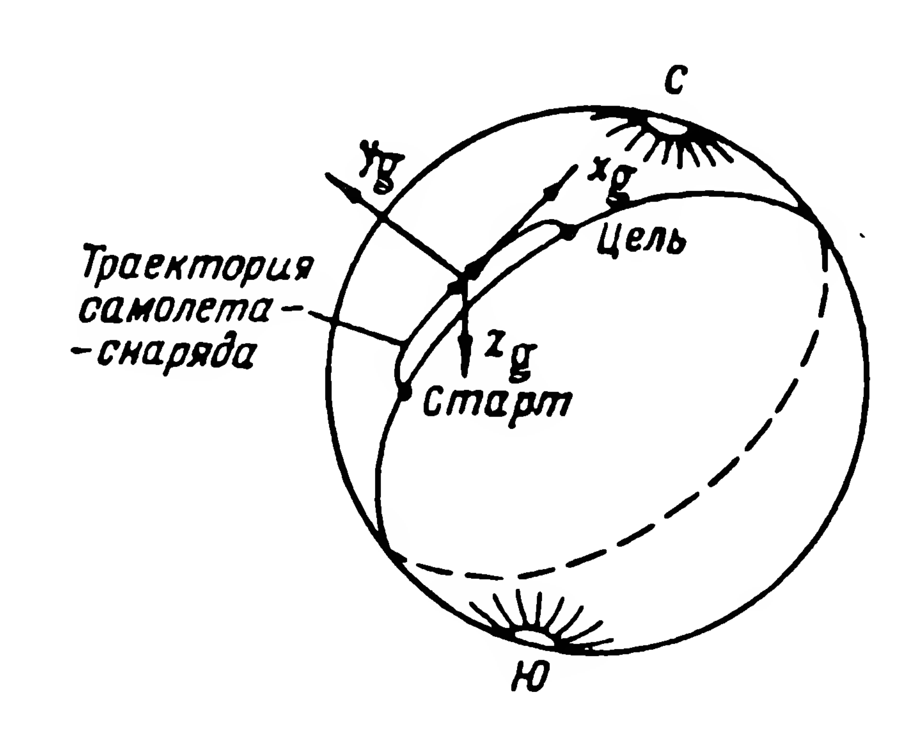
*Глава XV*

# ДИНАМИКА АВТОНОМНО НАВОДИМЫХ СНАРЯДОВ

## § 15.1. УПРАВЛЕНИЕ И НАВЕДЕНИЕ САМОЛЕТОВ-СНАРЯДОВ С ПОМОЩЬЮ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

### 1. Прямолинейный полет на цель

Для наведения на наземную цель самолетов-снарядов необходимо знать или географические координаты цели, или дальность и азимут цели относительно места старта. Иногда вместо точки старта используется какой-либо другой ориентир, по отношению к которому фиксируется положение и скорость снаряда. При заданных дальности и азимуте цели в качестве траектории полета можно принять дугу большого круга, проложенную с учетом вращения Земли. Один из акселерометров $A_x$ ориентируется вдоль дуги большого круга, а второй $A_z$ — нормально к плоскости большого круга.

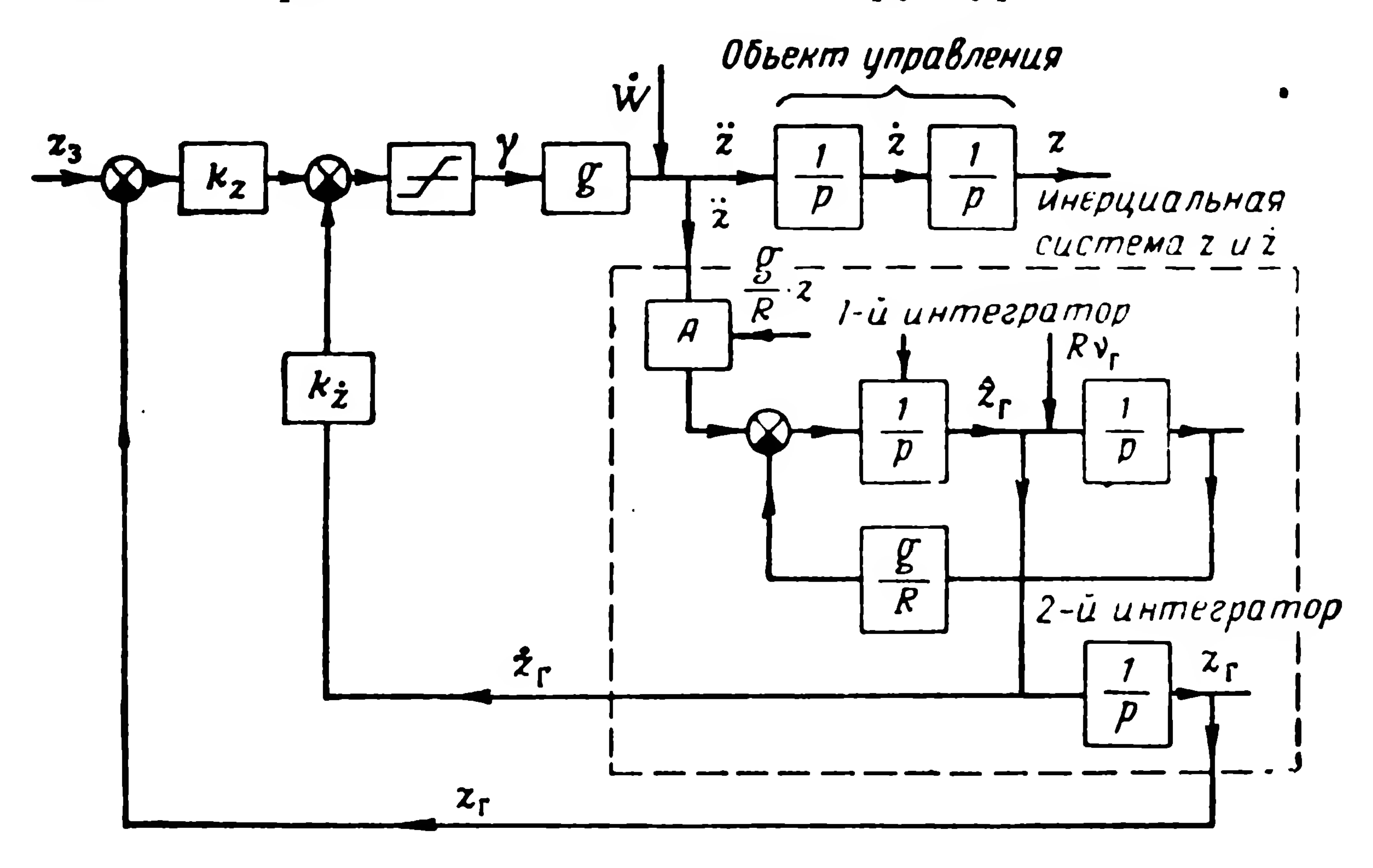


Фиг. 15.1. Траектория полета самолета снаряда по дуге большого круга.

Управление по дальности $L$ (фиг. 15.1) весьма несложно: на выходе второго интегратора инерциальной системы фиксируется пройденный путь $L$. Этот пройденный путь сравнивается с заданным программным значением дальности до цели $L_з$, заранее установленным на борту ракеты в программном механизме или счетно-решающем устройстве. Когда $x$ станет равным $L_з$, самолет-снаряд переводится в пикирование на цель и, если имеется система самонаведения, то подается сигнал на ее включение. При таком управлении дальностью возникает необходимость в стабилизации траектории в боковом движении.

Координата $z$ (фиг. 15.1) в течение всего времени полета

должна выдерживаться равной нулю *. Структурная схема системы стабилизации самолета-снаряда с помощью инерциальной системы приведена на фиг. 15. 2. Предполагают далее, что самолет-снаряд летит без скольжения и что переходными процессами по крену можно пренебречь. Структурная схема инерциальной системы, изображенная на фиг. 15. 2, эквивалентна структурной схеме, изобра-




Фиг. 15.2. Структурная схема системы стабилизации самолета-снаряда с помощью инерциальной системы.

женной на фиг. 5.27, так как $z/R=\beta_п$, а $\dot{z}_г/R=\dot{\beta}_г$. Акселерометр $A$ испытывает воздействие суммарного бокового ускорения $\ddot{z}$ от накренения снаряда $g\gamma$ и от ветра $\dot{w}$, а также составляющей силы тяжести $gz/R$. Для стабилизации на траектории в канал крена подаются сигналы $z_г=z+\eta$ и $\dot{z}_г=\dot{z}+\dot{\eta}$, где $z$ и $\dot{z}$ — истинные отклонения ракеты от заданной траектории и скорость этого отклонения, $z_г$ и $\dot{z}_г$ — те же величины, но измеренные инерциальной системой и $\dot{\eta}$, $\eta$ — ошибки измерения боковой скорости и бокового отклонения. Эти ошибки были рассмотрены в гл. V. Для недемпфированной и некорректированной гироплатформы ошибки $\eta$ и $\dot{\eta}$ содержат гармонические составляющие с периодом Шулера. В результате дрейфа платформы с постоянной скоростью ошибка $\eta$ будет содержать линейно нарастающую компоненту. Положим, что в погрешностях $\eta$ и $\dot{\eta}$ учтены не все погрешности инерциальной системы, а именно погрешности, связанные с порого-

* Как будет показано ниже, это необязательно, если возникает необходимость маневра ракеты.

выми значениями акселерометров и интеграторов, отступлениями передающих свойств интеграторов от идеальных с передаточной функцией $1/p$. Заметим, что в объекте управления звенья $1/p$ всегда являются идеальными, поскольку они характеризуют кинематические связи между ускорением и скоростью, а также скоростью и координатой. В сущности задачей инерциальной системы является, кроме измерения ускорений, возможно более точное моделирование идеальных звеньев $1/p$ объекта управления.

На структурной схеме, приведенной на фиг. 15.2, в цепи сигнала управления креном показано ограничение крена. Для малых отклонений от заданной траектории и в зоне пропорциональности ограничителя крена будем иметь следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= V\theta_б + W; \\ V\dot{\theta}_б &= g\gamma; \\ \gamma &= k_z(z_з - z_г) - k_{\dot{z}}\dot{z}_г; \\ z_г &= z + \eta; \\ \dot{z}_г &= \dot{z} + \dot{\eta}, \end{aligned}\right\} \tag{15. 1}$$

где $V$ — воздушная скорость ракеты принята постоянной;

$W$ — скорость ветра, нормальная к траектории;

$z_з = z_з(t)$ — сигнал от программного механизма для смещения ракеты с траектории, если потребуется. Если смещение не требуется, то $z_з = 0$;

$\theta_б$ — угол между заданной траекторией и вектором воздушной скорости самолета.

Исключая из первых двух уравнений $V$ и $\theta_б$, получим выражение для ускорения

$$\ddot{z} = g\gamma + \dot{W}, \tag{15. 2}$$

которое и реализовано по структурной схеме, изображенной на фиг. 15.2. Построение структурной схемы с учетом выражения (15.2) справедливо только в том случае, если инерциальная система приведена в действие до старта снаряда. Только в этом случае возмущение $W$, приложенное перед вторым интегратором объекта [см. первое уравнение в системе (15.1)], эквивалентно возмущению $\dot{W} = dW/dt$, приложенному перед первым интегратором объекта так, как это показано на фиг. 15.2. Если же, например, инерциальная

система включается после старта в потоке постоянного бокового ветра, то преобразование возмущения $W$ в $\dot{W}$ оказывается несправедливым, поскольку в этой ситуации акселерометр инерциальной системы не будет воспринимать никакого ускорения, связанного с равномерным движением воздушной массы.

Уравнения (15.1) сводятся к одному уравнению второго порядка относительно координаты $z$:

$$\ddot{z}+a_1\dot{z}+a_0 z=a_0 z_3+\dot{W}-a_0\eta-a_1\ddot{\eta}, \tag{15.3}$$

где

$$a_0=gk_z \quad \text{и} \quad a_1=gk_{\dot{z}}.$$

Параметры $k_z$ и $k_{\dot{z}}$ можно выбрать, исходя из заданного коэффициента затухания $\zeta=a_1/2\sqrt{a_0}$ и времени регулирования $t_р$. При оптимальном коэффициенте затухания $\zeta=\sqrt{2}/2$ время регулирования $t_р=\pi/\sqrt{a_0}=\pi/\sqrt{gk_z}$, откуда

$$k_z=\frac{57{,}3}{t_р^2}\left[\frac{\textit{град крена}}{\textit{м}}\right].$$

Время $t_р$ — обычно 20—60 *сек*. Меньшее время регулирования реализовать затруднительно из-за нелинейностей и ограничений в автопилоте. При коэффициенте затухания $\zeta=\sqrt{2}/2$ порция сигнала по производной равна

$$k_{\dot{z}}=25{,}8\frac{1}{t_р}\left[\frac{\textit{град крена}}{\textit{м}\cdot\textit{сек}}\right].$$

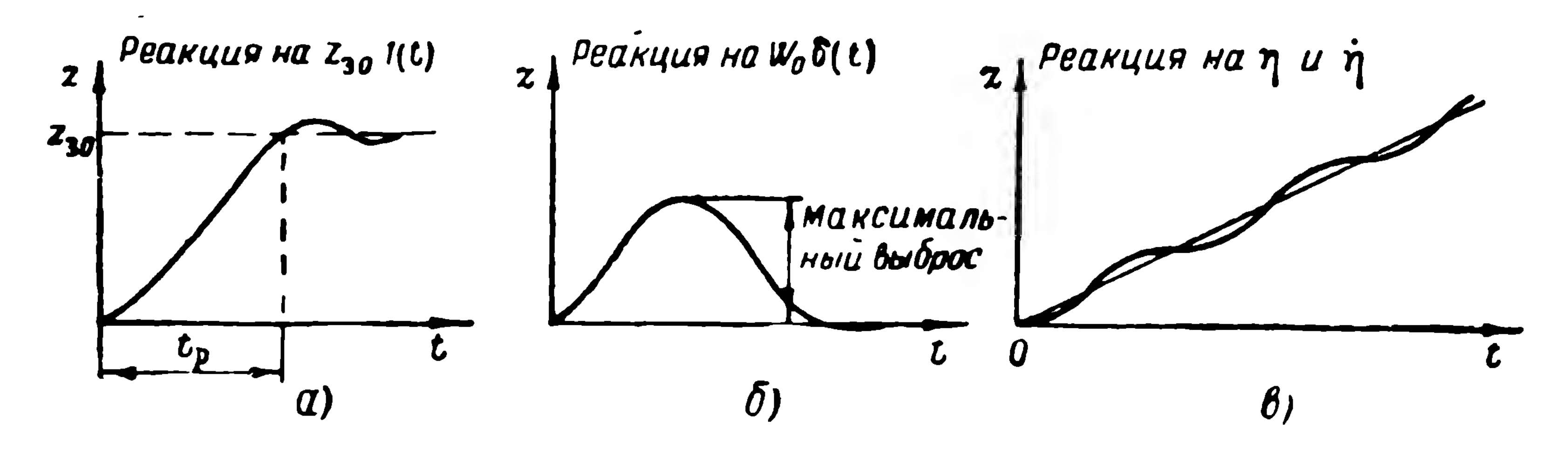
Рассмотрим реакцию системы на возмущение функции в правой части уравнения (15.3). При $z_3=z_{30}1(t)$, где $z_{30}=\text{const}$ — траектория полета сместится в сторону на $z_0$ (фиг. 15.3, *а*). Если позволяет запас горючего, то с помощью сигнала $z_3(t)$ можно реализовать противозенитный маневр на каком-либо участке траектории. Наиболее эффективным маневр будет в случае, если $z_3(t)$ есть случайная функция времени. Противозенитный маневр путем генерации $z_3(t)$ не окажет влияния на работу канала дальности инерциальной системы, поскольку ось $x$ этой системы ориентирована на цель. При попадании самолета-снаряда в момент времени $t_1$ в поток бокового ветра постоянной скорости из (15.3) получим следующее уравнение *:

$$\ddot{z}+a_1\dot{z}+a_0 z=W_0\delta(t), \tag{15.4}$$

* В уравнении момент $t_1$ принят за начало отсчета, т. е. положено $t_1=0$.

где $W_0$ — скорость бокового ветра $\delta(t) = \frac{d}{dt} \, 1(t)$.

В результате импульсного воздействия $\delta(t)$ самолет-снаряд сначала отклонится, а затем вновь возвратится на заданную траекторию (см. фиг. 15. 3, *б*). Максимальный выброс с траектории будет тем меньше, чем выше коэффициенты $k_z$ и $k_{\dot z}$, т. е. чем меньше время регулирования $t_р$ при реакции на ступенчатый сиг-



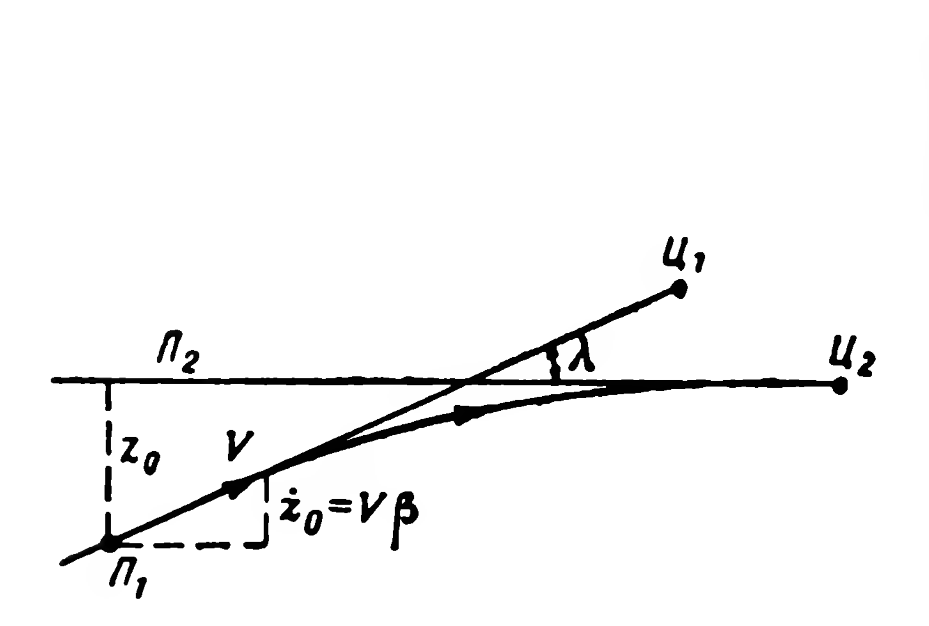

Фиг. 15.3. Кривые реакции системы на возмущающие функции.

нал $1(t)$. Уравнение (15.3) позволяет определить реакцию снаряда на ошибки $\eta$ и $\dot\eta$, которые для рассматриваемой системы являются возмущающими функциями; как уже упоминалось, ошибки $\eta$ и $\dot\eta$ содержат синусоидальную составляющую с круговой частотой Шулера $\sqrt{g/R}$, постоянную и линейно нарастающую составляющие. Круговая частота собственных колебаний самолета-снаряда при времени регулирования, например, 31,4 *сек* равна 0,1 1/*сек*, а круговая частота Шулера равна 0,0393 1/*сек*. Поэтому траектория самолета-снаряда фактически без искажений будет повторять законы изменения ошибок $\eta$ и $\dot\eta$ (фиг. 15.3, *в*). Как видно, дрейф платформы гироинерциальной системы будет приводить к постепенному отходу самолета-снаряда от заданной траектории полета. Предотвратить этот уход можно только путем коррекции инерциальной системы.

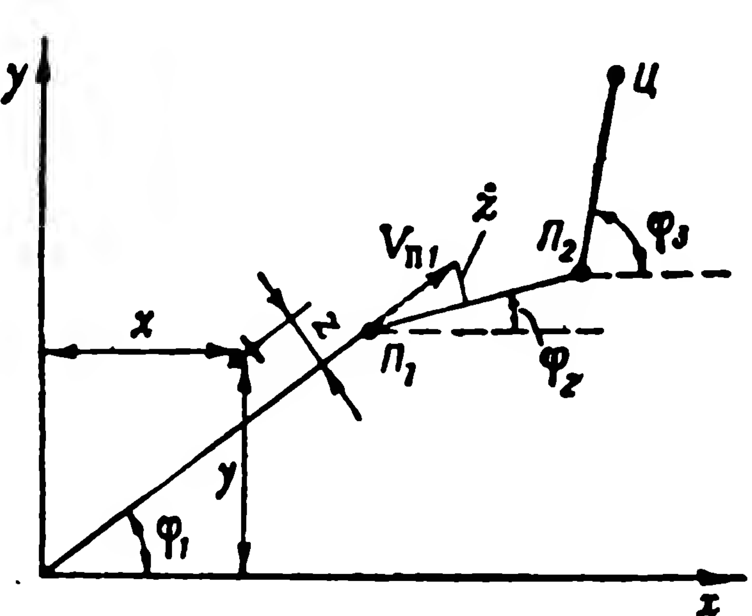
## 2. Ввод начальных условий. Полет по программной траектории

Проблема ввода начальных условий возникает, если в момент включения системы управления самолет-снаряд не находился на заданной траектории или сама траектория внезапно должна быть изменена. Такие ситуации могут возникнуть при использовании инерциальных систем в снарядах «земля — воздух» или при перенацеливании самолетов-снарядов. Начальные условия могут быть введены только с помощью дополнительных источников информации (радиолокационных, радионавигационных или каких-либо других). Пусть, например, снаряд направлялся на цель $Ц_1$ по прямой $П_1Ц_1$ (фиг. 15. 4). При этом непрерывно или эпизодически производилось слежение за полетом снаряда с пункта управления,

например, с помощью радиотехнических средств. В момент, когда снаряд находился в точке $П_1$, принимается решение навести снаряд на цель $Ц_2$ по прямой $П_2Ц_2$. По отношению к прямой $П_2Ц_2$ снаряд имеет начальные условия $z_0$ и $\dot{z}_0 = V\lambda$, где $\lambda$ — угол между траекториями $П_1Ц_1$ и $П_2Ц_2$. (В рассматриваемом примере угол $\lambda$ — мал, поэтому отсчет координаты $z$ для обеих траекторий можно производить в одной и той же системе координат). Значения $z_0$ и $\dot{z}_0$ должны быть определены внешним источником




Фиг. 15.4. Траектория полета снаряда при перенацеливании.




Фиг. 15.5. Ломаная программная траектория снаряда.

информации и введены на входы второго и первого интеграторов. Перед введением начальных условий интеграторы следует отключить от акселерометра и автопилота и установить в нулевое положение, т. е. сбросить накопившиеся значения на выходе. После ввода начальных условий вся система вновь включается. Аналогичные операции должны быть проделаны с системой регистрации дальности до цели. Точность определения начальных условий внешним источником информации определяет точность задания новой траектории и точность выхода на новую цель.

Ввод начальных условий требуется также при реализации полета по ломаной программной траектории (фиг. 15. 5) Пусть от $П_0$ к цели необходимо пройти по ломаной $П_0П_1П_2Ц$. Акселерометры в прямоугольной системе координат ориентированы вдоль осей $x$ и $y$. Следовательно, инерциальная система дает возможность получить сигналы $x$, $y$ и $\dot{x}$, $\dot{y}$. Для реализации полета вдоль прямой, не совпадающей с осями координат $x$ и $y$, требуется счетно-решающее устройство. Если прямая, вдоль которой должен двигаться снаряд, проходит через начало координат, то ее положение целиком определяется углом $\varphi_1$. Пройденный путь $L$ и скорость $V$ вдоль прямой вычисляются по формулам

$$L = x\cos\varphi_1 + y\sin\varphi_1; \tag{15.5}$$

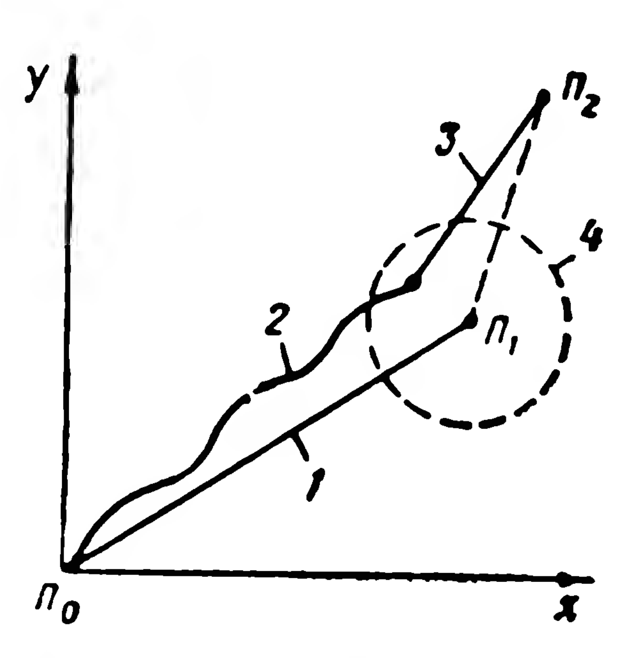
$$V = \dot{L} = \dot{x}\cos\varphi_1 + \dot{y}\sin\varphi_1. \tag{15.6}$$

Отклонение от заданной траектории $z$ и ее скорость также вычисляются счетно-решающим устройством по формулам

$$z = y\cos\varphi_1 - x\sin\varphi_1, \tag{15.7}$$

$$\dot{z} = \dot{y}\cos\varphi_1 - \dot{x}\sin\varphi_1. \tag{15.8}$$

Сигналы $z$ и $\dot{z}$ (точнее $z_г$ и $\dot{z}_г$) вводятся в канал бокового управления снарядом для стабилизации движения центра тяжести. Далее, когда сигнал $L$ достигнет заданного программным устройством (или заложенного в памяти вычислительной машины) значения, определяемого длиной отрезка $П_0П_1$, должен произойти переход на новую траекторию $П_1П_2$. В этом случае целесообразно «обнулить» оба вторых интегратора (что равносильно переносу координат в точку $П_1$). Полет по новой прямой $П_1П_2$ начнется при этом с начальными условиями $z_0=0$ и $\dot{z}_0 = V_{п_1}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$, где $V_{п_1}$ — скорость, вычисленная по формуле (15.6) в точке $П_1$. По известным $\dot{z}_0$ и $\varphi_2$ вычисляются $\dot{y}_0$ и $\dot{x}_0$ и вводятся на входы первых интеграторов. После прибытия в пункт $П_2$ все операции повторяются снова.




Фиг. 15.6. Фактическая и программная траектория снаряда.

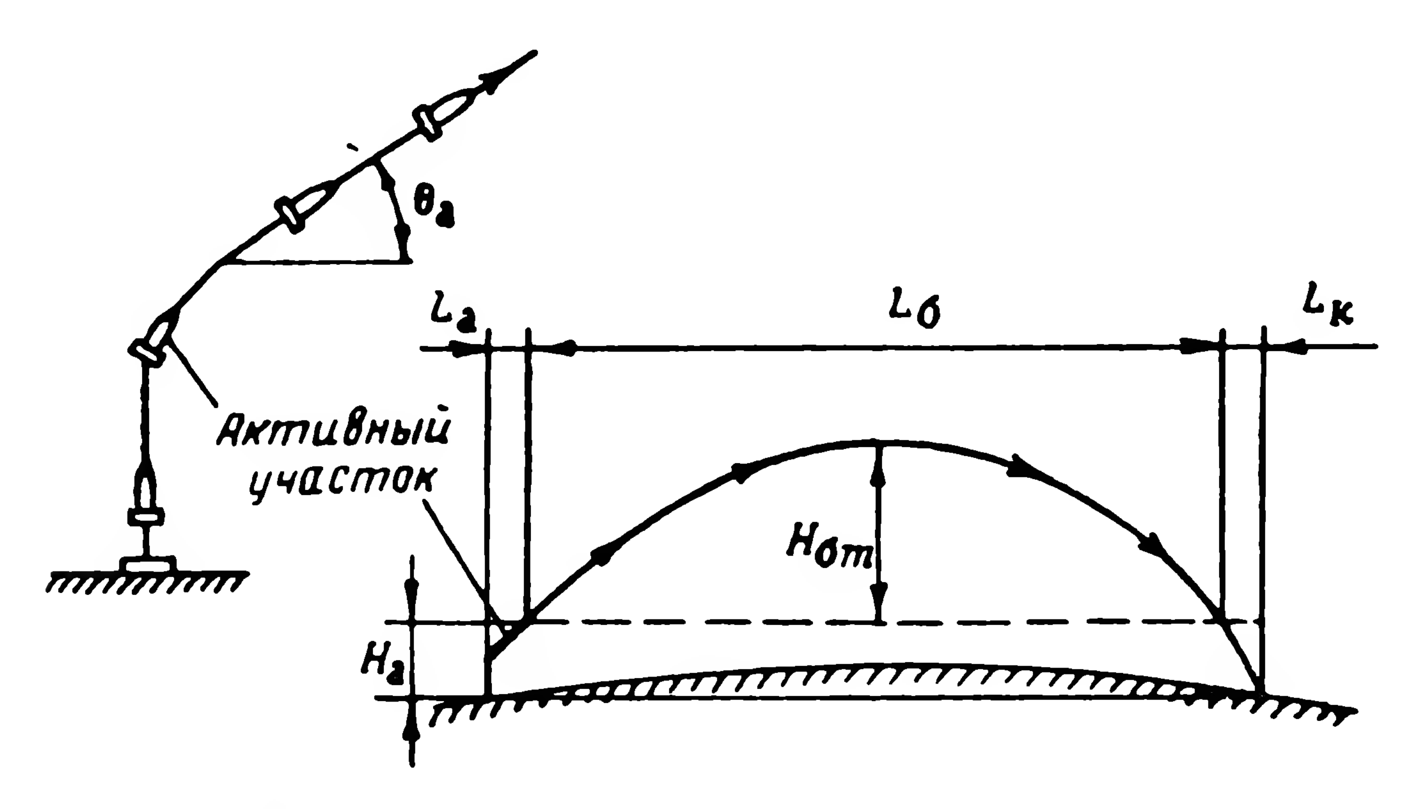
Промежуточные пункты $П_1$, $П_2$,. . . могут находиться в районах, где можно уточнить местоположение с помощью других источников информации (наземные или астрономические ориентиры и т. п.). В этом случае траекторию в каждом новом пункте излома целесообразно назначать с учетом фактического места положения снаряда (фиг. 15.6).

## § 15.2. ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ МАЛОЙ ДАЛЬНОСТИ ($L$=500—1000 *км*)

При такой дальности можно не учитывать кривизну Земли и считать вектор земного ускорения постоянным. Траектория полета баллистической ракеты делится на активный и пассивный участки (фиг. 15.7). В конце активного участка за счет работы двигателя и системы управления ракете сообщается скорость $V_а$ и направление полета $\theta_а$. При скорости $V_а$ и угле наклона $\theta_а$ выключается двигатель и начинается пассивный участок. Даже для ракет малой дальности можно считать, что начало пассивного участка лежит вне атмосферы Земли. В конце пассивного участка ракета вновь возвращается в атмосферу. Пассивный участок целесообразно

также разбить на два: баллистический с дальностью $L_б$ и конечный с дальностью $L_к$. На баллистическом участке на ракету не действуют никакие силы, кроме силы земного тяготения. Поэтому уравнения движения ракеты на баллистическом участке в прямоугольной системе координат $x$, $y$ будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} &= -g, \end{aligned}\right\} \tag{15.9}$$




Фиг. 15.7. Траектория полета баллистической ракеты.

при начальных условиях $x_0 = y_0 = 0$

$$\dot{x}_0 = V_a \cos \theta_a, \qquad \dot{y}_0 = V_a \sin \theta_a.$$

Решение уравнений (15.9) даст

$$x = (V_a \cos \theta_a)\, t,$$

$$y = (V_a \sin \theta_a)\, t - \frac{gt^2}{2}.$$

Исключая время, получим уравнение параболической траектории

$$y = x \operatorname{tg} \theta_a - \frac{gx^2}{2V_a^2 \cos^2 \theta_a} \tag{15.10}$$

и ее параметров
максимальной высоты

$$H_{бm} = \frac{V_a^2 \sin^2 \theta_a}{2g} \tag{15.11}$$

и дальности

$$L_б = \frac{V_а^2}{g} \sin 2\theta_а. \qquad (15.12)$$

Максимальная дальность $L_{бm}$ получается при $\theta_а = 45°$. Поэтому у баллистических ракет обычно $\theta_а$ близко к 45°. Если $\theta_а = 45°$, то $H_{бm}$ и $L_{бm}$ связаны соотношением

$$H_{бm} = \frac{L_{бm}}{4}. \qquad (15.13)$$

Основной составляющей дальности ракеты является баллистическая дальность, поэтому и ошибки в баллистической дальности являются наиболее существенными. Как видно из формулы (15.12), для получения требуемой дальности необходимо выдержать определенные значения скорости и угла $\theta_а$. Ошибка в скорости $\Delta V$ и ошибка в угле наклона $\Delta\theta$ приведут к ошибке в дальности $\Delta L_б$. С учетом возможных ошибок формула (15.12) примет вид

$$(L_б + \Delta L_б) = \frac{(V_а + \Delta V)^2}{g} \cdot \sin 2(\theta_а + \Delta\theta). \qquad (15.14)$$

Ограничиваясь в правой части формулы (15.14) членами первого порядка малости, получим

$$\frac{\Delta L}{L_б} = 2\frac{\Delta V}{V_а} + 2 \operatorname{ctg} 2\theta_б \Delta\theta^\circ \frac{1}{57,3}. \qquad (15.15)$$

Как показывает формула (15.15), ошибка в угле $\Delta\theta$ (в 2—3°) при оптимальных траекториях ($\theta_а = 45°$) практически не приводит к ошибке в дальности, поскольку $\operatorname{ctg} 90° = 0$. Ошибка в дальности целиком определяется ошибкой в скорости полета. Относительная ошибка в дальности равна удвоенной относительной ошибке в скорости. Так, при стрельбе на 1000 *км* ошибка в скорости, равная одному проценту, приведет к промаху по дальности в 20 *км*.

Необходимо отметить, что хотя ошибка в угле не приводит практически к ошибке баллистической дальности $L_б$, однако из-за смещения конца активного и начала баллистического участка ошибка в угле может дать заметную составляющую промаха по дальности. При $\theta_а \approx 45°$ этот промах равен

$$\Delta L = 2\frac{H_н}{57,3}\Delta\theta^\circ, \qquad (15.16)$$

где $H_н$ — высота наклонной части активного участка в *км*. Так, например, ошибка $\Delta\theta$ в один градус при $H \approx 30$ *км* дает промах приблизительно в 1 *км*.

При очень малых дальностях предположение о том, что пассивный участок начинается вне пределов атмосферы может оказаться неверным. Справедливость этого предположения можно проверить, зная значения $H_a$ и $V_a$ путем оценки величины аэродинамических сил. Оценку аэродинамических сил можно произвести по коэффициентам $c_x$ и $c_y$, размерам ракеты и параметрам атмосферы на высоте $H_a$.

На фиг. 8.8 и 8.9 приведены характеристики $c_y=c_y(\alpha, M)$ и $c_x=c_x(\alpha, M)$, отнесенные к миделевому сечению ракеты. В табл. 8.5 приведены данные по атмосфере до высоты в 100 *км*.

## § 15.3. ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ БОЛЬШОЙ ДАЛЬНОСТИ ($L>1000$ *км*)

При больших дальностях нельзя пренебрегать кривизной Земли и считать силу тяжести постоянной независимо от высоты. Прежде чем получить уравнения движения ракеты на пассивном участке, рассмотрим два крайних случая полета ракеты: 1) полет с углом $\theta_a=0$; 2) полет с углом $\theta_a=\pi/2$. Для первого случая найдем значение скорости $V_a$, при которой ракета будет вращаться вокруг Земли по круговой траектории. При полете по круговой траектории центробежная сила, стремящаяся оторвать ракету от Земли, уравновешивается силой тяжести, т. е.

$$m\frac{V_a^2}{R_0}=mg. \tag{15.17}$$

Из равенства (15.17) определяем значение скорости $V_a=V_{к1}$, при которой обеспечивается полет по окружности вблизи Земли:

$$V_{к1}=\sqrt{R_0g_0}\doteq\sqrt{6\,370\,000\cdot 9{,}81}=7912\approx 8 \text{ км/сек}.$$

Скорость $V_{к1}$ носит название первой космической скорости.

Таким образом, при достижении первой космической скорости ракета превращается в спутник Земли с круговой траекторией. Период обращения этого спутника вокруг Земли будет равен

$$T=\frac{2\pi R_0}{V_{к_1}}=\frac{2\pi R_0}{\sqrt{R_0g_0}}=2\pi\sqrt{\frac{R_0}{g_0}}=84{,}5 \text{ мин}.$$

Как видно, спутник обращается вокруг Земли с периодом, равным периоду колебаний маятника Шулера (см. § 5.9).

Для второго случая определим высоту, на которую взлетает ракета с начальной скоростью $V_a$.

Запишем выражение изменения кинетической энергии ракеты

$$\frac{mV^2}{2}-\frac{mV_a^2}{2}=-\int_{R_0}^{R_0+H}F\,dR, \tag{15.18}$$

где $R = R_0 + H$ — расстояние от ракеты до центра Земли;

$F = k\frac{m \cdot M}{R^2}$ — сила притяжения ракеты к Земле;

$M$ — масса Земли;

$k$ — гравитационная постоянная.

На Земле $F = mg_0$, следовательно, $kM = g_0 R_0^2$. Отсюда получим иные выражения:

для силы притяжения

$$F = mg_0 \frac{R_0^2}{R^2} \quad (15.19)$$

и для земного ускорения

$$g = g_0 \frac{R_0^2}{R^2}.$$

Подставляя равенство (15. 19) в (15. 18) и интегрируя, находим

$$\frac{V^2 - V_a^2}{2} = -g_0 R_0^2 \left[\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_0 + H}\right]. \quad (15.20)$$

При максимальной высоте скорость $V$ обращается в нуль. Полагая в уравнении (15. 20) $V = 0$, находим максимальную высоту подъема ракеты

$$H_m = \frac{V_a^2}{2g_0 - \frac{V_a^2}{R_0}}. \quad (15.21)$$

При $\frac{V_a^2}{R_0} \ll 2g_0$ получим известную формулу Галилея

$$H_m = \frac{V_a^2}{2g_0}. \quad (15.22)$$

При $V_a^2 = 2g_0 R_0$ или при

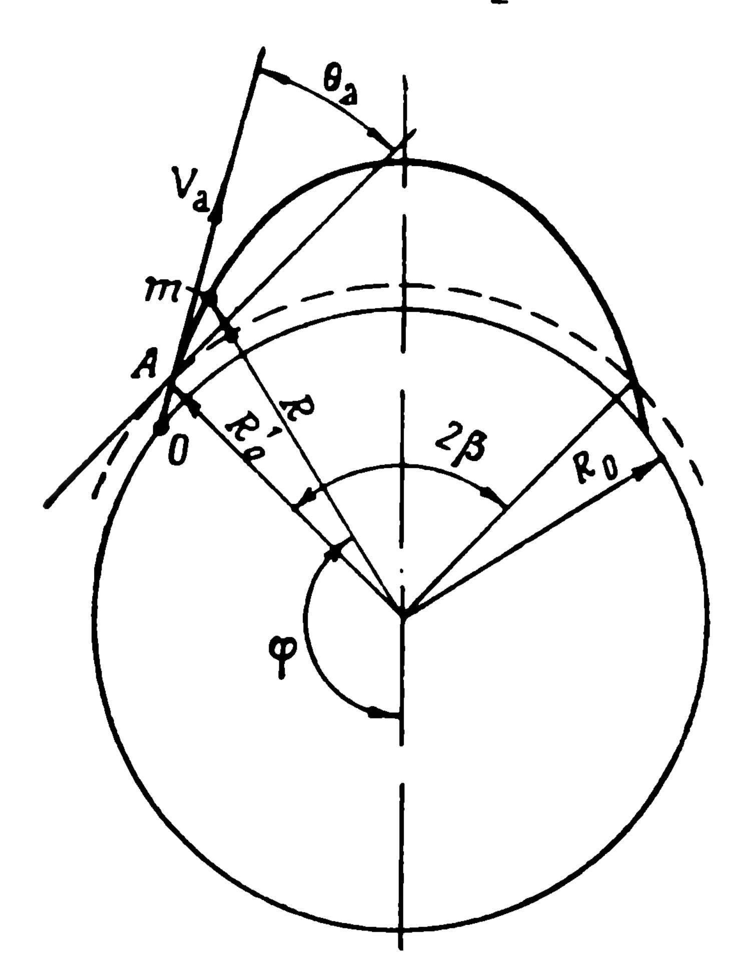
$$V_a = V_{к2} = \sqrt{2g_0 R_0} \quad (15.23)$$

высота $H_m$ обращается в бесконечность, ракета преодолевает силу притяжения Земли и улетает в космическое пространство. Скорость $V_{к2}$ носит название второй космической скорости. Вторая космическая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше первой и равна 11180 *м/сек* ≈ 11 *км/сек*. Обе космические скорости являются константами нашей планеты.

Уравнения движения ракеты большой дальности удобно построить в полярных координатах $R$, $\varphi$ с началом координат в

центре Земли (фиг. 15.8). Для вывода уравнения траектории ракеты воспользуемся выражением (15.20), заменив в нем $R_0+H$ на $R$ и $R_0$ на $R_0^1$, причем $R_0^1>R_0$. В результате получим соотношение

$$V^2-V_a^2=-2g_0R_0\left[\frac{R_0}{R_0^1}-\frac{R_0}{R}\right]=-V_{к2}^2\left[\frac{R_0}{R_0^1}-\frac{R_0}{R}\right]. \qquad (15.24)$$




Фиг. 15.8. Траектория полета баллистической ракеты в полярных координатах.

Кроме того, используем теорему площадей (закон Кеплера)

$$R^2\dot{\varphi}=C, \qquad (15.25)$$

где $C=\text{const}$.

Из начальных условий ($t=0$) $R=R_0^1$ и $\dot{\varphi}_0=\dfrac{V_a\cos\theta_a}{R_0^1}$ находим значение постоянной в уравнении (15.25): $C=R_0^1V_a\cos\theta_a$. Поэтому

$$R^2\dot{\varphi}=R_0^1V_a\cos\theta_a=C. \qquad (15.26)$$

Запишем значение квадрата скорости $V$ в полярных координатах

$$V^2=\left(\frac{dR}{dt}\right)^2+R^2\dot{\varphi}^2=\left[\left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2+R^2\right]\dot{\varphi}^2. \qquad (15.27)$$

С помощью формулы (15.26) исключим $\dot{\varphi}$ из (15.27):

$$V^2=(R_0^1)^2V_a^2\cos^2\theta_a\left[\frac{1}{R^4}\left(\frac{dR}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{R^2}\right]. \qquad (15.28)$$

Наконец, исключая $V$ из выражений (15.24) и (15.28), получим дифференциальное уравнение траектории ракеты в полярных

координатах. Это уравнение в результате разделения переменных приводится к виду

$$d\varphi = \frac{C dR}{R^2 \sqrt{V_a^2 - \frac{2g_0 R_0^2}{R_0^1} - \frac{C^2}{R^2} + \frac{2g_0 R_0^2}{R}}}. \qquad (15.29)$$

Введением новой переменной $y = \frac{C}{R} - \frac{g_0 R_0^2}{C}$ уравнение (15.29) приводится к виду

$$d\varphi = -\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \qquad (15.30)$$

где

$$a^2 = V_a^2 - \frac{2g_0 R_0^2}{R_0^1} + \frac{g_0^2\, R_0^4}{k^2}.$$

Интегрирование формулы (15. 30) дает

$$\varphi - \varphi_0 = \arccos\frac{y}{a} - \arccos\frac{y_0}{a}. \qquad (15.31)$$

В частном случае при $\cos\theta_a = 1$, когда $y_0 = a$, второе слагаемое (15. 31) обращается в нуль и в этом случае

$$R = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0)}, \qquad (15.32)$$

где

$$p = \frac{R_0^1 V_a^2}{g_0 R_0^2} \quad \text{и} \quad \varepsilon = \frac{R_0^1 V_a^2}{g_0 R_0^2} - 1.$$

Уравнение (15. 32) есть уравнение конических сечений в полярных координатах с эксцентриситетом $\varepsilon$. В более общем случае, используя формулу суммы арккосинусов, из выражения (15.31) получим

$$\frac{yy_0}{a^2} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{a^2}} = \cos(\varphi - \varphi_0).$$

Возвращаясь к первоначальной переменной, из этого равенства также получим уравнение конических сечений

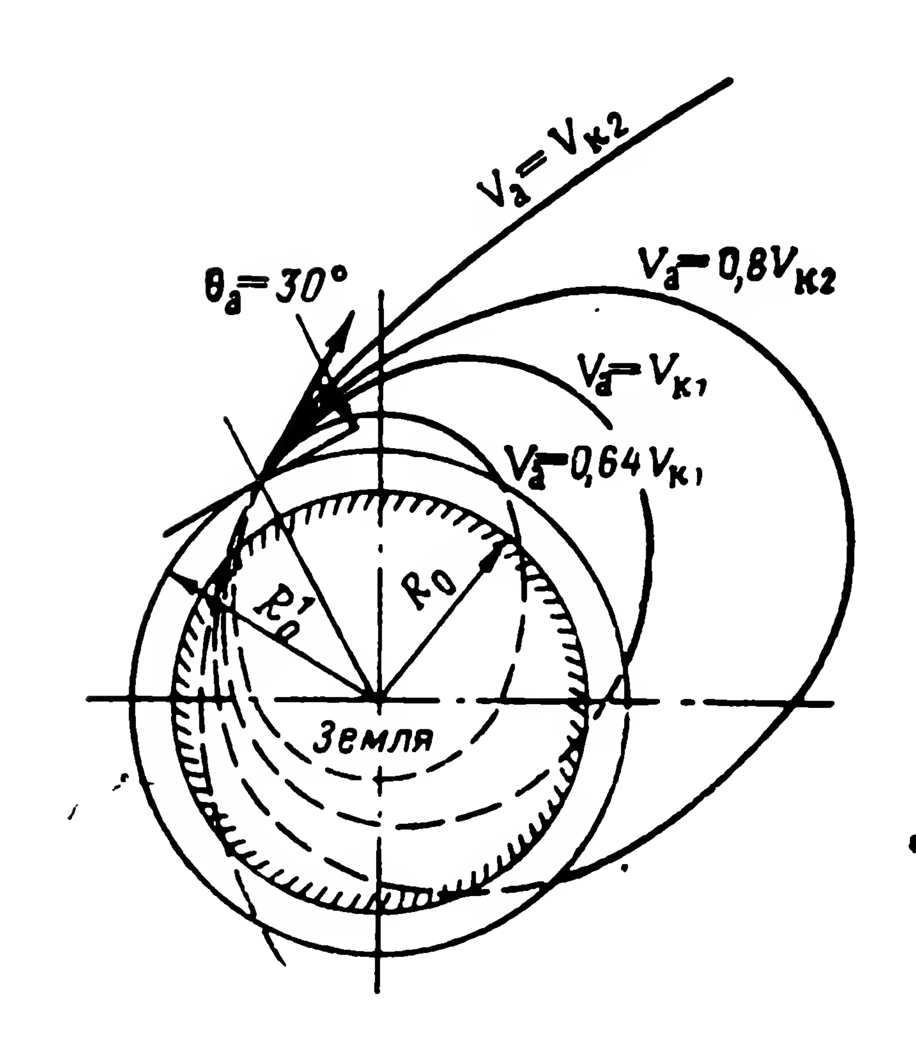
$$R = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0 \mp \psi_0)}, \qquad (15.33)$$

где

$$p=\frac{\left(R_0^1\right)^2 V_a^2 \cos^2\theta_a}{g_0 R_0^2};$$

$$\psi_0=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-y_0^2}}{y_0}=\operatorname{arc\,tg}\frac{0{,}5V_a^2\sin 2\theta_a}{V_a^2\cos^2\theta_a-\dfrac{gR_0^2}{R_0^1}};$$

$$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{2V_a^2R_0^1\cos^2\theta_a}{g_0R_0^2}+\frac{V_a^4\left(R_0^1\right)^2\cos^2\theta_a}{g_0^2R_0^4}}.$$




Фиг. 15.9. Траектории баллистических ракет при различных скоростях бросания.

Если ракета стартует с поверхности Земли, то $R_0^1 \approx R_0$ — радиусу Земли. В этом случае для $p$ и $\varepsilon$ получим выражения

$$p=\frac{V_a^2\cos^2\theta_a}{g_0};\qquad \psi=\operatorname{arc\,tg}\frac{0{,}5V_a^2\sin^2\theta_a}{V_a^2\cos^2\theta_a-V_{\text{к}1}^2};$$

$$\varepsilon=\sqrt{1-\frac{2V_a^2\cos^2\theta_a}{g_0R_0}+\frac{V_a^4\cos^2\theta_a}{g_0^2R_0^2}}=$$

$$=\sqrt{1+\frac{V_a^2\cos^2\theta_a\left|V_a^2-V_{\text{к}2}^2\right|}{V_{\text{к}1}^4}}. \qquad (15.34)$$

В зависимости от величины эксцентриситета $\varepsilon$ образуются различные траектории ракеты. При $\varepsilon<1$, когда $V_a<V_{к2}$, траекторией ракеты будет эллипс. При $\varepsilon=1$, когда $V_a=V_{к2}$, траектория ракеты является параболой *. При $\varepsilon>1$, когда $V_a>V_{к2}$, траектория ракеты оказывается гиперболой. Наконец, при $\varepsilon=0$, траектория ракеты есть окружность.

На круговую траекторию ракета может выйти только при $\theta_a=0$. Поэтому при $\varepsilon=0$ из (15.34)

$$V_{к1}^4=-V_a^2\left[V_a^2-V_{к2}^2\right].$$

А так как $V_{к2}^2=2V_{к1}^2$, то, следовательно, $(V_{к1}^2-V_a^2)^2=0$. Таким образом, при $\varepsilon=0$ $V_a=V_{к1}$, что уже было получено выше из других соображений.

На фиг. 15.9 приведены траектории ракет при угле $\theta_a=30°$ для различных скоростей бросания $V_a$.

## § 15.4. ДАЛЬНОСТЬ ПОЛЕТА БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ

Для вычисления дальности полета ракеты необходимо вычислить сначала центральный угол $2\beta$ между концом и началом траектории (см. фиг. 15.8). При симметрии траектории достаточно найти половину центрального угла, т. е. $\beta$. Начальный угол $\varphi_0$ в формуле (15.33) можно взять любым. Примем его равным нулю. Тогда

$$R=\frac{p}{1+\varepsilon\cos(\varphi\mp\psi_0)}. \tag{15.35}$$

При эллиптической траектории ($\varepsilon<1$) радиус $R$ принимает максимальное значение, когда $\varphi$ достигает значения $\beta$:

$$R_{max}=\frac{p}{1-\varepsilon}. \tag{15.36}$$

Этот максимум наступает при $\cos(\varphi\mp\psi_0)=-1$ или $\beta\mp\psi_0=\pi$, отсюда

$$\beta=\pi\pm\psi_0. \tag{15.37}$$

Используя только нижний знак в (15.37) и раскрывая выражение для $\psi_0$, получим

$$\beta=\pi-\arccos\frac{\frac{p}{R_0^1}-1}{\varepsilon}$$

* Эта парабола отличается от параболы (15.10).

или

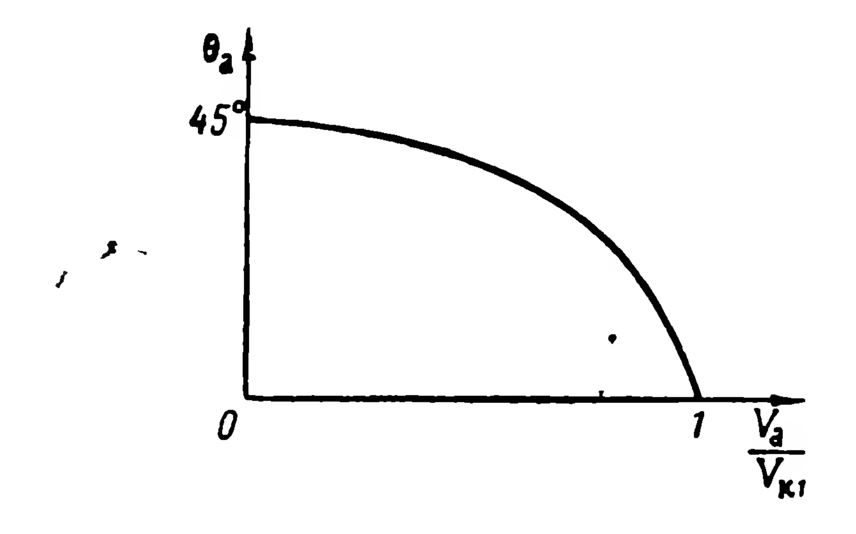
$$\beta = \pi - \arc\cos \frac{\frac{V_a^2 R_0^1}{g_0 R_0^2}\cos^2\theta_a - 1}{\sqrt{1 - \frac{2V_a^2 R_0^1 \cos^2\theta_a}{g_0 R_0^2} + \frac{V_a^4 (R_0^{1^2})\cos^2\theta_a}{g_0^2 R_0^4}}} \qquad (15.38)$$

Приравнивая производную $d\beta/d\cos^2\theta_a$ нулю, можно определить угол бросания $\theta_a$, обеспечивающий максимальный угол $\beta$ или максимальную дальность при данной скорости $V_a$:

$$(\cos^2\theta_a)_{\text{опт}} = \left.\frac{1}{2 - \frac{V_a^2 R_0^1}{g_0 R_0^2}}\right|_{R_0' \sim R_0} = \frac{1}{2 - \frac{V_a^2}{V_{\text{к}1}^2}}$$

при $V_a \ll V_{\text{к}1}$ $(\theta_a)_{\text{опт}} \approx 45°$.

Характер функции $(\theta_a)_{\text{опт}} = f\left(\frac{V_a}{V_{\text{к}1}}\right)$ показан на фиг. 15. 10. Оптимальный угол бросания уменьшается с ростом $V_a$ и при $V_a = V_{\text{к}1}$




Фиг. 15.10. Кривая зависимости оптимального угла бросания от скорости бросания.

обращается в нуль, как и требуется для полета ракеты по круговой орбите.

Дальность, точнее угол $\beta$, при оптимальном угле бросания вычисляется по формуле

$$\beta = \pi - \arc\cos \frac{-2\sqrt{1 - \frac{V_a^2 R_0^1}{g_0 R_0^2}}}{2 - \frac{V_a^2 R_0^1}{g_0 R_0^2}} \qquad (15.39)$$

или при

$$R_0^1 \approx R_0.$$

$$\beta = \pi - \arccos \frac{-2\sqrt{1-\left(\frac{V_a}{V_{к1}}\right)^2}}{2-\left(\frac{V_a}{V_{к1}}\right)^2}. \qquad (15.40)$$

Полная дальность полета вдоль поверхности Земли

$$L = L_а + L_б + L_к, \qquad (15.41)$$

где $L_а$ — дальность за счет активного участка траектории;

$L_б$ — дальность за счет баллистического участка траектории;

$L_к$ — дальность за счет конечного участка траектории.

При этом дальность за счет баллистического участка траектории определяется соотношением

$$L_б = 2\beta R_0. \qquad (15.42)$$

Как видно из выражения (15.42), при данном $\beta$ баллистическая дальность не зависит от высоты активного участка $H_а = R_0' - R_0$. Формулы для траекторий были получены без учета вращения Земли. Вращение Земли оказывает влияние на траекторию ракеты в двух направлениях:

1) в вектор скорости $\overline{V}_а$ в качестве составляющего входит вектор периферической скорости вращения Земли, модуль которого равен $V_{пер} = \omega_з R_0 \cos \varphi$, где $\varphi$ — широта места, а $\omega_з = 0{,}251$ *рад/час* $= 725 \cdot 10$ *рад/сек* угловая скорость Земли. Составляющая скорости вращения Земли изменяет, таким образом, как величину скорости конца активного участка $V_а$, так и направление полета ракеты (плоскость стрельбы);

2) в результате вращения Земли за время полета ракеты $t_б$ ракета упадет западнее точки встречи с неподвижной Землей на расстоянии $t_б V_{пер.\,п}$, где $V_{пер.\,п} = \omega_з R_0 \cos \varphi_п$ — периферическая скорость Земли на широте падения ракеты.

Для вычисления $L_к$ в формуле (15.41) можно считать, что на этом участке траектория также является эллиптической. Длина $L_а$ определяется на основе расчета активного участка траектории.

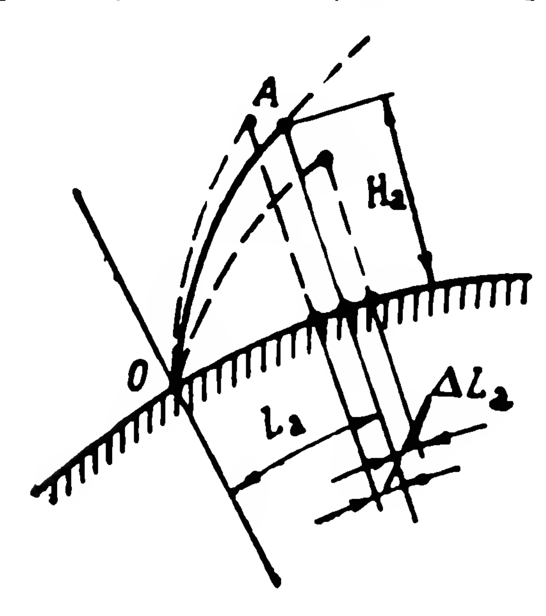
## § 15.5. ОШИБКИ ПО ДАЛЬНОСТИ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ ДАЛЬНЕГО ДЕЙСТВИЯ

Фактическая дальность отличается от потребной, определяемой формулой (15.41), во-первых, на величину ошибок, накапливающихся на трех участках полета, и, во-вторых, на величину чисто расчетной ошибки $\Delta L_{расч}$, возникающей от неточности определения взаимного расположения места старта и места падения ракеты. Таким образом,

$$L_ф = (L_а \pm \Delta L_а) + (L_б \pm \Delta L_б) + (L_к \pm \Delta L_к) + \Delta L_{расч}. \qquad (15.43)$$

Рассмотрим подробнее все составляющие ошибки по дальности.

1. Ошибка по дальности конца активного участка траектории ($\Delta L_a$) зависит от условий старта, состояния атмосферы, точности стабилизации ракеты на активном участке и отклонений параметров ракеты (вес, аэродинамические характеристики, тяга двигателя и т. п.) от расчетных. Все эти отклонения на активном участке, помимо ошибки в дальности $\Delta L_a$ (фиг. 15.11), изменяют параметры конца активного участка $V_a$, $\theta_a$ и $H_a$;




Фиг. 15.11. Ошибка по дальности **в конце** активного участка.

2. Ошибка по дальности баллистического участка траектории ($\Delta L_б$) определяется через ошибку в угле $\beta$, т. е.

$$\Delta L_б = 2\Delta\beta R_0.$$

Угол $\beta$ согласно уравнению (15.38) есть функция $V_a$, $\theta_a$ и $H_a = R_0^1 - R_0$, т. е. параметров конца активного участка траектории:

$$\beta = f(V_a, \ \theta_a, \ R_0^1).$$

Появление отклонений $\Delta V_a$, $\Delta\theta_a$, $\Delta R_0^1$ от расчетных $V_a$, $\theta_a$ и $R_0^1$ (или $H_a$) приводит к ошибке $\Delta\beta$:

$$\beta + \Delta\beta = f(V_a + \Delta V_a, \ \ \theta_a + \Delta\theta_a, \ \ R_0^1 + \Delta R_0^1). \tag{15.44}$$

Разлагая равенство (15. 44) в ряд по степеням отклонений и ограничиваясь линейными членами ряда, найдем

$$\Delta\beta = f^V \Delta V_a + f^\theta \Delta\theta_a + f^R \Delta R_0^1, \tag{15.45}$$

где

$$f^V = \frac{\partial f}{\partial (V_a + \Delta V_a)}\Bigg|_{\Delta V_a = \Delta\theta_a = \Delta R_0^1 = 0};$$

$$f^\theta = \frac{\partial f}{\partial (\theta_a + \Delta\theta_a)}\Bigg|_{\Delta\theta_a = \Delta V_a = R_0^1 = 0};$$

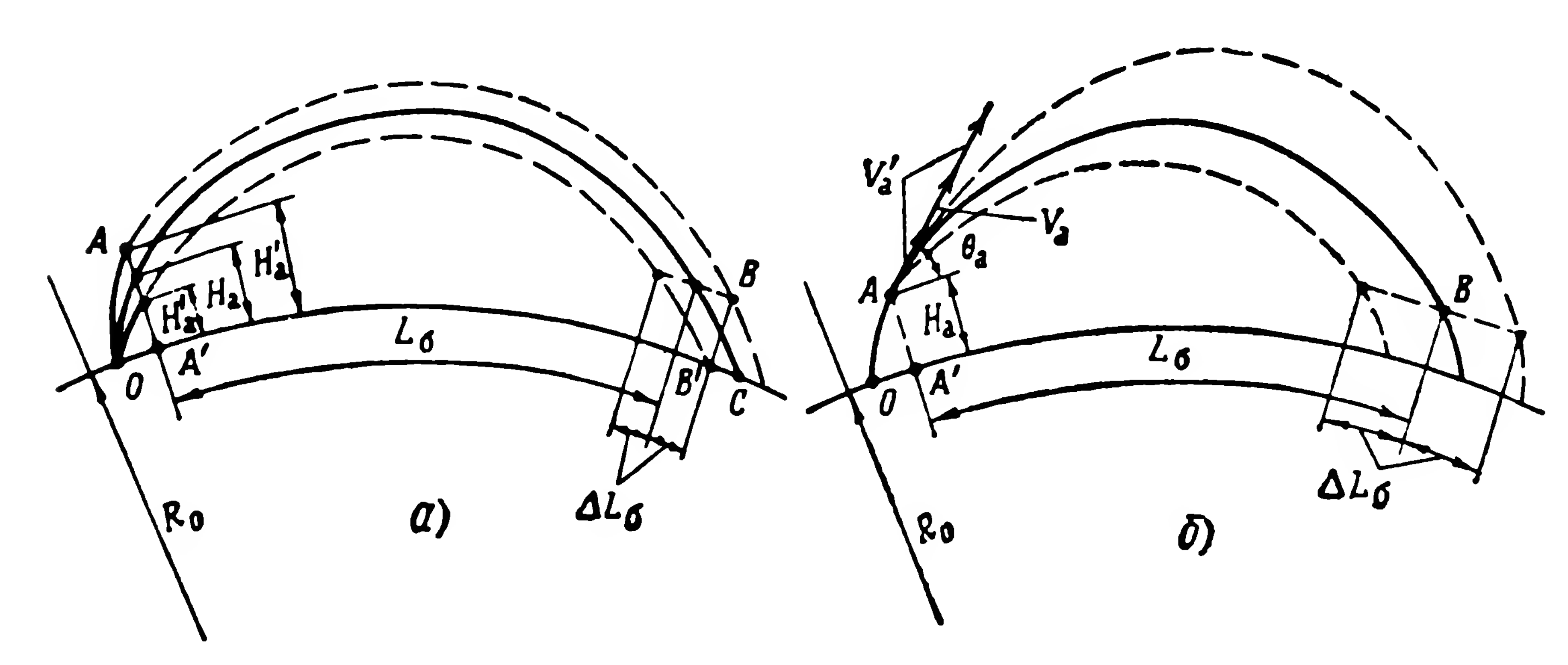
$$f^R = \frac{\partial f}{\partial \left(R_0' + \Delta R_0^1\right)}\Bigg|_{\Delta V_a = \Delta\theta_a = \Delta R_0^1 = 0}$$

Для вычисления коэффициентов $f^V$, $f^\theta$ и $f^R$ необходимо взять частные производные от выражения (15. 38).

При оптимальной траектории согласно формуле (15. 39) ошибка в угле наклона в первом приближении не приводит к ошибке

в баллистической дальности. На фиг. 15.12 иллюстрируется влияние ошибок $\Delta V_а$ и $\Delta R_0^1 = \Delta H_а$ на ошибку в баллистической дальности.

3. Ошибка по дальности конечного участка траектории ($\Delta L_к$) зависит от параметров конца баллистического участка, от стабилизации ракеты в плотных слоях атмосферы, от отклонений веса




Фиг. 15.12. Графики, иллюстрирующие влияние ошибок по высоте и по скорости в конце активного участка на баллистическую дальность.

и аэродинамического сопротивления ракеты от расчетных значений.

Из всех составляющих ошибки по дальности наиболее существенна ошибка $\Delta L_б$, обусловленная в основном отклонением от расчетного значения $V_а$.

## § 15.6. АКТИВНЫЙ УЧАСТОК ТРАЕКТОРИИ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ

При расчете баллистического участка ввиду малости $L_а$ в сравнении с $L_б$ можно не считаться с кривизной Земли. Уравнения продольного движения ракеты на активном участке примут в этом случае известный вид (фиг. 15. 13)

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= P\cos\alpha - X - mg\sin\theta, \\ mV\frac{d\theta}{dt} &= Y + P\sin\alpha - G\cos\theta, \\ J_z\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} &= M_z(\alpha, \beta, V, \delta, t), \\ \theta + \alpha &= \vartheta, \end{aligned}\right\} \qquad (15.46)$$

где

$P(V, \rho, t)$ — тяга двигателя;

$m$ — масса ракеты;

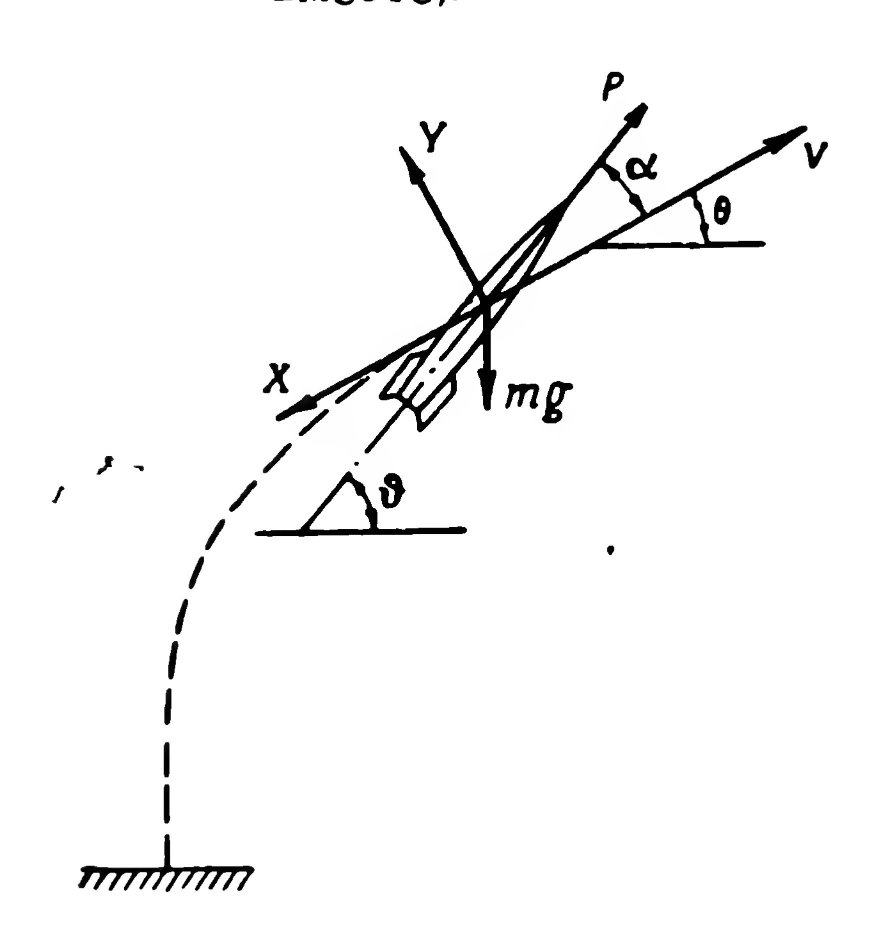
$Y = c_y S \frac{\rho V^2}{2}$, $c_y = c_y(M, \alpha)$ — подъемная сила и ее коэффициент;

$X = c_x S \frac{\rho V^2}{2}$, $c_x = c_x(M, \alpha)$ — сила сопротивления и ее коэффициент;

$J_z$ — момент инерции ракеты относительно поперечной оси;

$M = \frac{V}{a}$ — число M ($a$ — скорость звука на высоте, где плотность равна $\rho$);

$M_z$ — момент относительно поперечной оси зависит от угла атаки $\alpha$, плотности воздуха $\rho$, скорости $V$ и угла отклонения руля (газового или аэродинамического или обоих вместе).




Фиг. 15.13. Силы, действующие на ракету на активном участке.

Момент $M_z$ является также функцией времени, поскольку по мере выгорания топлива меняется расстояние между центром приложения $Y$ и центром тяжести ракеты. Масса $m$ и момент инерции $I_z$ также являются функциями времени.

Для вычисления закона изменения скорости $V$, высоты $H$ и дальности на активном участке $L_а$ можно задаться программой изменения угла наклона траектории $\theta_з = \theta_з(t)$. В этом случае $V$, $H$ и $L_а$ получаются путем численного интегрирования системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= p - x - mg\sin\theta_з, \\ \frac{dH}{dt} &= V\sin\theta_з, \\ \frac{dL}{dt} &= V\cos\theta_з. \end{aligned}\right\} \qquad (15.47)$$

При решении уравнений (15.47) в первом приближении можно положить угол атаки равным нулю. Далее можно уточнить решение, определив потребный угол атаки $\alpha=\alpha(t)$, и использовать найденное значение $\alpha=\alpha(t)$ при повторном решении уравнений (15.47). После определения скорости и высоты полета как функций времени [из решения системы уравнений (15.47)] из последних трех формул (15.46) получаются уравнения для малых отклонений углов $\alpha$, $\theta$ и $\vartheta$.

Эти уравнения с учетом действия аэродинамических и реактивных (газовых) рулей имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} mV\frac{d\Delta\theta}{dt} &= \left(c_y^\alpha s\frac{\rho V^2}{2} + P\right)\alpha \mp c_y^{\delta_а} s\frac{\rho V^2}{2}\delta_а \mp P^{\delta_г}\delta_г - G\cos\theta_e, \\ J_z\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} &+ M_z^\omega\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + M_z^\alpha\alpha = M_z^{\delta_а}\delta_а + M_z^{\delta_г}\delta_г, \\ \Delta\vartheta &= \Delta\theta + \alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (15.48)$$

где $\delta_а$ — отклонение аэродинамического руля;

$\delta_г$ — отклонение реактивного (газового) руля.

В первом уравнении (15.48) учтены составляющие боковой силы, возникающие от отклонения рулей. Верхний знак относится к заднему, а нижний — к переднему расположению рулей. Все коэффициенты в уравнениях (15.48), такие, как $m$, $V$, $c_y^\alpha$, $\rho$, $P$, $c_y^{\delta_а}$, $P^{\delta_г}$, $I_z$, $M_z^\alpha$, $M_z^{\delta_а}$, $M_z^{\delta_г}$ являются функциями времени. Эти функции определяются в результате решения (15.47).

Рассмотрим этапы движения ракеты, угловые колебания которой могут быть описаны уравнениями (15.48).

1. Этап движения в атмосфере Земли со скоростью, при которой влияние аэродинамических сил существенно. Уравнения (15.48) для этого случая запишем в форме

$$\left.\begin{aligned} T_V\frac{d\Delta\theta}{dt} &= \alpha \mp c^{\delta_а}\delta_а \mp c^{\delta_г}\delta_г - \frac{T_V g}{V}\cos\theta_e, \\ \frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} &+ m^\omega\frac{d\Delta\vartheta}{dt} + m^\alpha\alpha = m^{\delta_а}\delta_а + m^{\delta_г}\delta_г, \\ \Delta\vartheta &= \Delta\theta + \alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (15.49)$$

где

$$T_V = \frac{mV}{c_y^\alpha s \frac{\rho V^2}{2} + P} \, [сек]; \quad c^{\delta_a} = \frac{c_y^{\delta_a} s \frac{\rho V^2}{2}}{c_y^\alpha s \frac{\rho V^2}{2} + P};$$

$$c^{\delta_г} = \frac{P^{\delta_г}}{c_y^\alpha s \frac{\rho V^2}{2} + P}; \quad m^\omega = \frac{M^\omega{}_z}{J_z}; \quad m^\alpha = \frac{M_z^\alpha}{J_z};$$

$$m^{\delta_a} = \frac{M_z^{\delta_a}}{J_z}; \quad m^{\delta_г} = \frac{M_z^{\delta_г}}{J_z}.$$

2. Этап движения вне атмосферы или в весьма разреженных слоях атмосферы, когда значение аэродинамических сил несущественно и поэтому $m^\omega = m^\alpha = c^{\delta_a} = m^{\delta_a} = 0$, а $T_V = \frac{mV}{P}$. Уравнения для этого случая примут вид

$$\left.\begin{aligned} &T_V \frac{d\Delta\theta}{dt} = \alpha \mp c^{\delta_г}\delta_г - \frac{T_V g}{V} \cos\theta_e, \\ &\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} = m^{\delta_г}\delta_г, \\ &\Delta\vartheta = \Delta\theta + \alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (15.50)$$

Уравнения (15.50) справедливы и для начала старта ракеты, когда аэродинамические силы и моменты малы вследствие малого значения скорости полета.

Наиболее общими являются уравнения (15. 49), которые плавно переходят в уравнения (15. 50) или наоборот.

Если зафиксировать («заморозить») коэффициенты уравнений (15. 49) для различных моментов времени, то можно будет получить передаточные функции для углов $\Delta\vartheta$, $\Delta\theta$ и $\alpha$ по углу отклонения руля (безразлично какого — $\delta_г$ или $\delta_a$):

$$\left.\begin{aligned}
W_\theta(p) &= \frac{\mp\dfrac{c^{\delta_{\text{г}}}}{T_V}(p^2 + m^\omega p + m^\alpha) + \dfrac{m^{\delta_{\text{г}}}}{T_V}}{p^3 + \left(m^\omega + \dfrac{1}{T_V}\right)p^2 + \left(m^\alpha + \dfrac{m^\omega}{T_V}\right)p};\\
W_\alpha(p) &= \frac{\pm\dfrac{c^{\delta_{\text{г}}}}{T_V}(p + m^\omega) + m^{\delta_{\text{г}}}}{p^2 + \left(m^\omega + \dfrac{1}{T_V}\right)p + \left(m^\alpha + \dfrac{m^\omega}{T_V}\right)};\\
W_{\Delta\vartheta}(p) &= \frac{\left(p + \dfrac{1}{T_V}\right)m^{\delta_{\text{г}}} \mp \dfrac{c^{\delta_{\text{г}}}}{T_V}m^\alpha}{p^3 + \left(m^\omega + \dfrac{1}{T_V}\right)p^2 + \left(m^\alpha + \dfrac{m^\omega}{T_V}\right)p}.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.51)$$

Соответственно из уравнения (15. 50)

$$\left.\begin{aligned}
W_{\Delta\theta}(p) &= \frac{\mp c_y^{\delta_{\text{г}}} + m^{\delta_{\text{г}}}}{(T_V p + 1)p^2};\\
W_\alpha(p) &= \frac{\pm c_y^{\delta_{\text{г}}} p + T_V m^{\delta_{\text{г}}}}{(T_V p + 1)p};\\
W_{\Delta\vartheta}(p) &= \frac{m^{\delta_{\text{г}}}}{p^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (15.52)$$

На фиг. 15.14 приведены ЛАХ для угла тангажа баллистической ракеты, построенные на основании передаточной функции $W_{\Delta\vartheta}(p)$. По (15.51) построены ЛАХ для двух значений параметров, соответствующих различным значениям коэффициентов на различных этапах активного участка траектории, а по (15.52) — для одного значения $m^{\delta_{\text{г}}}$.

Уравнения (15. 49) описывают поведение нестационарной линейной динамической системы. Фиксируя или «замораживая» коэффициенты для различных моментов времени, получим, таким образом, серию стационарных систем, для каждой из которых можем записать передаточные функции. Однако и для нестационарных линейных систем, как и для стационарных, также существуют понятия импульсной переходной и передаточной функций. Если предпринять операцию исключения переменных, например, из

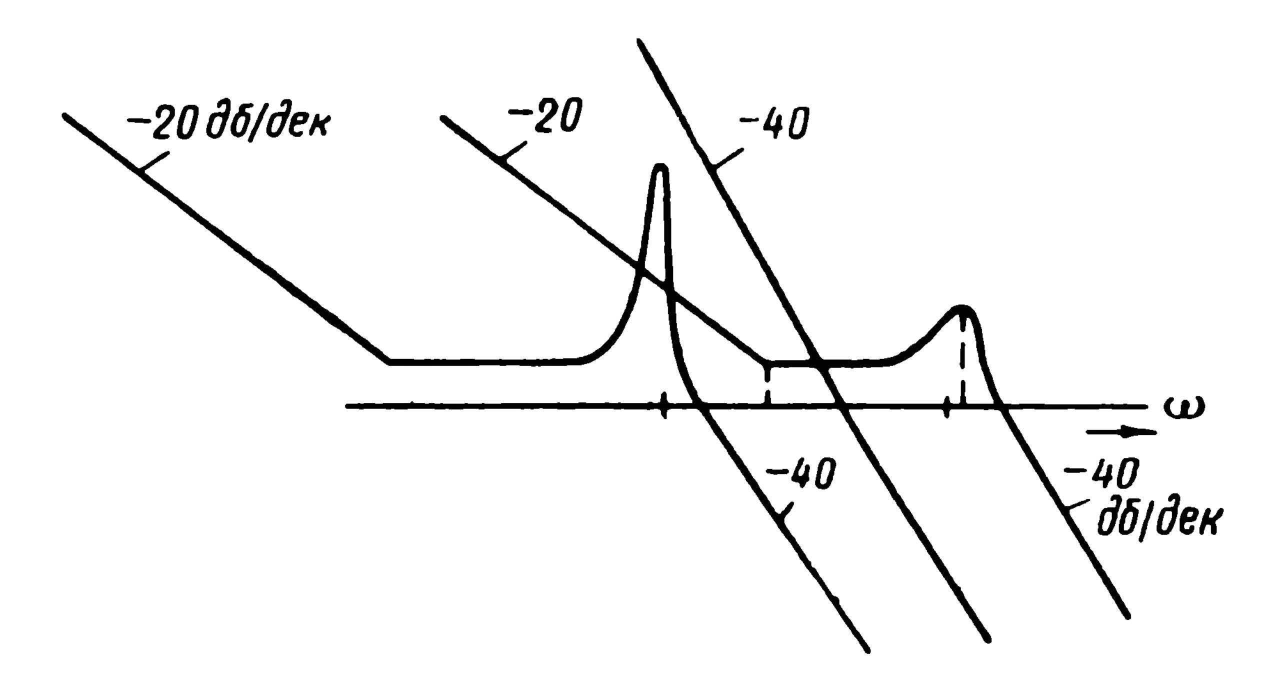
уравнений (15.49), то получим одно уравнение относительно какого-либо неизвестного:

$$A(t,p)x = B(t,p)\delta, \tag{15.53}$$

где $p = \frac{d}{dt}$ и в общем случае

$$A(t,p) = a_n(t)p^n + a_{n-1}(t)p^{n-1} + \ldots + a_1(t)p + a_0(t); \tag{15.54}$$

$$B(t,p) = b_m(t)p^m + b_{m-1}(t)p^{m-1} + \ldots + b_1(t)p + b_0(t). \tag{15.55}$$




Фиг. 15.14. ЛАХ контура угла тангажа баллистической ракеты.

Можно показать, что передаточная функция нестационарной системы является решением некоторого линейного уравнения с переменными коэффициентами того же порядка, что и уравнение (15.53):

$$\alpha_n(t)\frac{d^n}{dt^n}W(t,s) + \alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}W(t,s) + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_1(t)\frac{d}{dt}W(t,s) + A(t,s)\cdot W(t,s) = B(t,s), \tag{15.56}$$

где $s$ — комплексное число — оператор преобразования Лапласа,

$$\alpha_k(t) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k A(t,s)}{ds^k}$$

$$(k = 1, 2, \ldots).$$

Если зафиксировать коэффициенты уравнения (15.53), то все производные $W(t, s)$ обратятся в нули. Тогда из формулы (15.56) получим первое приближение для передаточной функции нестационарной системы как функции комплексного параметра $s$:

$$W_1(t,s) = \frac{B(t,s)}{A(t,s)}. \tag{15.57}$$

Передаточная функция (15. 57) имеет такой же смысл, как и передаточные функции (15. 51) и (15. 52), т. е. она тоже имеет различные коэффициенты для различных моментов времени. Однако она несколько более точна, чем передаточные функции (15. 51) и (15. 52), что можно пояснить следующим образом. Передаточная функция (15. 57) получена из уравнения (15. 53), после того как его коэффициенты были зафиксированы для различных моментов времени. Само уравнение (15. 53) получено из системы нестационарных уравнений путем исключения не представляющих интереса переменных. Что касается передаточных функций (15. 51) или (15. 52), то они получены из системы уравнений, коэффициенты которых были предварительно зафиксированы.

Полное решение уравнения (15. 56), которое дает уточненные значения передаточной функции, представляется в виде ряда

$$W(t, s) = \sum_{\mu=1}^{\infty} W_{\mu}(t, s), \tag{15.58}$$

причем $\mu$-й член ряда вычисляется по рекуррентной формуле

$$W_{\mu} = -\frac{1}{A(t, s)}\left[\alpha_n(t) W_{\mu-1}^{(n)} + \ldots + \alpha_1(t)\dot{W}_{\mu-1}\right].$$

Чем медленнее меняются коэффициенты исходного уравнения (15. 53), тем быстрее сходится ряд (15. 58) и тем ближе истинное значение $W(t, s)$ к ее первому приближению $W_1(t, s)$. По передаточной функции $W(t, s)$, рассматривая $t$ как параметр, можно с помощью обратного преобразования Лапласа получить импульсную переходную и переходную функции. Импульсная переходная функция имеет вид

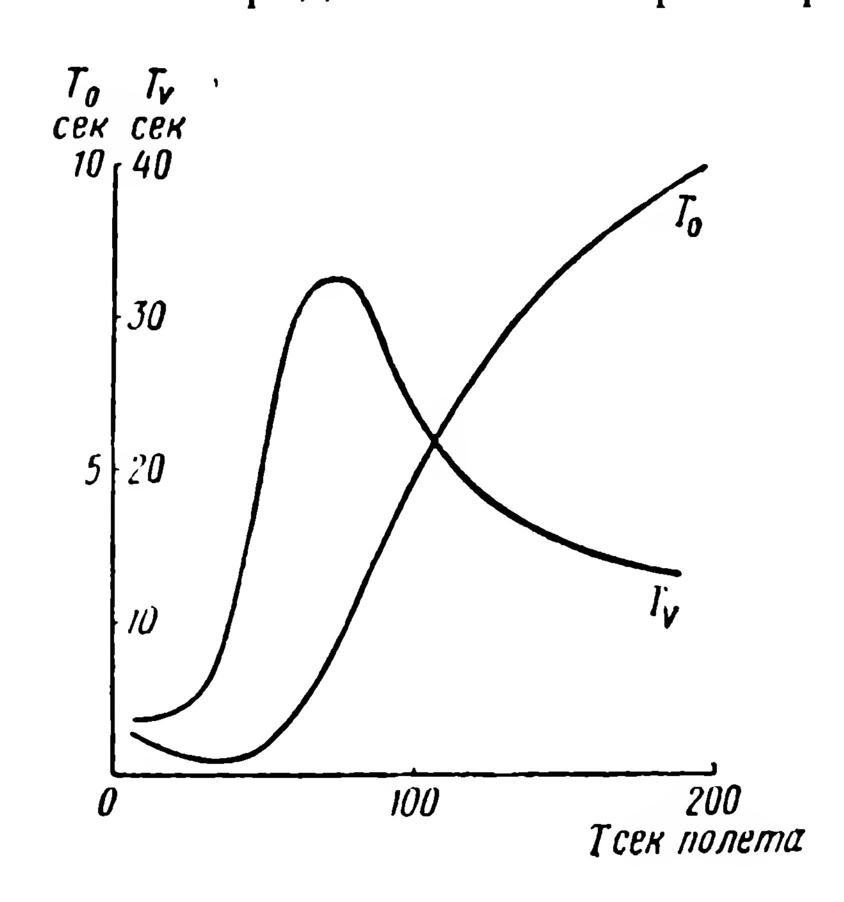
$$\dot{H}(\tau, t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{s+j\infty} W(t, s)\, e^{s\tau}\, ds, \tag{15.59}$$

переходная функция

$$H(\tau, t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{s-j\infty}^{s+j\infty} W(t, s)\,\frac{e^{s\tau}}{s}\, ds. \tag{15.60}$$

В выражениях (15. 59) и (15. 60) параметр $t$ указывает момент приложения воздействия $\delta(t)$ для (15.59) и $1(t)$ для (15.60). Приближенные значения переходных функций получим, если в формулах (15.59) и (15.60) взамен точного значения $W(t, s)$ подставим приближенные в виде $W_1(t, s)$ или в виде передаточных функций (15. 51) и (15. 52). Опять-таки, чем медленнее меняются

коэффициенты исходных уравнений, тем ближе к истинным будут приближенные решения. Однако поскольку к переходным функциям не предъявляется чрезмерно жестких требований *, то даже в случае сравнительно быстрого изменения параметров, что имеет место на активном участке траектории баллистической ракеты, расчет переходных функций на основе передаточных функций (15.51) и (15.52) вполне допустим. А это значит, что допустим и выбор параметров системы управления ракетой на активном участке на основе этих же самых передаточных функций.




Фиг. 15.15. Кривые изменения коэффициентов передаточной функции баллистической ракеты на активном участке.

Для представления о характере изменения коэффициентов передаточной функции баллистической ракеты на фиг. 15.15 приведены $T_V = T_V(t)$, $T_0 = T_0(t)$ для активного участка некоторой условной баллистической ракеты. Передаточная функция по углу тангажа взята в форме

$$W(p) = \frac{(T_V p + 1) k_0}{\left(T_0^2 p^2 + 2\zeta_0 T_0 p + 1\right) p}, \tag{15.61}$$

где

$$k_0 = \frac{m^{\delta}}{\left(m^{\alpha} + \frac{m^{\omega}}{T_V}\right) T_V}; \quad T_0 = \left(m^{\alpha} + \frac{m_{\omega}}{T_V}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$2\zeta_0 T_0 = \frac{m^{\omega} + \frac{1}{T_V}}{m^{\alpha} + \frac{m^{\omega}}{T_V}}, \quad \zeta_0 = \frac{m^{\omega} + \frac{1}{T_V}}{2\sqrt{m^{\alpha} + \frac{m^{\omega}}{T_V}}}.$$

Коэффициент усиления $k_0$ и коэффициент затухания $\zeta_0$ остаются примерно постоянными ** $k_0 \approx 0{,}8 \frac{1}{сек}$ и $\zeta_0 \approx 0{,}05 \div 0{,}1$. Как видно из

* Так, например, в системе второго порядка вполне можно допустить изменение коэффициента относительно демпфирования от 0,4 до 0,9.

** Для данного случая.

графиков, постоянная $T_V$ наиболее интенсивно изменяется между 40 и 50-й секундами полета, когда крутизна нарастания $T_V$ достигает $\approx 1{,}3$ *сек/сек*. Если потребовать для ракеты длительности переходной функции по углу тангажа около 5 *сек*, то $T_V$ за время переходного процесса (начавшегося на 40-й секунде) увеличится с $T_V=11$ *сек* до $T_V=17{,}5$ *сек*. Очевидно, что даже в этом наиболее тяжелом случае не будет слишком существенного влияния изменения $T_V$ (а также и $T_0$) на характер переходной функции как меры эффективности стабилизации угла тангажа ракеты.

Уравнения (15. 49) определяют динамические свойства ракеты в продольном движении (движение в плоскости стрельбы) *. Уравнениями бокового движения баллистической ракеты будут те же самые уравнения (15. 49) при условии, что силу тяжести следует положить равной нулю:

$$\left.\begin{aligned} &T_V\frac{d\theta_б}{dt}=\beta\mp c^{\delta_a}\,\delta_a\mp c^{\delta_г}\,\delta_г;\\ &\frac{d^2\psi}{dt^2}+m^{\omega}\frac{d\psi}{dt}+m^{\alpha}\beta=m^{\delta_a}\delta_a+m^{\delta_г}\,\delta_г;\\ &\psi=\theta_б+\beta, \end{aligned}\right\}\qquad(15.\ 62)$$

где $\psi$ — угол отклонения продольной оси ракеты от плоскости стрельбы;

$\theta_б$ — отклонение вектора скорости ракеты от той же плоскости;

$\beta$ — угол атаки в боковом движении.

В силу симметрии ракеты коэффициенты уравнений (15. 62) имеют те же численные значения, что и коэффициенты уравнений (15. 49).

Кроме выражений (15. 49) и (15. 62), нужно еще иметь в виду уравнения вращательного движения (движения крена) ракеты относительно продольной оси

$$J_x\frac{d^2\gamma}{dt^2}+M_x^{\omega_x}\frac{d\gamma}{dt}=M_x^{\delta_г}\,\delta_г+M_x^{\delta_а}\,\delta_а,$$

где $\gamma$ — угол крена;

$J_x$ — момент инерции ракеты относительно продольной оси;

$M_x^{\omega_x}$ — коэффициент демпфирующего момента;

$\delta_г$, $\delta_а$ — отклонения газовых и аэродинамических рулей, создающих моменты вокруг продольной оси;

$M_x^{\delta_г}$, $M_x^{\delta_а}$ — коэффициенты этих моментов.

* Плоскостью стрельбы называется вертикальная плоскость, проходящая через точку старта и цель.

Демпфирующий момент $M_x^{\omega_x} \frac{d\gamma}{dt}$ у баллистических ракет обычно мал и его можно не принимать во внимание.

## § 15.7. АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОЛЕТОМ РАКЕТЫ НА АКТИВНОМ УЧАСТКЕ

Цель автоматического управления полетом ракеты на активном участке заключается в обеспечении полета ракеты в плоскости стрельбы и в выдерживании заданного программой значения угла наклона траектории $\theta_з(t)$ *. При автономном управлении эти задачи решаются автопилотом на основе использования гироскопических измерителей и инерциальных систем навигации. Рассмотрим сначала управление ракетой с помощью гироскопических измерителей, понимая под этим гироскопы с тремя и двумя степенями свободы. На фиг. 9. 10 приведена схема расположения рулей ракеты и описано их назначение.

Благодаря стабилизации крена ракеты сохраняется неизменная ориентация рулей в пространстве. Стабилизация крена $\gamma$ и курса $\psi$ осуществляется за счет сигнала гироскопа с тремя степенями свободы. Ось ротора этого гироскопа расположена нормально к плоскости стрельбы. Гироскоп имеет маятниковую коррекцию, которая отключается перед стартом ракеты. С потенциометров гироскопа снимаются сигналы $\psi$ и $\gamma$ для стабилизации ракеты. Второй гироскоп с тремя степенями свободы дает сигналы на рули тангажа *2—4*. Ось ротора его горизонтальна и лежит в плоскости стрельбы. Гироскоп имеет маятниковую коррекцию, отключаемую перед стартом ракеты. Потенциометр, со щеток которого посылаются сигналы в канал управления рулями *2—4*, связан с программным механизмом, задающим программу угла наклона траектории.

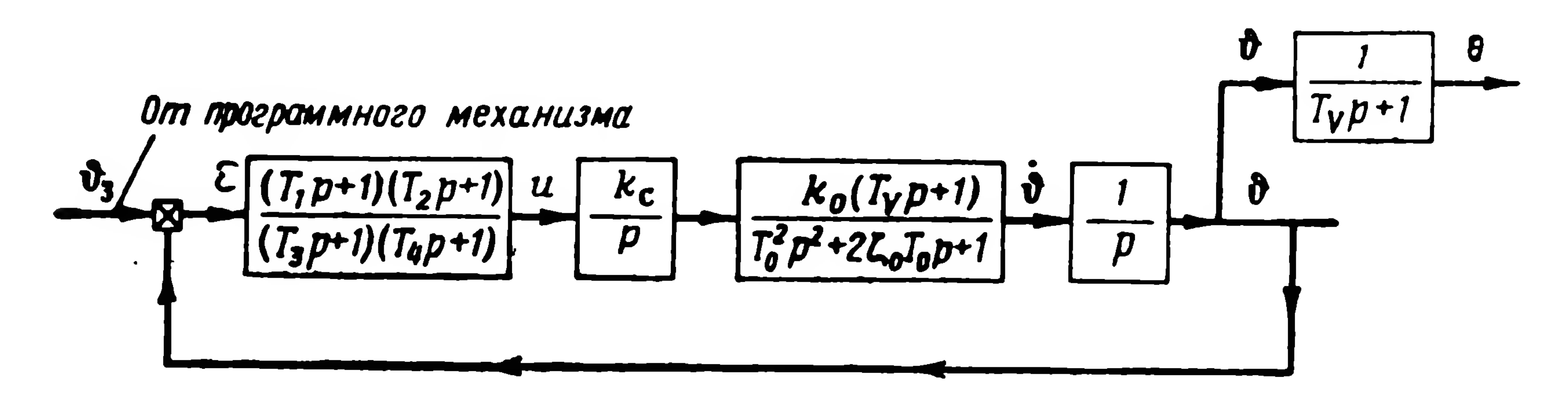
Из сказанного следует, что управление ракетой сводится к стабилизации углов $\psi$ и $\gamma$ ($\psi_з=0$, $\gamma_з=0$) и слежению угла тангажа (а через посредство его и угла наклона траектории) за программным значением $\vartheta_з(t) \doteq \theta_з(t)$. Для решения этих задач целесообразно использование астатического автопилота (автопилота без обратной связи или изодромного). При использовании автопилота без обратной связи необходимо иметь измерители сигналов угловой скорости $\dot{\vartheta}$ ( соответственно $\dot{\psi}$ и $\dot{\gamma}$) и углового ускорения $\ddot{\vartheta}$ (соответственно $\ddot{\psi}$ и $\ddot{\gamma}$). Однако можно обойтись и без этих измерителей, если использовать последовательную корректирующую цепь типа контура двойного дифференцирования в цепи сигналов $\psi$, $\gamma$ и $\vartheta$ от потенциометров гироскопа к рулям.

* В задачу автоматического управления входит, разумеется, и управление дальностью. Этот вопрос будет кратко рассмотрен в § 15.9.

На фиг. 15.16 приведена структурная схема регулирования угла тангажа с последовательной корректирующей цепью. Последовательная корректирующая цепь с передаточной функцией

$$\frac{(T_1p+1)(T_2p+1)}{(T_3p+1)(T_4p+1)}$$

может быть или контуром двойного дифференцирования когда $T_1>T_2>T_3>T_4$, или интегро-дифференцирующим контуром,

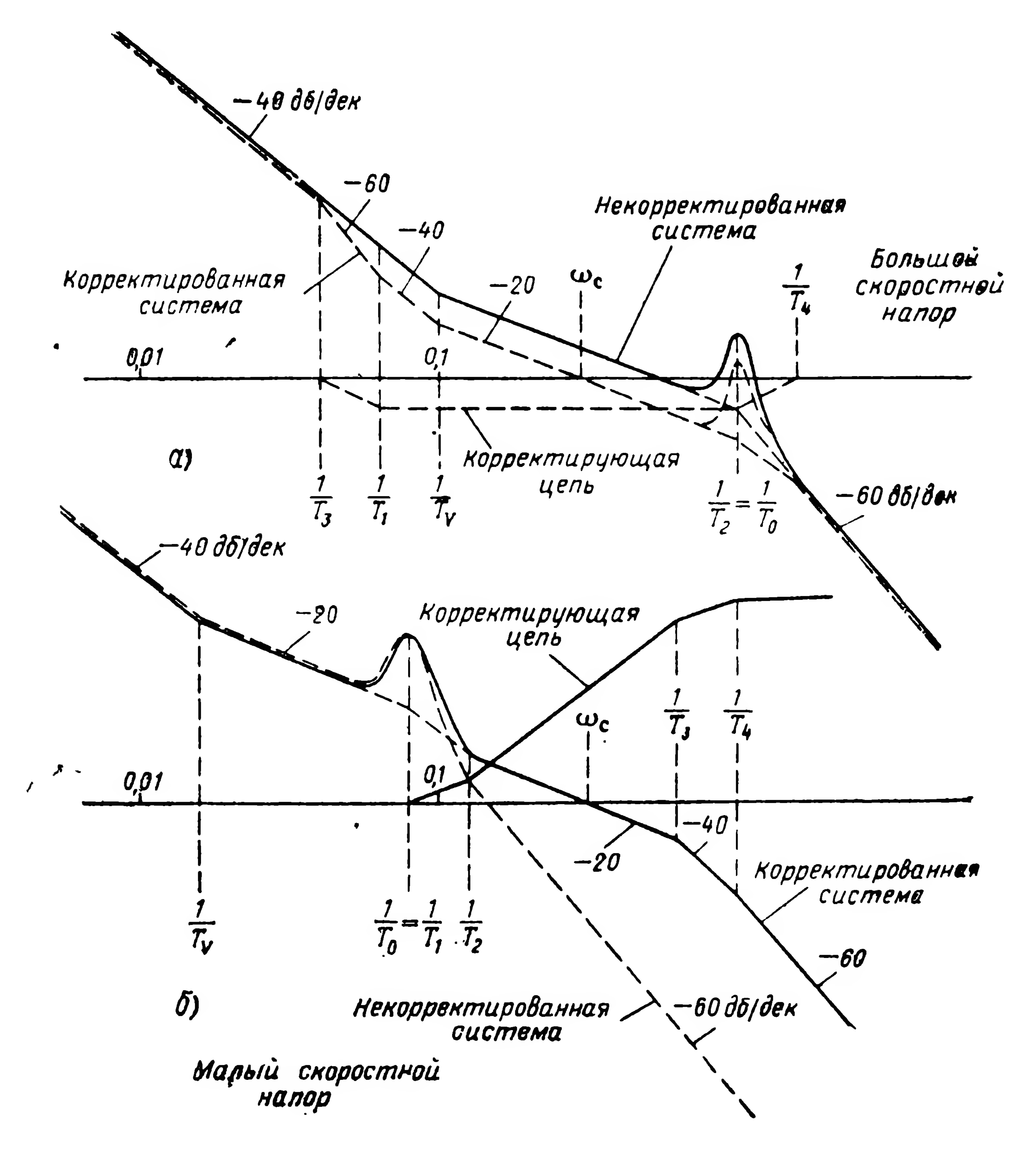



Фиг. 15.16. Структурная схема регулирования угла тангажа с последовательной корректирующей целью.

когда $T_3>T_1>T_2>T_4$. Для сохранения одинаковых динамических свойств контура управления углом тангажа желательно изменять постоянные контура $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$ или в функции времени или по режиму полета, например, в функции скоростного напора. Динамические свойства контура регулирования угла тангажа в полной мере характеризуются видом логарифмической частотной характеристики разомкнутого контура и величиной частоты среза $\omega_c$. Если потребовать время регулирования по тангажу в пределах 3—6 *сек*, то необходимо иметь $\omega_c=0{,}5$—1 1/*сек*. При малых скоростных напорах, когда собственная частота колебаний ракеты $1/T_0$ мала, частота среза $\omega_c=0{,}5$—1,0 оказывается больше собственной частоты $1/T_0$ и корректирующая цепь в этом случае представляет собой контур двойного дифференцирования. При больших скоростных напорах $\omega_c$ становится меньше $1/T_0$ и корректирующая цепь преобразуется в интегро-дифференцирующий контур. Для старта и полета вне атмосферы корректирующая цепь также представляет собой контур дифференцирования.

На фиг. 15. 17 показан характер течения амплитудных логарифмических характеристик для большого скоростного напора и малого скоростного напора. Как уже указывалось, изменение постоянных $T_1$, $T_2$, $T_3$ и $T_4$ и преобразование вида контура можно производить от программного механизма в функции времени. От программного механизма необходимо изменять также и общий коэффициент усиления контура за счет коэффициента усиления усилителя $k_c$ (см. фиг. 15.16).

Если на борту ракеты имеется цифровая вычислительная машина, то функции корректирующего устройства могут быть возложены на нее. Пусть $T$ — темп работы машины *. Это означает, в частности, что результат работы вычислений машины реализуется




Фиг. 15.17. ЛАХ контура угла тангажа баллистической ракеты.
*а* — при большом скоростном напоре, *б* — при малом скоростном напоре.

в виде последовательности прямоугольных импульсов напряжения, амплитуда которых соответствует результатам вычислений машины в моменты времени $t=nT$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Если требуется найти программу машины, реализующую корректирующую цепь с пере-

* Величина $T$ бортовых машин может лежать в пределах 0,05—0,3 *сек.*

даточной функцией $W(s)$, то для этого достаточно найти реакцию этой цепи в дискретные моменты времени $nT$ ($n=0, 1, 2, \ldots$) на прямоугольный импульс длительности $T$ единичной амплитуды. Изображение единичного импульса длительности $T$ равно

$$\frac{1-e^{sT}}{s}=\frac{z-1}{z}\cdot\frac{1}{s},$$

где $z=e^{sT}$.

Следовательно, изображение выхода корректирующей цепи будет иметь вид

$$u^*(s)=W(s)\cdot\frac{1}{s}\,\frac{z-1}{z}. \qquad (15.63)$$

Поскольку нас интересует реакция импульсной цепи, то от изображения (15.63) следует перейти к дискретному изображению, параметром которого является $z=e^{sT}$ [1]. Изображение $u^*(s)$ в дискретной форме является передаточной функцией машины

$$W_{\text{м}}[z]=\frac{b_q z^q+b_{q-1}z^{q-1}+\ldots+b_1 z+b_0}{z^r+a_{r-1}z^{r-1}+\ldots+a_1 z+a_0}. \qquad (15.64)$$

Так как передаточная функция машины $W_{\text{м}}[z]$ есть отношение изображений выхода $u$ и входа $\varepsilon$, то из формулы (15.64) вытекает программа машины в виде рекуррентного соотношения

$$u_n=b_0\varepsilon_{n-r}+b_1\varepsilon_{n+1-r}+\ldots+b_{q-1}\varepsilon_{n+q-1-r}+b_q\varepsilon_{n+q-r}-$$
$$-[a_0u_{n-r}+a_1u_{n+1-r}+\ldots+a_{r-1}u_{n-1}]. \qquad (15.65)$$

Определим программу для рассматриваемого случая, когда

$$W(s)=\frac{(T_1s+1)(T_1s+1)}{(T_3s+1)(T_4s+1)},$$

для этого случая

$$u^*(s)=\frac{z-1}{z}\,\frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{(T_3s+1)(T_4s+1)}\cdot\frac{1}{s}=$$
$$=\frac{z-1}{z}\left[\frac{c_0}{s}+\frac{c_3}{s+\frac{1}{T_3}}+\frac{c_4}{s+\frac{1}{T_4}}\right], \qquad (15.66)$$

где

$$c_0=1,\quad c_3=\frac{(T_3-T_1)(T_3-T_2)}{(T_4-T_3)T_3},\quad c_4=\frac{(T_4-T_1)(T_4-T_2)}{(T_3-T_4)T_4}.$$

---

[1] Г. С. Поспелов, Импульсные системы автоматического регулирования. «Автоматическое управление и вычислительная техника», Машгиз, 1960, вып. 3.

Из выражения (15.66), используя таблицы $z$-изображений, находим

$$W_{\text{м}}[z] = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}, \qquad (15.67)$$

где

$$a_1 = -(z_3 + z_4); \quad a_0 = z_3 z_4; \quad z_3 = e^{-\frac{T}{T_3}};$$

$$z_4 = e^{-\frac{T}{T_4}};$$

$$b_2 = c_0 + c_3 + c_4, \quad b_1 = -[c_0(z_3 + z_4) + c_3(z_4 - 1) + c_4(z_3 + 1)];$$

$$b_0 = c_0 z_3 z_4 + c_3 z_4 + c_4 z_3.$$

Из уравнения (15.67) получим программу машины

$$u_n = b_0 \varepsilon_{n-2} + b_1 \varepsilon_{n-1} + b_2 \varepsilon_n - a_0 u_{n-2} - a_1 u_{n-1}. \qquad (15.68)$$

Из выражения (15.68) видно, что каждый $n$-й импульс на выходе машины пропорционален сумме значений входного сигнала $\varepsilon$ в $n$-ом интервале времени и в два предыдущих интервала, а также сумме двух выходных импульсов в два предшествующие интервала времени. Коэффициенты $b_0$, $b_1$, $b_2$, $a_0$ и $a_1$ вычисляются и хранятся в памяти машины. Поскольку постоянные $T_1$, $T_2$, $T_3$ и $T_4$ должны изменяться в функции времени, то в машине должна быть предусмотрена смена значений коэффициентов $b_0$, $b_1$, $b_2$, $a_0$ и $a_1$ в заранее назначенные моменты времени.

Рассмотренная система управления ракетой на активном участке с помощью гироскопических измерителей имеет два недостатка:

1) не стабилизируется траектория ракеты в намеченной плоскости стрельбы, поэтому возникает промах $L\Delta\theta_6$, где $L$ — дальность полета ракеты и $\Delta\theta_6$— ошибка стабилизации направления вектора скорости;

2) высокое скородействие системы регулирования угла тангажа, которое достигается применением корректирующих устройств, вовсе не означает такого же скородействия системы по углу наклона траектории, которое собственно и требуется.

Обоих недостатков можно избежать при применении инерциальных систем навигации. Пусть ось $x$ инерциальной системы второго типа ориентируется в плоскости стрельбы (см. фиг. 5.33). Тогда ось $z$ этой системы будет нормальна к плоскости стрельбы и с первого и второго интегратора канала $z$ инерциальной системы можно получить сигналы отклонения $z$ и скорости отклонения $\dot{z}$ ракеты от плоскости стрельбы. Подавая эти сигналы на рули ракеты,

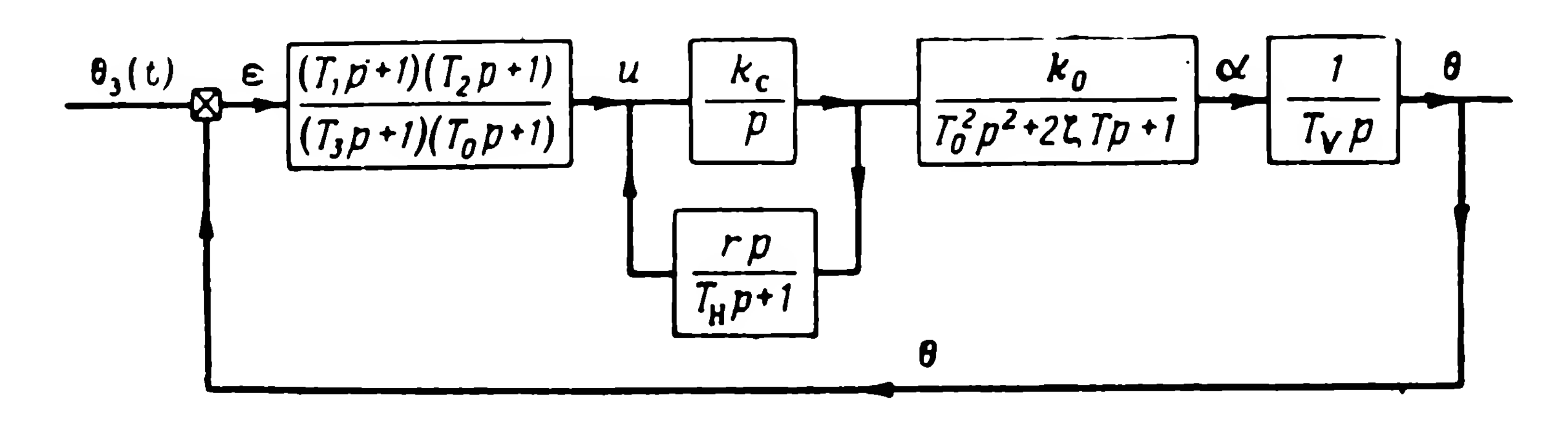
получим систему стабилизации ракеты в плоскости стрельбы, подобную описанной в § 1 настоящей главы.

Устранить второй недостаток способна сама инерциальная система, поскольку она может измерять значение вектора скорости ракеты, т. е. определять модуль скорости $V$ и угол наклона траектории $\theta$. Поскольку ось $z$ нормальна к плоскости стрельбы, то

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}, \qquad (15.69)$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \qquad (15.70)$$

где $\dot{x}$ и $\dot{y}$ — сигналы первых интеграторов канала $x$ и $y$ инерциальной системы. Формулы (15.69) и (15.70) справедливы, если




Фиг. 15.18. Структурная схема управления углом наклона траектории баллистической ракеты.

не учитывать кривизну Земли. Для активного участка пренебрежение кривизной Земли допустимо.

Измеритель сигнала $\theta$ позволяет организовать контур регулирования угла $\theta$, а не угла тангажа $\vartheta$, как это было в предыдущем случае. Вариант структурной схемы управления углом наклона траектории приведен на фиг. 15. 18. В отличие от схемы управления углом тангажа в данном случае сервомотор охватывается изодромной обратной связью. Передаточная функция сервомотора с изодромной обратной связью имеет вид

$$W_c(p) = \frac{\frac{k_c}{p}}{1 + \frac{rk_c}{T_н p + 1}} = \frac{T_н p + 1}{T_c p + 1} \cdot \frac{k_{c1}}{p} \approx \frac{k_{c1}(T_н p + 1)}{p},$$

где

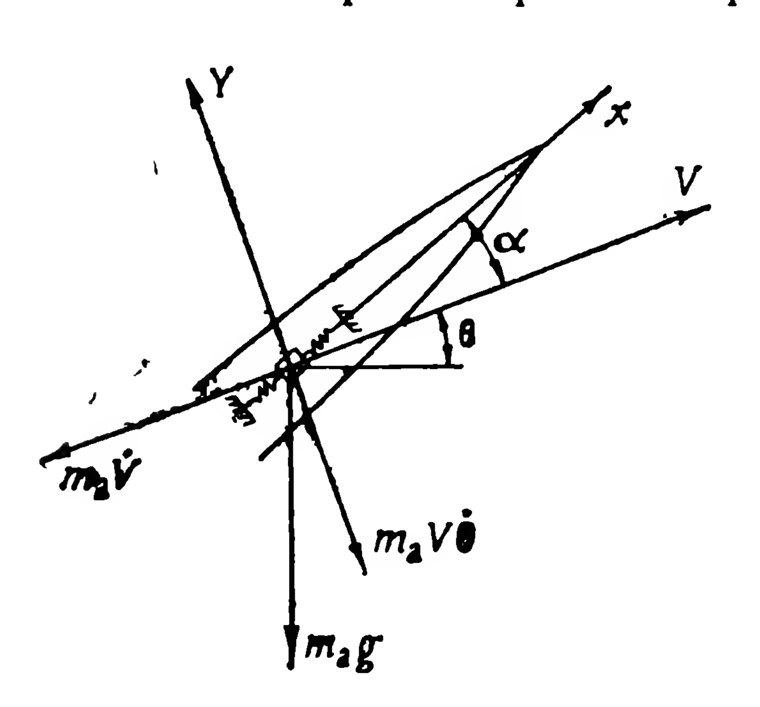
$$k_{c1} = \frac{k_c}{1 + rk_c} \qquad \text{и} \qquad T_c = \frac{T_н}{1 + rk_c}.$$

Обычно $k_c$ имеет достаточное значение, благодаря чему $T_c \ll T_н$ и постоянной $T_c$ — можно пренебречь. В этом случае передаточ-

ная функция сервомотора представляется в виде произведения идеального форсирующего звена на интегрирующее звено. В целом структурная схема, приведенная на фиг. 15. 18, оказывается идентичной структурной схеме для угла тангажа, изображенной на фиг. 15. 16, где роль постоянной $T_V$ выполняет постоянная цепи изодрома $T_н$. Идентичность этих структурных схем указывает на то, что можно получить систему регулирования угла наклона траектории, по скородействию не уступающую системе регулирования угла тангажа. Для управления и стабилизации ракеты на активном участке весьма уместными являются самонастраивающиеся автопилоты, принцип действия которых описан в § 10. 10. Самонастраивающийся автопилот обеспечит неизменность динамических характеристик контуров стабилизации и управления ракетой, несмотря на весьма интенсивное изменение динамических свойств самой ракеты.

## § 15.8. УПРАВЛЕНИЕ ДАЛЬНОСТЬЮ БАЛЛИСТИЧЕСКОЙ РАКЕТЫ

Как было показано выше, дальность полета ракеты при оптимальных траекториях определяется скоростью $V_а$ в конце активного участка. Поэтому самый простой способ управления дальностью состоит в отключении двигателя ракеты (отсечки топлива) в момент, когда ракета достигла необходимой для данной дальности скорости. Для этой цели необходимо измерять фактическую скорость полета ракеты и следить за ней.




Фиг. 15.19. Схема размещения акселерометра, измеряющего продольные ускорения ракеты.

Измерение скорости ракеты можно осуществить радиотехническими методами с использованием эффекта Допплера или бортовыми автономными средствами, основанными на интегрировании ускорения ракеты. В простейшем случае акселерометр устанавливается на корпусе ракеты и его масса перемещается по продольной оси $x$ ракеты. Масса акселерометра $m_а$ будет испытывать воздействие составляющих ускорения силы тяжести продольного ускорения ракеты $\dot{V}$ и нормального ускорения ракеты $V\dot{\theta}$ (фиг. 15.19). Поскольку акселерометр ориентирован вдоль продольной оси ракеты, то сигнал акселерометра будет равен

$$j_x = \dot{V}\cos\alpha + V\dot{\theta}\sin\alpha - g\sin(\theta + \alpha). \qquad (15.71)$$

Если пренебречь углом атаки, то

$$\dot V = j_x - g \sin \theta . \tag{15.72}$$

Угол $\theta$ можно заменить его известным программным значением, тогда

$$V = \int_0^t j_x \, dt - g \int_0^t \sin \theta_з (t) \, dt. \tag{15.73}$$

Таким образом, для получения скорости необходимо проинтегрировать показания акселерометра и учесть второе слагаемое в выражении (15. 73). Одним из примеров технической реализации акселерометра и интегратора для измерения скорости может служить гироскопический интегратор * — прибор, в котором совмещены акселерометр и интегратор. Этот прибор представляет собой гироскоп, ось внешней рамки которого направлена вдоль оси $x$ ракеты и не проходит через центр тяжести ротора (см. гл. V).

Описанный способ управления дальностью не учитывает влияния на ошибки по дальности многих факторов. В частности, не учитывается такой фактор, как ошибка в координатах конца активного участка траектории. Существенное значение имеет ошибка по высоте конца активного участка траектории. Формула (15. 38) показывает, как можно исключить влияние ошибки по высоте активного участка на ошибку по дальности. Напомним, что в уравнении (15.38) $R_0^1 = R_0 + H_а$, где $H_а$ — высота активного участка траектории и $R_0$ — радиус Земли. Далее всюду в формулу (15. 38) входит произведение квадрата скорости $V_а$ на радиус $R_0^1$. В связи с этим, если отключить двигатель при достижении величиной $\eta = V^2 R_0^1 = V^2 (R_0 + H)$ своего заданного значения $\eta_а = V_а^2 (R_0 + H_а)$, то влияние ошибки в высоте будет исключено. Величину $\eta$ следует вычислять непрерывно с помощью вычислительного устройства на основе показаний инерциальной системы.

Если пренебречь кривизной Земли на длине активного участка траектории, то для величины $\eta$ получим формулу

$$\eta = (R_0 + y)(\dot x^2 + \dot y^2), \tag{15.74}$$

где

$$\dot x^2 + \dot y^2 = V^2 \quad и \quad y \quad H;$$

$y$ — выход второго интегратора канала $y$;

$\dot y$ — выход первого интегратора канала $y$;

$x$ — выход второго интегратора канала $x$;

* В. И. Феодосьев, Г. Б. Синярев, Введение в ракетную технику, Оборонгиз, 1960.

$\dot{x}$ — выход первого интегратора канала $x$.

Формула (15.74) не учитывает влияния некоторых менее существенных факторов: ошибки в длине активного участка траектории, ошибки в весе ракеты из-за отклонений в характере процесса выгорания топлива от программного и т. д. В связи с этим разработаны еще более точные методы управления дальностью, основанные на непрерывном вычислении ошибки в дальности в течение всего активного участка траектории *. Эта ошибка вычисляется на основе измерений отклонений параметров движения ракеты от программных. Двигатель отключается в тот момент, когда суммарная ошибка по дальности обращается в нуль. Однако суммарная ошибка по дальности как результат воздействия многих факторов может и не обратиться в нуль ни в какой момент времени, особенно если принять во внимание такие факторы, как атмосферные возмущения на активном участке траектории. Для того чтобы выдержать минимальное значение текущей ошибки по дальности, необходимо оказывать воздействие на тягу двигателя, на рули канала тангажа в функции этой ошибки на всем активном участке траектории. Реализация этой идеи связана со значительными техническими трудностями и требует установки цифровой вычислительной машины на борту ракеты.

* Г. Тзян, Т. Адамсон и Е. Киут, Автоматическое управление ракетами дальнего действия, «Вопросы ракетной техники», 1953, № 1.

*Глава XVI*

# КОМПЛЕКСЫ УПРАВЛЯЕМЫХ СНАРЯДОВ И МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ СТРЕЛЬБЫ

## § 16.1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В предыдущих главах рассматривались элементы бортовой аппаратуры и динамика автоматического управления снарядом при различных методах наведения. Однако боевое применение управляемых снарядов обеспечивается целым рядом технических средств, которые вместе со снарядом образуют так называемый комплекс управляемого снаряда. В комплекс входит управляемый снаряд с боевой частью и взрывателем, стартовые устройства, включающие в общем случае прицелы и стартовую часть системы управления снарядами. Комплекс управляемых снарядов создается для наиболее эффективного поражения целей. Количественные исследования эффективности комплексов управляемых снарядов составляют одну из задач теории исследования операций. Существуют различные критерии эффективности и различные подходы к их определению. Так, например, в работе Мерилла и др. * в качестве критерия эффективности оружия, в том числе комплекса управляющих снарядов, принимается условная величина $E$, определяемая соотношением

$$E = \frac{D}{C},$$

где $D$ — общий причиненный (предотвращенный) ущерб;
$C$ — общая стоимость комплекса.

Величина $D$ зависит, в частности, от вероятности поражения. Вероятность поражения цели, в свою очередь, зависит от точности стрельбы или величины промаха снаряда у цели, от боевого заряда и взрывателя, от начальных условий атаки цели, надежности функционирования комплекса и системы управления и других многочисленных факторов. В соответствии с темой настоящей книги

* Г. Мерилл, Г. Гольдберг, Р. Гельмгольц, Исследование операций. Боевые части. Пуск снарядов, ИЛ, 1958.

рассмотрим лишь один из упомянутых факторов: точность стрельбы управляемыми снарядами или промах снаряда у цели. Величина промаха снаряда у цели является результатом целого ряда случайных факторов и, разумеется, не может быть оценена без привлечения теории вероятностей. Подход к оценке точности стрельбы рассмотрим применительно к комплексам самонаводящихся и телеуправляемых снарядов.

Предварительно сделаем одно общее замечание о тех требованиях, которые могут быть предъявлены к точности попадания или к величине промаха снаряда у цели. Естественное, казалось бы, требование минимально возможного или нулевого значения промаха не всегда оказывается целесообразным. Если это требование приводит к сильному усложнению всего комплекса, и особенно системы управления, а соответственно к удорожанию комплекса и снижению его надежности, то никакого эффекта от повышения точности может и не получится. Требования к точности стрельбы необходимо всегда соразмерять с эффективностью боевой части снаряда и техническими возможностями реализации системы управления.

## § 16.2. КОМПЛЕКСЫ САМОНАВОДЯЩИХСЯ СНАРЯДОВ *

В качестве примера рассмотрим комплекс самонаводящихся снарядов воздушного боя. В состав комплекса входит один или несколько снарядов, которыми вооружен самолет-истребитель, пусковые устройства и прицел. Прицеливание при пуске управляемых самонаводящихся снарядов является, как правило, необходимой операцией. Прицеливание при пуске позволяет свести до минимума начальный промах. Точность же попадания или промах у цели существенно зависят от начального промаха или начальных условий в момент пуска снаряда. (Согласно линейной теории самонаведения, изложенной в гл. XIII, промах у цели пропорционален начальному промаху).

Если потребовать, чтобы в момент выстрела начальный промах был бы равен нулю, то схема прицеливания управляемым снарядом будет такой же, как неуправляемым **. Снаряд с момента выстрела должен двигаться в мгновенную точку встречи с целью. В связи с этим выстрел должен производиться в момент, когда будет выполнено условие (см. формулу (13.8) и фиг. 13.6)

$$0 = -V_ц \sin\varphi + V \sin\psi, \tag{16.2}$$

где $V$ — абсолютная скорость снаряда;
$\psi$ — угол упреждения.

* В. И. Марисов, И. К. Кучеров, Управляемые снаряды, Воениздат, 1959.

** В предположении, что векторы скорости цели и снаряда постоянны.

С другой стороны, из условий сближения истребителя с целью имеем

$$L\dot{\varphi} = -V_{ц}\sin\varphi + V_{и}\sin\psi, \qquad (16.3)$$

где $V_{и}$ — скорость истребителя.

Исключая из выражений (16.2) и (16.3) произведение $V_{ц}\sin\varphi$, получим формулу прицеливания

$$\sin\psi = -\dot{\varphi}\frac{L}{V - V_{и}} = -\dot{\varphi}T_{р}. \qquad (16.4)$$

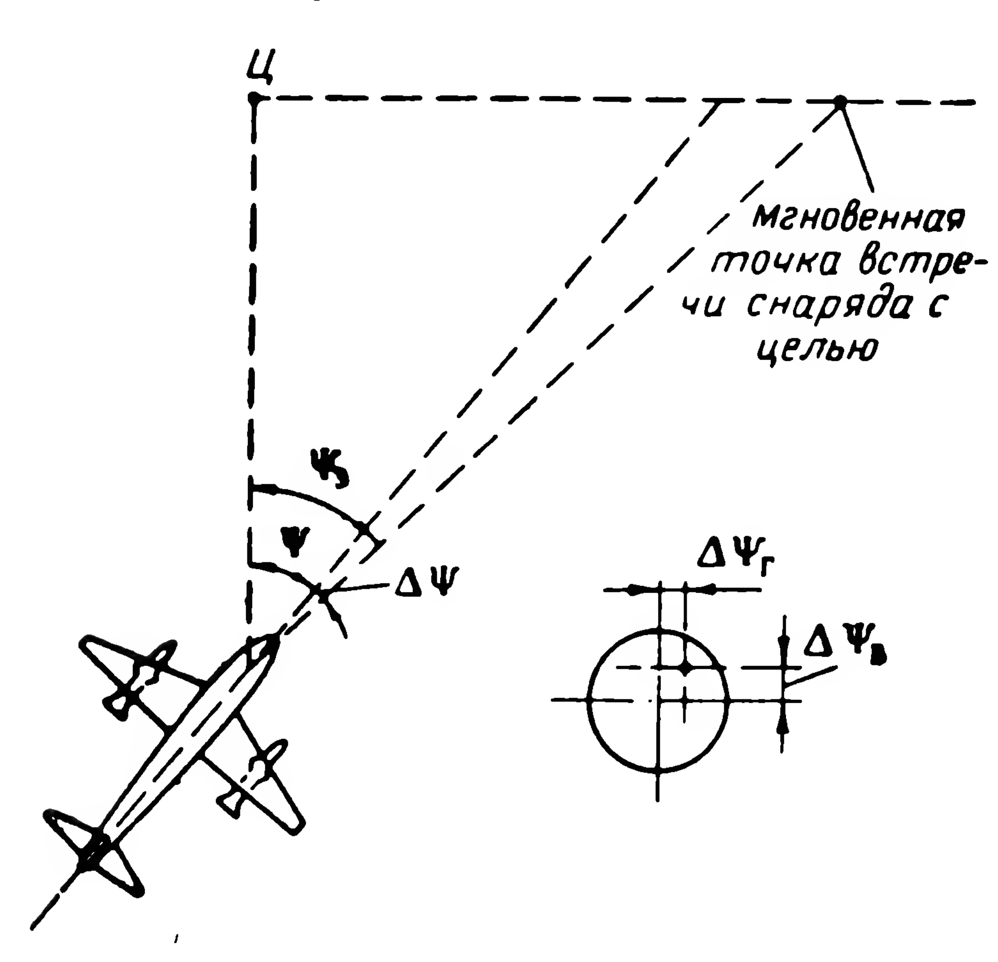
В соответствии с формулой (16.4) пуск или выстрел снаряда производится в момент, когда синус угла упреждения оказывается равным произведению угловой скорости линии истребитель — цель на так называемое расчетное время $T_{р} = \frac{L}{V - V_{и}}$*. По уравнению (16.4) счетно-решающее устройство или вычислитель прицела непрерывно вычисляют необходимое или заданное значение угла упреждения $\psi_{з} = \arcsin\dot{\varphi}\cdot T_{р}$. Для вычисления $\psi_{з}$ необходимо в вычислитель вводить сигналы $\varphi$, $L$, $V_{и}$ и $V$. Сигналы $\dot{\varphi}$ и $L$ измеряются прицелом; скорость $V_{и}$ также всегда может быть измерена на борту истребителя. Что касается скорости снаряда, то в вычислитель вводится ее предполагаемое среднее значение.

Опишем два вида маневра истребителя, предшествующие пуску управляемого снаряда. Первый вид маневра состоит в следующем. После захвата цели прицелом истребителя начинается вычисление $\psi_{з}$. Сигнал $\psi_{з}$ подается на экран прицела. Летчик разворачивает истребитель таким образом, чтобы фактический угол упреждения $\psi$ был бы равен заданному. Фактический угол упреждения — это угол между продольной осью самолета ** и осью антенны прицела, направленной на цель (фиг. 16.1). Практически это может быть реализовано следующим образом: вычислитель вычисляет ошибку наведения $\Delta\psi = \psi_{з} - \psi$ и эта ошибка в виде светящейся метки появляется на экране прицела. Положение светящейся метки дает составляющие ошибки в вертикальной и горизонтальной плоскостях $\Delta\psi_{в}$ и $\Delta\psi_{г}$. Летчик разворачивает самолет так, чтобы метка оказалась в центре перекрестия экрана, когда ошибка наведения обращается в нуль. Продолжая полет так, чтобы метка оставалась в центре перекрестия, летчик будет выдерживать условие $\psi = \psi_{з}$ и всегда будет готов к пуску управляемого снаряда. Полет, при котором выдерживается условие $\psi = \psi_{з}$, называется полетом по кривой атаки.

* Для вычисления $T_{р}$ могут использоваться и более совершенные формулы.

** Точнее между вектором скорости самолета и осью прицела, но тогда в вычислитель следует вводить углы атаки и скольжения самолета.

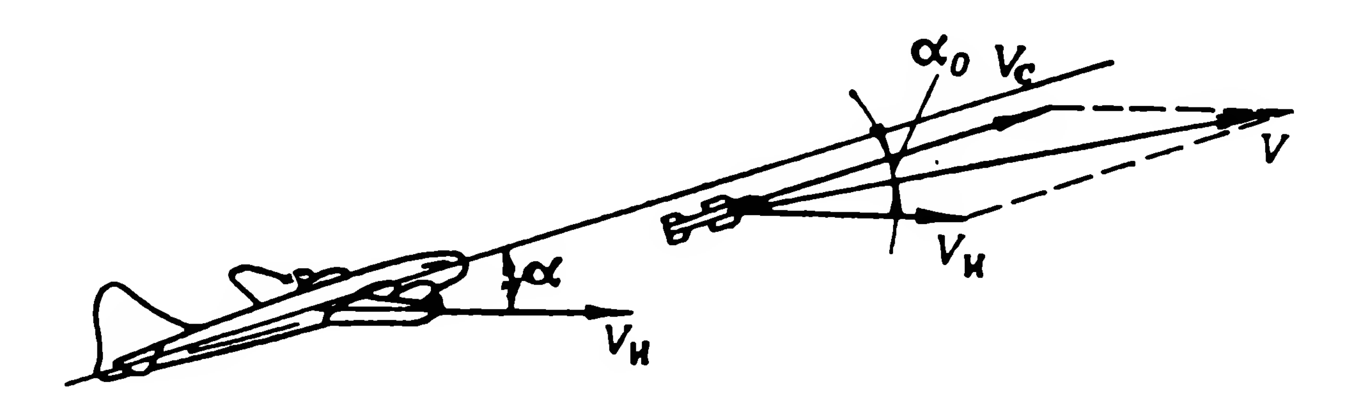
Заметим, что процесс движения по кривой атаки может быть автоматизирован путем воздействия на автопилот истребителя сигнала $\Delta\Psi = \Psi_з - \Psi$. Пуск снаряда может производиться или после того, как головка самонаведения снаряда захватила цель, о чем летчик получает специальный сигнал, или до захвата цели головкой самонаведения снаряда.




Фиг. 16.1. Схема первого вида маневра истребителя.

В последнем случае для повышения вероятности захвата цели после пуска следящей гироголовкой снаряда целесообразно программировать ее движение в соответствии с данными о движении цели и снаряда, имеющимися в момент пуска.

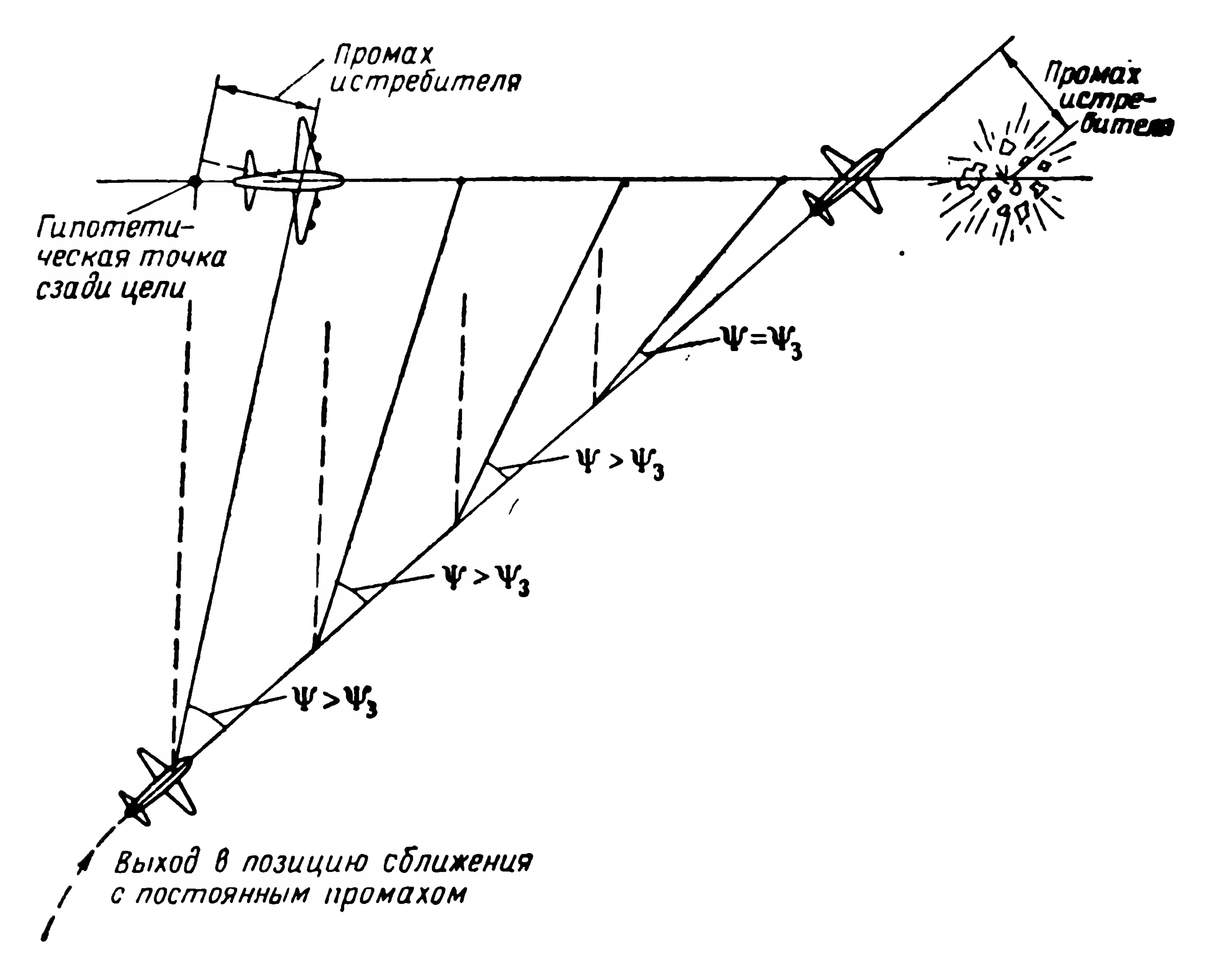
Движение самолета по кривой атаки может происходить с большими перегрузками и соответственно с большими углами атаки. Если снаряд в подвешенном состоянии не ориентировать по вектору скорости самолета, то чем больше угол атаки у самолета, тем больше будет начальный угол атаки у снаряда (фиг. 16.2). Этот угол атаки оказывается возмущающим воздействием, эквивалентным в соответствии с (13.56) некоторой началь-




Фиг. 16.2. Схема второго маневра истребителя.
$\alpha$ — угол атаки истребителя в момент пуска, $V_c$ — скорость снаряда относительно истребителя; $\alpha_0$ — начальный угол атаки снаряда.

ной скорости промаха. Чтобы уменьшить возмущение, связанное с начальным углом атаки снаряда, необходимо пуск снаряда осуществлять из режима полета истребителя, близкого к прямолинейному. Для этого применяют второй вид маневра и поступают следующим образом: после захвата цели прицелом истребитель

выводится в такую позицию по отношению к цели, чтобы сближение с целью совершалось с постоянным промахом. Это равноценно тому, что истребитель осуществляет параллельное сближение с гипотетической точкой, расположенной сзади цели. При параллельном сближении с этой точкой угол упреждения $\psi$ или угол между направлением на цель и продольной осью истребителя будет непрерывно уменьшаться (фиг. 16.3). В вычислителе прицела сравнивается фактический угол упреждения с заданным, вычисляемым

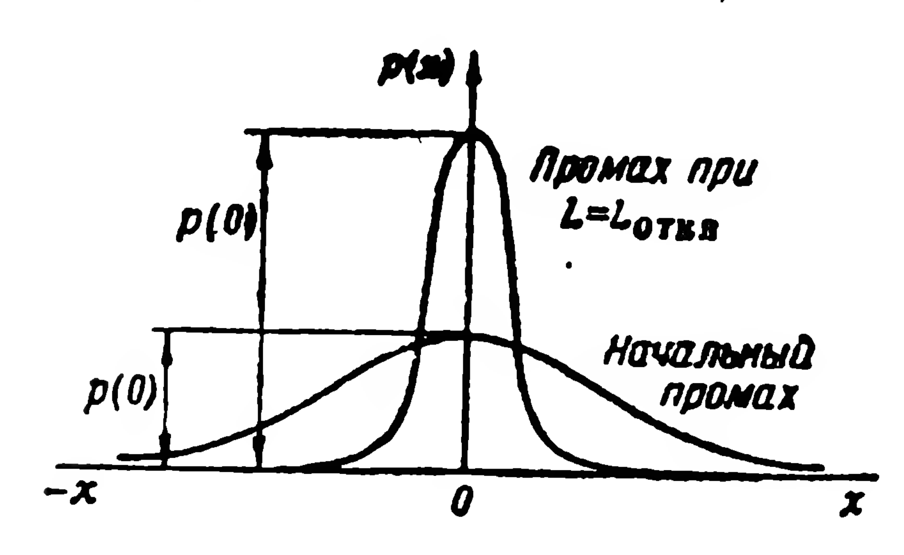



Фиг. 16.3. Схема маневра с постоянным промахом.

по формуле (16.4). В момент, когда эти углы сравниваются, производится пуск снаряда. Если истребитель после пуска будет продолжать прямолинейный полет, то он пролетит сзади с назначенным постоянным промахом по отношению к цели, пораженной управляемым снарядом. При постоянном векторе скорости цели вектор скорости истребителя, сближающегося с постоянным промахом, также будет постоянным.

Приведенное краткое описание функционирования комплекса самонаводящихся снарядов позволяет наметить пути исследования точности попадания снаряда в цель. За величину, характеризую-

щую точность попадания, удобно принять среднеквадратичное значение промаха для дальности, при которой приходится прекращать управление снарядом из-за «ослепления» головки самонаведения снаряда или из-за достижения координатами $\dot{\varphi}$, $\alpha$, $\delta$ (см. гл. XIII) предельных значений. Значение промаха вычисляется по формуле (13.46), если взять $L = L_{откл}$, а $\dot{\varphi}$ и $V_{отн}$ соответствующими этому значению $L$. Вычисленное по формуле (13.46) значение промаха было бы и действительным промахом, если бы начиная с момента, когда $L = L_{откл}$, векторы скорости цели и снаряда оставались постоянными. Фактический промах будет отличаться от промаха, определенного по уравнению (13.46) при $L = L_{откл}$, так как из-за маневра цели, действия возмущений и отклонения рулей снаряда, условие постоянства векторов скорости цели и снаряда будет нарушаться. Несмотря на это, для расчетов удобнее выбрать среднеквадратичное значение промаха при дальности $L = L_{откл}$, поскольку именно это значение характеризует качество процесса управления или наведения снаряда в линейной теории самонаведения. Промах представляет собой векторную случайную величину или случайную двумерную величину.




Фиг. 16.4. Кривые плотности вероятности промаха в плоском движении.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

— плотность вероятности промаха; $\sigma_x$ — среднеквадратичное значение промаха;

$$p(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}$$ — мера точности.

Промах самонаводящегося снаряда возникает благодаря тому, что, во-первых, система управления не устраняет до нуля, а только уменьшает начальный промах и, во-вторых, в процессе полета снаряда к цели возникает дополнительный промах от действия возмущений (см. гл. VIII). При этом необходимо учитывать внутренние шумы в системе управления и внешние помехи, действующие на систему управления снаряда.

Рассмотрим кратко обе составляющие промаха и способы их вычисления.

Составляющая промаха от начального промаха или от нулевых начальных условий в момент выстрела. Начальный промах неизбежен вследствие инструментальных и методических ошибок прицелов, возмущений в момент пуска, неточностей в пусковой аппаратуре, ошибок летчика и многих других факторов. Множество причин, вызывающих начальный промах, позволяют считать его случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Если рассчитывать про-

цесс наведения по линейным уравнениям (см. гл. XIII), то и промах цели в принятом выше определении будет распределен по нормальному закону. На фиг. 16.4 показаны примерные плотности вероятности промаха для плоского движения.

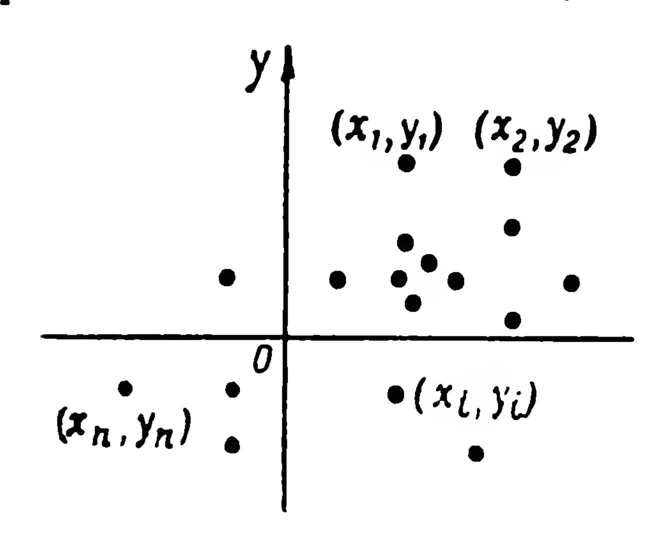
Составляющая промаха от действия помех и возмущений. Возьмем в качестве примера структурные схемы на фиг. 13.19 и 13.20 снарядов с системой управления, обеспечивающей наведение по методу параллельного сближения. На систему управления оказывает влияние помеха $\nu(t)$, которая содержится в сигнале угловой скорости линии снаряд — цель и имеет сложную природу. Она определяется флюктуациями отраженного от цели сигнала и внутренними шумами в координаторе цели. Помеха эта носит нестационарный характер, особенно в связи с непрерывно уменьшающимся расстоянием до цели. Возмущение, возникающее как результат влияния маневра цели, также в общем случае является нестационарной случайной функцией времени. В итоге мы встречаемся со случаем, когда на нестационарную линейную систему оказывается два нестационарных воздействия.

При статистической независимости воздействия $\nu(t)$ и $f_x(t)$ дисперсия промаха может быть определена по формуле (2.55) При этом $n=2$; $R_{x1}(\tau_1, \tau_2)$ — корреляционная функция для $\nu(t)$, $R_{x2}(\tau_1, \tau_2)$ — корреляционная функция для $f_x(t)$, $k_1(t, \tau)$ — импульсная переходная функция системы для помехи $\nu(t)$ и $k_2(t, \tau)$ — импульсная переходная функция для возмущения.

Если одновременно учесть влияние ненулевых начальных условий (начальный промах) и возмущений, то дисперсии промаха следует вычислять по формулам, аналогичным (2.57) и (2.58) Такие вычисления представляют собой весьма громоздкую операцию. Однако эти вычисления еще более усложнятся, если учесть что реальные системы управления снарядом, как правило, нелинейны. Основное влияние на значение промаха будут оказывать нелинейности типа ограничения.

Сложность вычисления дисперсии и математического ожидания промаха вынуждает использовать различные методы моделирования для определения вероятностных характеристик промаха или точности попадания. Остановимся теперь кратко на исследовании методом моделирования систем. В этом случае на модель системы (чисто математическую или смешанную) следует подать одновременно все случайные сигналы, влияние которых желательно исследовать. Нужно обеспечить совпадение вероятностных характеристик этих сигналов с характеристиками реальных случайных возмущений, которые будут действовать на снаряд в полете. После этого многократно моделируется выстрел снаряда по цели при случайных комбинациях начальных условий и возможных движениях цели. В результате каждого из процессов моделирования выстрела определяется промах снаряда, т. е. минимальное

расстояние пролета снаряда от центра цели. В зависимости от характера взрывателя снаряда промах может характеризоваться двумя или тремя координатами. При ударном взрывателе промах характеризуется двумя координатами на плоскости, перпендикулярной траектории снаряда в районе цели. Если цель находится на земле, то при ударном взрывателе рассеивание следует рассматривать на плоскости, совпадающей с поверхностью земли. При дистанционном взрывателе промах определяется тремя координатами. Для большей наглядности рассмотрим более простой случай снаряда с ударным взрывателем. Пусть на моделирующей установке произведено $n$ «выстрелов» и зарегистрированы координаты $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ $n$ точек пролета снаряда сквозь указанную выше плоскость. Начало координат совмещено с целью, а оси расположены в плоскости, на которой рассеивание определяется следующим образом: ось $x$ — в плоскости стрельбы, а ось $y$ — к ней перпендикулярно. Результаты моделирования стрельбы могут быть представлены графически, как показано на фиг. 16.5.




Фиг. 16.5. Графическое представление результатов моделирования стрельбы.

Полагаем, что рассеивание управляемых снарядов подчинено нормальному закону распределения, как это имеет место для неуправляемых снарядов. Такое предположение основано на том, что отклонение точки попадания снаряда от центра цели считается вызванным совместным действием большого числа сравнительно незначительных, независимых друг от друга факторов. Указанная ситуация и обусловливает нормальный закон распределения вероятности случайных величин. Будем считать также, что выбранные выше координатные оси являются главными осями эллипса рассеивания. В такой системе координат абсцисса и ордината точки пролета снаряда сквозь плоскость цели являются независимыми случайными величинами и их закон распределения определяется четырьмя параметрами: координатами центра эллипса рассеивания $m_x$ и $m_y$ и дисперсиями $\sigma_x^2$ и $\sigma_y^2$. Эти параметры вычисляются на основании формул

$$m_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}; \qquad m_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n};$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^2}{n-1}; \qquad \sigma_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - m_y)^2}{n-1}.$$

При оценке результатов стрельб принято вместо среднеквадратичного отклонения $\sigma$ использовать понятие вероятного отклонения $E$. В случае нормального закона распределения эти параметры связаны между собой соотношением

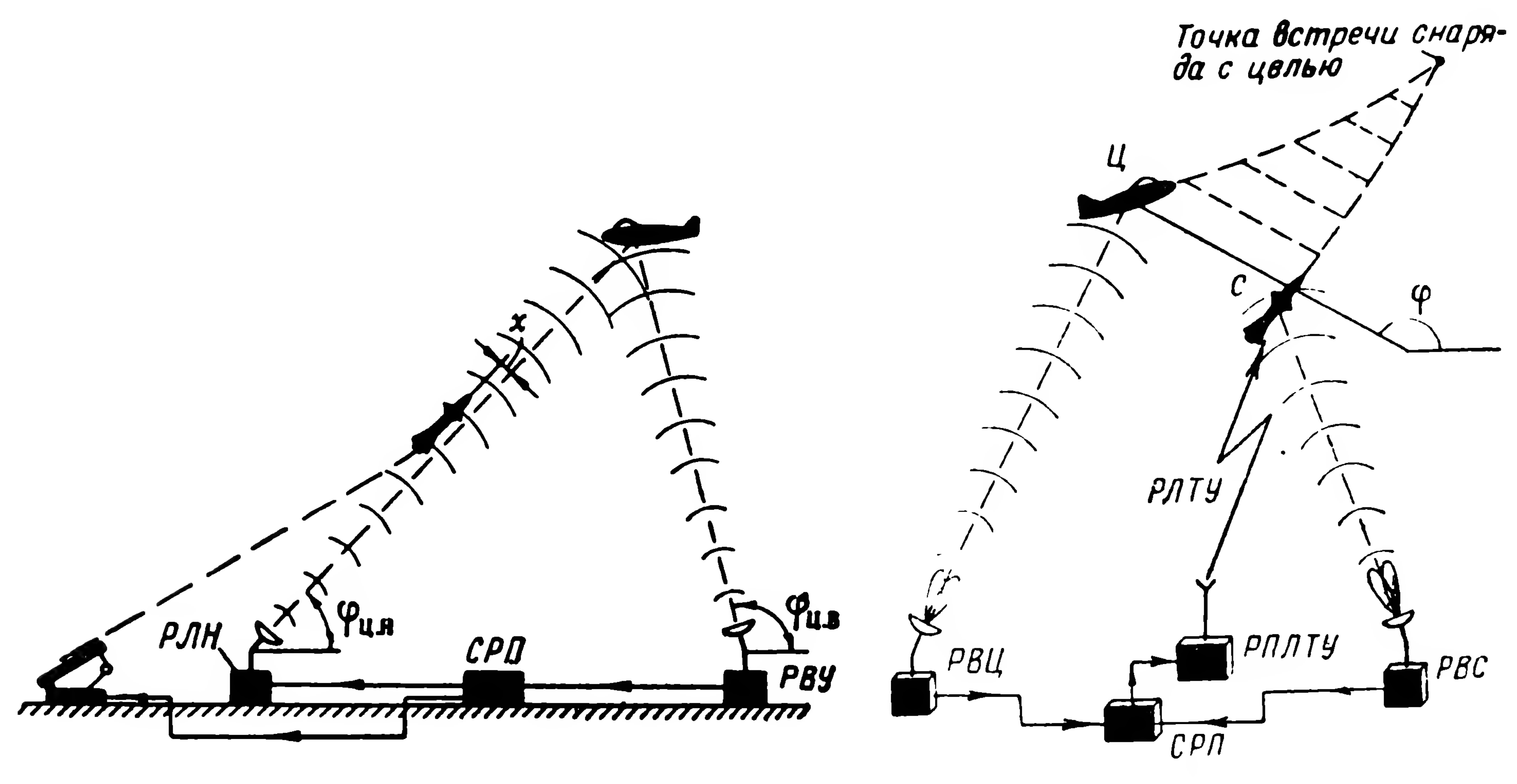
$$E = 0{,}675\sigma.$$

Для получения достаточно точных оценок рассеивания снарядов методом моделирования необходимо провести большое количество (порядка многих сотен) выстрелов на моделирующей установке. Если в результате проведенного моделирования окажется, что центр эллипса рассеивания снаряда располагается на значительном расстоянии от цели, то это свидетельствует о каких-либо неисправностях в системе управления или о недостатках принятого метода наведения. Обе эти причины указанного явления необходимо выявить и устранить. Если же среднеквадратичные или вероятные отклонения снаряда превосходят допустимые пределы, то в цепи прохождения сигнала следует добавить элементы, уменьшающие влияние случайных возмущений на полет управляемого снаряда или несколько изменить параметры отдельных звеньев системы управления снарядом.

## § 16.3. КОМПЛЕКСЫ ТЕЛЕУПРАВЛЯЕМЫХ СНАРЯДОВ

Комплексы телеуправляемых снарядов весьма разнообразны. Они значительно разнообразнее комплексов самонаводящихся снарядов. В комплекс телеуправления может входить и комплекс самонаведения для наведения снаряда на конечном участке траектории сближения с целью. На фиг. 16.6, 16.7 и 16.8 приведены схемы трех вариантов комплексов зенитных телеуправляемых снарядов. На фиг. 16.6 изображена схема комплекса наведения снаряда по лучу методом совмещения. Координаты цели (азимут, угол места $\varphi_{ц.в}$ и дальность) определяются специальным локатором — радиовизиром цели (РВЦ), работающим в режиме автосопровождения. Наведение осуществляется радиолокатором наведения РЛН. С помощью этого локатора на борту снаряда образуются сигналы бокового отклонения от равносигнальной зоны радиолуча.

Слежение РЛН за целью осуществляется по сигналам радиовизира РВЦ, обработанным предварительно счетно-решающим устройством СРП. Счетно-решающее устройство вносит поправку на параллакс, возникающий от раздельного размещения РЛН и РВЦ. При достаточно близком размещении РЛН и РВЦ, когда параллакс незначителен (следовательно, $\varphi_{ц.в} \approx \varphi_{ц.н}$), надобность в счетно-решающем устройстве отпадает. В этом случае антенна РЛН непосредственно следит за перемещениями антенны РВЦ.



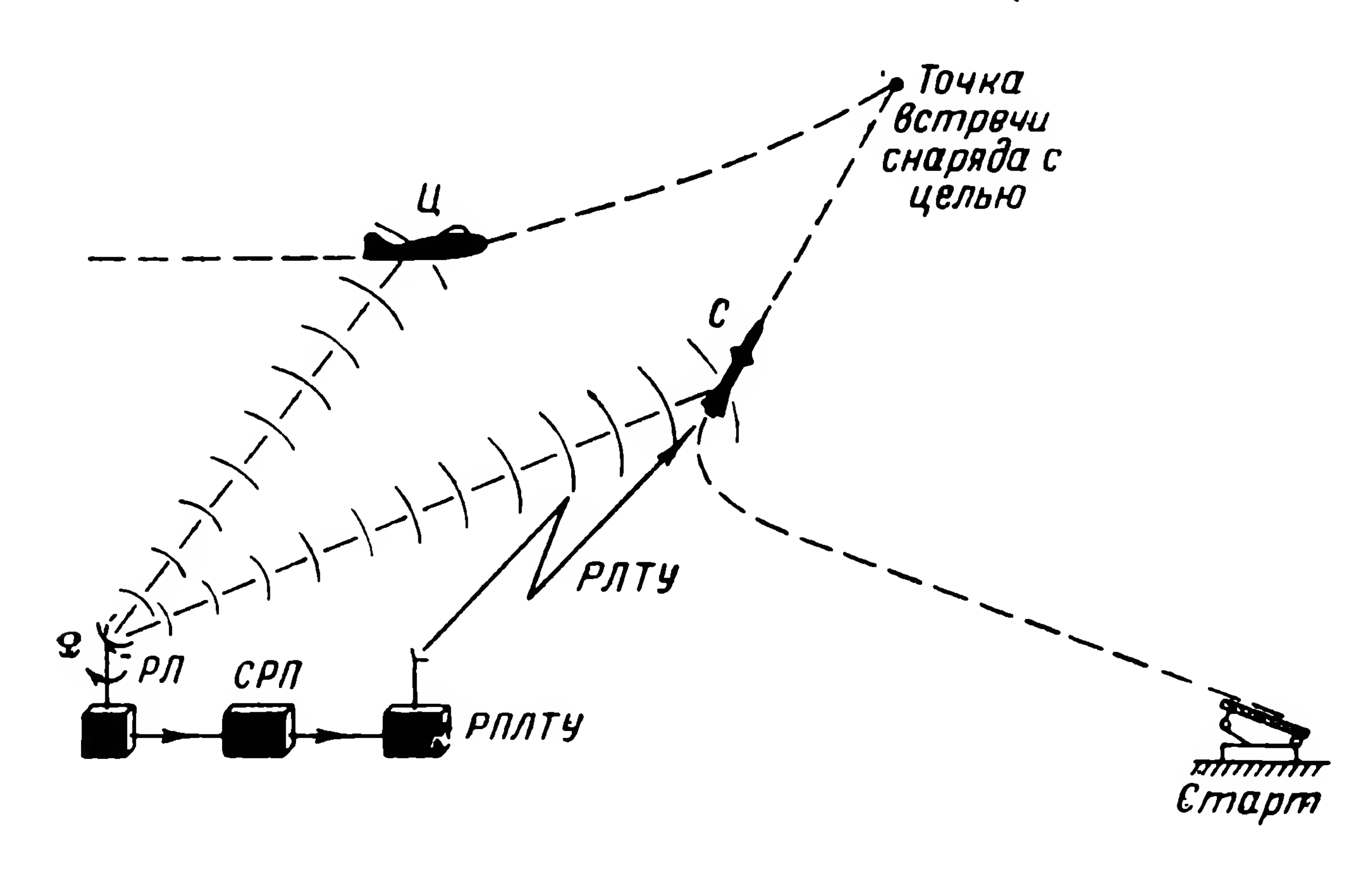

Фиг. 16.6. Схема первого варианта комплекса телеуправляемого снаряда.

Фиг. 16.7. Схема второго варианта комплекса телеуправляемого снаряда.

На фиг. 16.7 показана схема комплекса телеуправляемых снарядов с отдельными радиовизирами цели РВЦ и снаряда РВС. Координаты цели и снаряда (азимуты, углы места и дальности), измеряемые визирами, поступают в счетно-решающее устройство. СРП вырабатывает команды управления, которые по радиолинии телеуправления РЛТУ посылаются на борт снаряда. СРП позволяет реализовать любой желаемый метод наведения снаряда на цель: погони, совмещения, параллельного сближения и т. п. На фиг. 16.7 показана реализация метода параллельного сближения или наведение в мгновенную точку встречи. Для реализации этого метода по радиолинии на снаряд можно передавать вычисленные СРП две компоненты вектора угловой скорости линии снаряд — цель или такие значения тангажа и курса снаряда, при которых $\dot{\vec{\varphi}}$ обращается в нуль.

Описанные две системы телеуправляемых комплексов имеют сравнительно небольшой радиус действия. Большой радиус действия получается, если использовать для определения координат

цели и снаряда обзорный радиолокатор, антенна которого вращается с постоянной угловой скоростью Ω. Схема комплекса с обзорным радиолокатором изображена на фиг. 16.8. На радиолокаторе периодически с частотой вращения антенны фиксируются дискретные значения координат цели и снаряда. Эти координаты поступают в счетно-решающее устройство, которое в соответствии с принятым методом наведения формирует сигналы управления, передаваемые затем по радиолинии телеуправления (РЛТУ) на снаряд. Система управления снарядом в данном случае является дискретной. Некоторые особенности динамики дискретного управления наведения были отмечены в гл. XIV. Наведение снаряда на

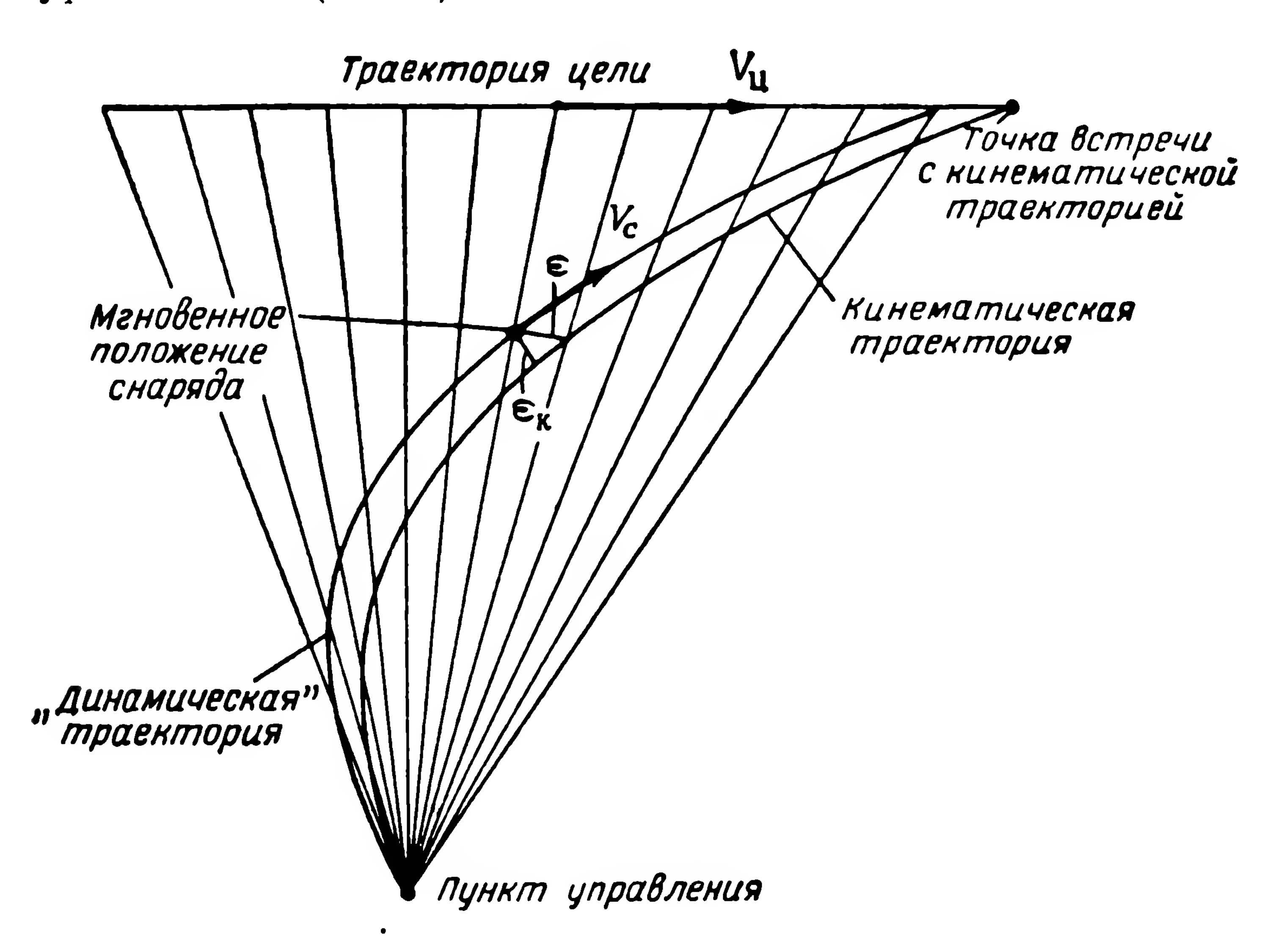



Фиг. 16.8. Схема третьего варианта комплекса телеуправляемого снаряда.

цель вплоть до поражения цели описанным способом невозможно из-за сравнительно низкой точности определения координат с помощью обзорного локатора. В самом деле, если, например, принять, что луч диаграммы направленности антенны в азимуте составляет 0,2°, то на расстоянии в 300 *км* положение цели будет определено с точностью до 1,0 *км*. В связи с этим с помощью обзорных локаторов наводятся самолеты-истребители, пилотируемые или беспилотные. По командам от СРП истребитель выводится в район цели, когда цель может быть захвачена бортовым локатором или прицелом истребителя. После этого осуществляется атака цели путем использования стрелково-пушечного вооружения истребителя, неуправляемых или управляемых снарядов. На беспилотном истребителе используются обычно управляемые снаряды. В связи с этим беспилотный истребитель может быть назван двухступенчатым управляемым снарядом.

При исследовании точности наведения телеуправляемых снарядов ограничимся случаем наведения снаряда по радиолучу

(фиг. 16.9). Особенности наведения снаряда по лучу, связанные с непосредственным измерением сигнала линейного отклонения от равносигнальной зоны, дают возможность оценить точность наведения с использованием теории точности обычных стационарных следящих систем или сервомеханизмов. При этом можно оценить «динамическую» точность наведения и точность при действии случайных возмущений, связанных прежде всего с флюктуациями равносигнальной зоны. Для оценки динамической точности наведения необходимо определить функцию времени $z_3 = z_3(t)$, фигурирующую в уравнениях (11.14).




Фиг. 16.9. Схема наведения снаряда по радиолучу.

**$\varepsilon$ — отклонение от равносигнальной зоны; $\varepsilon_к$ — отклонение от кинематической траектории.**

На фиг. 16.9 показаны мгновенные значения положения равносигнальной зоны, а также кинематическая и динамическая траектории движения снаряда. При рассмотрении фигуры видно, что отклонение снаряда от равносигнальной зоны $\varepsilon$ не равно отклонению динамической траектории от кинематической $\varepsilon_к$. По величинам $\varepsilon$ и $\varepsilon_к$, взятым в момент времени, соответствующий моменту встречи снаряда с целью, можно судить о величине промаха снаряда. Очевидно, однако, что ни $\varepsilon$, ни $\varepsilon_к$, взятые в указанный момент времени, не являются истинным промахом, а величинами мало отличающимися от него. Для получения уточненного значения промаха следовало бы составить уравнения наведения по лучу как разновидности самонаведения с упреждением (см. гл. XIV).

Однако в этом случае мы лишены были бы возможности оценить (а не точно вычислить) промах, используя теорию точности стационарных систем, и, самое главное, использовать ее для синтеза системы управления снаряда.

Для оценки точности по ошибке $\varepsilon_к$, как уже указывалось в гл. XIV, необходимо определить предварительно нормальное ускорение вдоль кинематической траектории как функцию времени $j=j(t)$. Ошибка $\varepsilon_к$ вычисляется, как результат воздействия возмущения $j(t)$, приложенного к точке структурной схемы, в которой фиксируется нормальное ускорение.

Возьмем упрощенные структурные схемы, изображенные на фиг. 14.12 *. При упрощенных уравнениях и структурных схемах предполагается, что углы атаки у крестокрылых и плоскокрылых снарядов пропорциональны (без запаздывания) отклонению руля или суммарному выходному сигналу корректирующих цепей. Для бокового движения плоскокрылого снаряда упрощение заключается в предположении о такой же зависимости между углом крена и выходным сигналом корректирующих цепей. Так как нормальные к траектории силы пропорциональны углам атаки и крена, то выход корректирующих цепей в упрощенных структурных схемах и будет той точкой, где фиксируется ускорение. На фиг. 16.10 приведены упрощенные структурные схемы: схема с последовательным корректирующим устройством (см. фиг. 16.10, *а*) и схема с последовательным и параллельным корректирующим устройством (см. фиг. 16.10, *б*) (см. гл. XI). Параллельное корректирующее устройство означает обратную связь по сигналу курса или по сигналу скорости бокового отклонения $\dot{y}$. Найдем сначала ошибку $\varepsilon_к$ от возмущения $j(t)$ для схем на фиг. 16.10, *а*. При $x(t)=0$ выход $y$ равен $\varepsilon_к$ с обратным знаком. Поэтому **

$$\varepsilon_к = \frac{\frac{1}{p^2}}{1+W(p)}\, j(t), \tag{16.5}$$

где

$$W(p) = \left[k\frac{T_1p+1}{T_2p+1} + \frac{q}{p}\right]\frac{1}{p^2} = \frac{kT_1p^2+(T_2q+k)p+q}{(T_2p+1)p^3}$$

есть передаточная функция разомкнутого контура.

Подставляя $W(p)$ в выражение для $\varepsilon_к$, получим

$$\varepsilon_к = \frac{(T_2p+1)p}{T_2p^4+p^3+kT_1p^2+(T_2q+k)p+q}\, j(t). \tag{16.6}$$

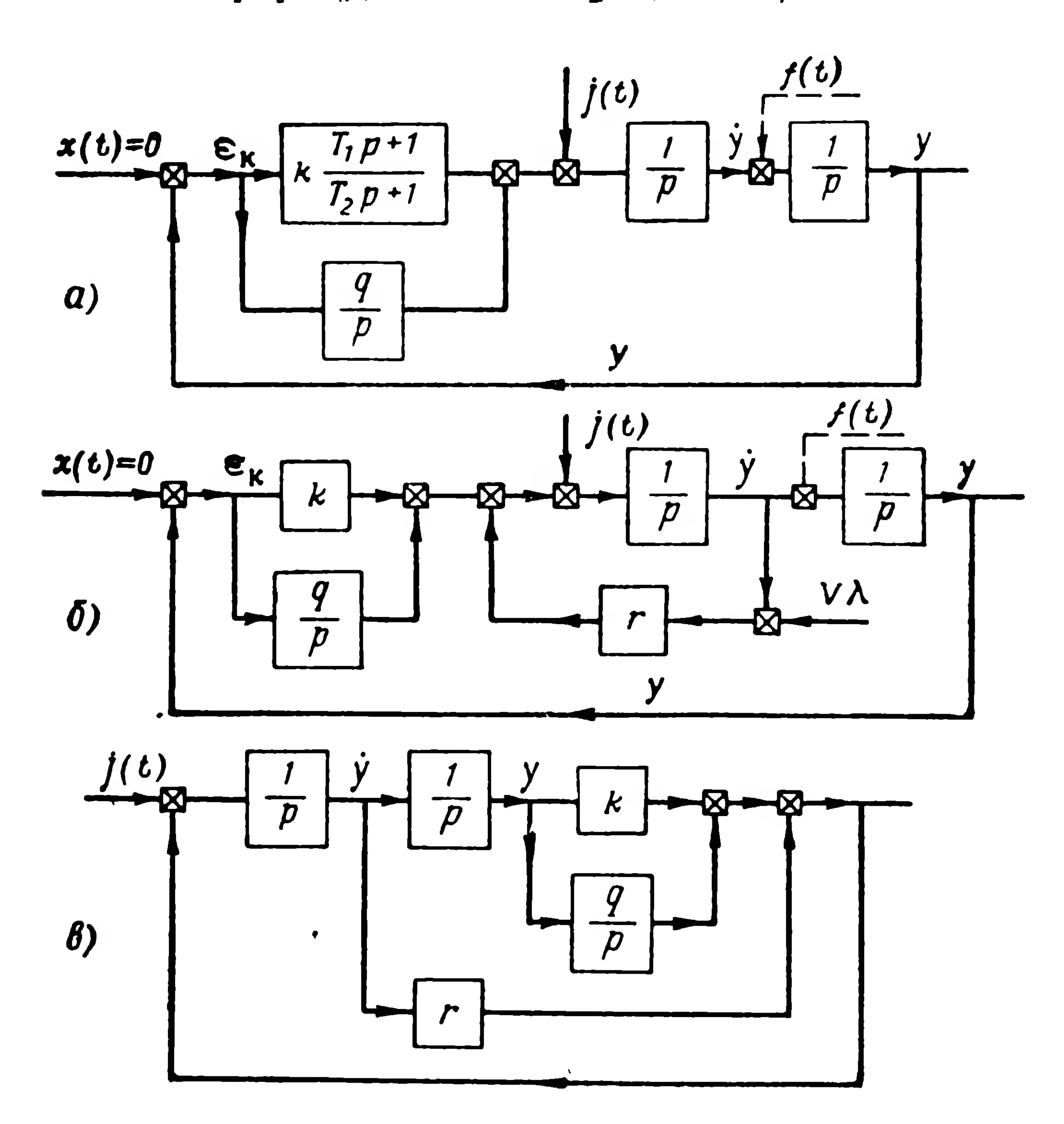
---

* В этих схемах $z_з(t)$ обозначено $x(t)$.

** Передаточные функции в данном случае удобнее записывать, как функции аргумента $p=d/dt$.

Для того чтобы привести возмущение $j(t)$ к входу, т. е. найти такую $x(t)$, которая приводила бы к той же самой ошибке, напишем выражение для ошибки от входа $x(t)$. Как известно, в этом случае

$$\varepsilon_{x\kappa} = \frac{1}{1+W(p)}\, x(t) = \frac{(T_2 p + 1)\, p}{T_2 p^4 + \ldots + q}\, p^2 x(t). \qquad (16.7)$$




Фиг. 16.10. Структурные схемы системы телеуправления.
*а* — с последовательным. *б* — с последовательным и параллельным корректирующими устройствами; *в* — преобразованная схема *б*.

Сравнивая выражения (16.6) и (16.7), замечаем, что для данной схемы

$$j(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

или

$$x(t) = \int_0^t \int_0^t j(t)\, dt \cdot dt.$$

Найдем теперь ошибку и эквивалентное воздействие $x(t)$ для схемы на фиг. 16.10, *б*. Как и в предыдущем случае, для опреде-

ления ошибки $\varepsilon_к$ необходимо найти выход $y$ от возмущения $j(t)$. Это удобнее сделать по преобразованной структурной схеме на фиг. 16.10, *в*. Используя эту схему, находим

$$\varepsilon_к = \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + W_1(p)} j(t), \qquad (16.8)$$

где

$$W_1(p) = \frac{rp^2 + kp + q}{p^3},$$

откуда

$$\varepsilon_к = \frac{p}{p^3 + rp^2 + kp + q} j(t). \qquad (16.9)$$

Ошибка воспроизведения входного сигнала $x(t)$ для схемы на фиг. 10.16, *б*

$$\varepsilon_к = \frac{1}{1 + W_2(p)} \cdot x(t), \qquad (16.10)$$

где

$$W_2(p) = \frac{kp + q}{(p + r) p^2}. \qquad (16.11)$$

Заметим, что передаточные функции разомкнутой системы для основной и преобразованной структурных схем (фиг. 16.10, *б*) различны [см. выражения (16.8) и (16.11)]. Подставляя формулу в (16.10), находим

$$\varepsilon_к = \frac{(p + r) p^2}{p^3 + rp^2 + kp + q} \cdot x(t). \qquad (16.12)$$

Сравнивая уравнения (16.9) и (16.12), получим, что $j(t)$ и $x(t)$ связаны оператором

$$x(t) \doteq \frac{1}{p^2 + rp} j(t).$$

Иными словами, при известном $j(t)$ функцию $x(t)$ можно получить из решения дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + r\dot{x} = j(t).$$

Найденные выражения для ошибок позволяют их вычислять после того, как из исследования кинематики найдена функция $j(t)$. Из выражений (16.2) и (16.5) видно, что интеграл от сигнала ошибки в законе управления (коэффициент $q$) обращает в нуль установившуюся ошибку при постоянном ускорении, т. е. при полете по круговой кинематической траектории. Если же в этих выражениях положить $q=0$, то постоянное ускорение приведет к

установившейся ошибке. Поскольку длительность переходного процесса, связанного с вводом снаряда в луч, как правило, меньше времени полета снаряда до встречи с целью, динамическую ошибку можно рассчитать с помощью так называемых коэффициентов ошибок. Для этого необходимо операторные передаточные функции в выражениях (16.6) и (16.9) или в уравнениях (16.7) и (16.12), если найдена $x(t)$, разложить в ряд по степеням $p$, т. е. представить равенства (16.6) и (16.9) в виде

$$\varepsilon_к = (c_0 + c_1 p + c_2 p^2 + \ldots) j(t) = \\ = \left[ c_0 j(t) + c_1 \frac{dj}{dt} + c_2 \frac{d^2 j}{dt^2} + \ldots \right].$$

При $q \neq 0$ коэффициент ошибки $c_0 = 0$ и, наоборот, при $q = 0$ коэффициент ошибки $c_0 = \frac{1}{k}$ (для схем на фиг. 16.10, *а*, *б*).

Теперь обратимся к вычислению динамической ошибки $\varepsilon$, представляющей собой отклонение снаряда от равносигнальной зоны радиолуча. В гл. XI и XIV рассматривались уравнения движения снаряда относительно неподвижного луча или луча, перемещающегося параллельно исходному положению. В данном случае (наведение зенитных снарядов) равносигнальная зона луча поворачивается с некоторой угловой скоростью $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}(t)$ (фиг. 16.11). Тогда достаточно рассмотреть уравнение кинематической связи, третье уравнение в системе (11.1).

Обращаясь к фиг. 16.11, запишем выражение для абсолютной производной отклонения $y$ или ошибки $\varepsilon$ для малого угла $\theta - \lambda$:

$$\frac{dy}{dt} = (\theta - \lambda) V - L\dot{\lambda}$$

или

$$\frac{dy}{dt} = V\theta + f(t), \qquad (16.13)$$

где $f(t) = -V\lambda - L\dot{\lambda}$ — возмущающее воздействие, возникающее при криволинейном движении снаряда.

Функция $f(t)$ вычисляется на основе исследований кинематики наведения, позволяющей определить закон углового перемещения луча $\dot{\lambda} = \dot{\lambda}(t)$ и расстояния от пункта наведения до проекции снаряда на мгновенное положение луча. Заметим, что приближенно можно положить $L(t) = Vt$.

Уравнение (16.13) указывает, что в структурных схемах, изображенных на фиг. 16.10, возмущающее воздействие $f(t)$ приложено в месте фиксации производной $dy/dt$. На этих структурных схемах воздействие $f(t)$ помечено пунктирной стрелкой, чтобы подчеркнуть, что можно рассматривать воздействие возмущения $j(t)$ или $f(t)$.

Запишем выражение для ошибки ε для схемы на фиг. 16.10, *а*

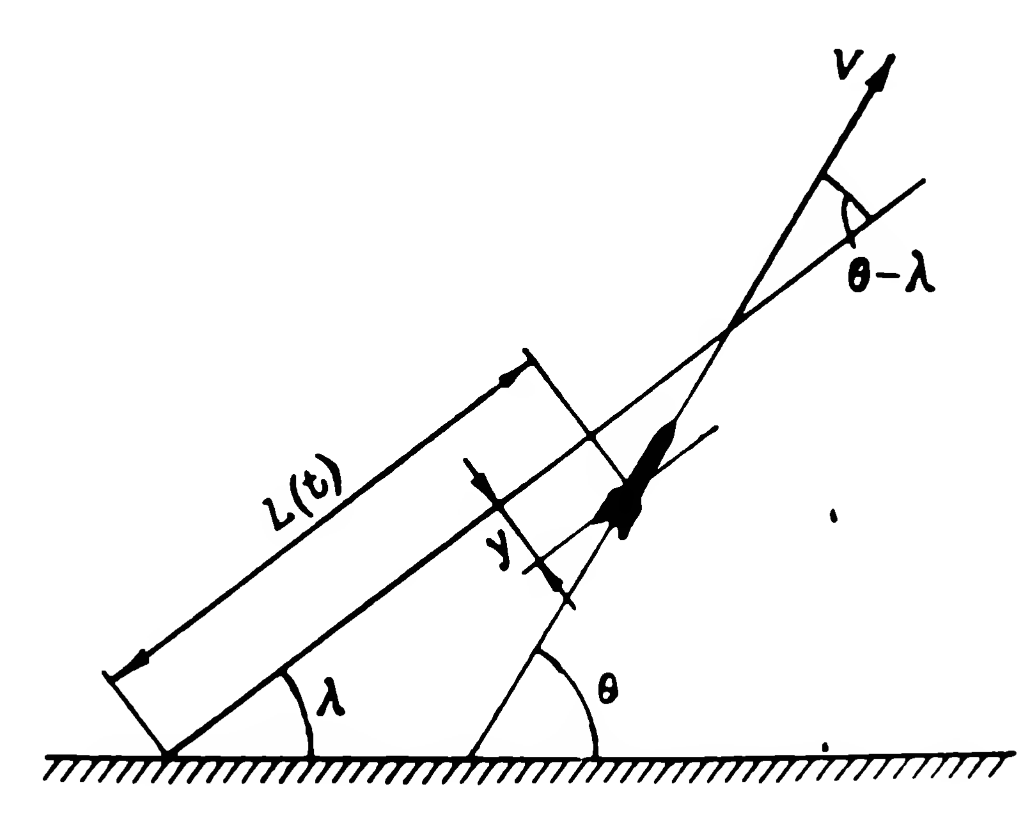
$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{p}}{1 + W(p)} f(t) = \frac{(T_2 p + 1) p^2 f(t)}{p^3 + \ldots + (T_2 q + k) p + q} \qquad (16.14)$$

и для схемы на фиг. 16.10, *б*

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{p}}{1 + W_2(p)} f(t) = \frac{(p + r) p}{p^3 + rp^2 + kp + q} f(t). \qquad (16.15)$$

Сравнивая выражения (16.14) и (16.15), замечаем, что когда $f(t)$ — линейная функция времени, в схеме на фиг. 16.10, *а* не возникает установившейся ошибки, а в схеме на фиг. 16.10, *б* возникает. Это происходит благодаря тому, что сигнал обратной связи во второй схеме снимается до точки приложения возмущения. Сигнал обратной связи, снятый с этой точки, означает, что в закон регулирования введен сигнал, пропорциональный углу $\theta$. Можно существенно уменьшить значение установившейся ошибки, если в цепь обратной связи ввести программный сигнал $\lambda = \lambda(t)$. Что касается связи возмущения $f(t)$ с эквивалентным входным сигналом $x(t)$, то для обоих схем будет справедливо выражение

$$x(t) = \int_0^t f(t)\,dt.$$




Фиг. 16.11. Схема, иллюстрирующая геометрию наведения снаряда по лучу.

Промах снаряда, наводимого по лучу, зависит не только от динамических ошибок, но и от флюктуации равносигнальной зоны радиолуча. Флюктуация равносигнальной зоны возникает вследствие флюктуации отраженного от цели сигнала и шумов в приемо-передающей аппаратуре комплекса. Флюктуации равносигнальной зоны представляют собой помеху, приложенную к входу структурной системы наведения. Таким образом, на вход системы наведения действует сумма полезного сигнала $x(t)$ и помеха $\nu(t)$. При этом $x(t)$, так же как $\nu(t)$, следует в общем случае рассматривать как случайную функцию времени.

Случайная функция $\nu(t)$, как правило, может рассматриваться как стационарная. Если цель совершает полет с постоянным азимутом и пункт управления зенитным снарядом расположен на проекции траектории цели на земную поверхность, то луч будет совершать движение в одной плоскости. В этом случае составляющая промаха снаряда, нормальная к плоскости перемещения луча, будет зависеть только от флюктуационной помехи $\nu(t)$. При стационарной случайной функции $\nu(t)$ среднеквадратичное значение этой составляющей промаха вычисляется по формуле

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty |\Phi(j\omega)|^2 S_\nu(\omega)\, d\omega,$$

где $S_\nu(\omega)$ — спектральная плотность помехи $\nu(t)$;

$\Phi(j\omega) = \dfrac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)}$ — передаточная функция замкнутой системы наведения снаряда по лучу.

Для схемы на фиг. 16. 10, *а*

$$W(j\omega) = \frac{kT_1 (j\omega)^2 + (T_2 q + k) j\omega + q}{(T_2 j\omega + 1)(j\omega)^2};$$

для схемы на фиг. 16. 10, *б*

$$W(j\omega) = \frac{k(j\omega) + q}{(j\omega + r)(j\omega)^2}.$$

Если представить и $x(t)$ как стационарную случайную функцию, то среднеквадратичное значение промаха вычисляется по формуле

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty |\Phi(j\omega)|^2 S_\nu(\omega)\, d\omega + \int_0^\infty |\Phi_\varepsilon(j\omega)|^2 S_x(\omega)\, d\omega,$$

где

$\Phi_\varepsilon(j\omega) = \dfrac{1}{1 + W(j\omega)}$ — передаточная функция ошибки;

$S_x(\omega)$ — спектральная плотность сигнала $x(t)$.

Если $x(t)$ не представляется достаточно точно стационарной случайной функцией и переходные процессы от воздействия стационарной помехи $\nu(t)$ и начальных условий не затухают достаточно эффективно, то для вычисления промаха следует применить формулы или метод моделирования, приведенные в гл. II.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Астронавигационная система управления снарядов дальнего действия (обзор), «Вопросы ракетной техники», 1958, № 4.

2. Бэтчелор Дж., Теория однородной турбулентности, ИЛ, 1955.

3. Бонни Е. А., Цукров М. Д., Бессерер К. У., Аэродинамика, Теория реактивных двигателей, Конструкция и практика проектирования, Воениздат, 1959.

4. Брамсон М. А., Каликеев А. Е., Инфракрасная техника капиталистических стран, изд. «Советское радио», 1960.

5. Браславский Д. А., Логунов С. С., Пельпор Д. С., Расчет и конструирование авиационных приборов, Оборонгиз, 1954.

6. Бургесс Э., Управляемое реактивное оружие, ИЛ, 1958.

7. Ван-Хорн, Метод моделирования для определения вероятности попадания и решения связанных с этим статистических задач, «Вопросы ракетной техники», 1958, № 6.

8. Гуткин Л. С., Принцип радиоуправления беспилотными объектами, изд. «Советское радио», 1959.

9. Гуткин Л. С., Теория оптимальных методов радиоприема при флюктуационных помехах, Госэнергоиздат, 1961.

10. Гэтленд К. У., Развитие управляемых снарядов, ИЛ, 1956.

11. Доброленский Ю. П., Турбулентность атмосферы как источник возмущений для систем автоматического управления самолетом, Изв. АН СССР, «Энергетика и автоматика», 1961, № 5.

12. Дункан, Анализ инерциальной системы управления, «Вопросы ракетной техники», 1958, № 5.

13. Клас, Инфракрасная техника оспаривает монополию радиолокации, «Вопросы радиолокационной техники», 1958, № 2.

14. Красовский А. А., Поспелов Г. С., Основы автоматики и технической кибернетики, Госэнергоиздат, 1962.

15. Колосов С. П., Элементы авиационных автоматических устройств, Оборонгиз, 1958.

16. Коой И., Ютенбогарт И., Динамика ракет, Оборонгиз, 1950.

17. Крысенко Г. Д., Управление реактивными снарядами, Воениздат, 1960.

18. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И., Курс теоретической механики, т. II, Гостехиздат, 1954.

19. Локк А. С., Управляемые снаряды, Гостехиздат, 1957.

20. Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р. Г., Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, 1958.

21. Марголин И. А., Румянцев Н. П., Основы инфракрасной техники, Госэнергоиздат, 1955.

22. Марисов В. И., Кучеров И. К., Управляемые снаряды, Воениздат, 1959.

23. Мееров М. В., Основы автоматического регулирования электрических машин, Госэнергоиздат, 1952.

24. Мерилл Г., Гольдберг Г., Гельмгольц Р., Исследование операций, Боевые части, Пуск снарядов, ИЛ, 1959.

25. Метьюз, Аналитическое определение величины пролета управляемого снаряда, «Вопросы ракетной техники», 1958, № 3.

26. Мюллер Ф., Телеуправление, ИЛ, 1957.

27. Остославский И. В., Аэродинамика самолета, Оборонгиз, 1957.

28. Поспелов Г. С., Импульсные системы автоматического регулирования, Сб. статей «Автоматическое управление и вычислительная техника», Машгиз, вып. 3, 1960.

29. Поспелов Г. С., Специальные приемы повышения качества процесса регулирования, Изв. АН СССР, «Энергетика и автоматика», 1960, № 3.

30. Поспелов Г. С., Доброленский Ю. П., Метод стандартных коэффициентов для выбора параметров линейных систем автоматического регулирования, Сб. статей по автоматике и электротехнике, Изд. АН СССР, 1956.

31. Поспелов Г. С., Вибрационная линеаризация релейных систем автоматического регулирования, Реакция релейных систем на медленно меняющиеся возмущения, Труды второго всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, Изд. АН СССР, 1955.

32. Рассел, Инерциальные системы управления реактивных снарядов, «Вопросы ракетной техники», 1958, № 6.

33. Рил, Требования к системам управления снарядами. Стабилизация и наведение, «Вопросы ракетной техники», 1958, № 4.

34. Россер Д., Ньютон Р. и Гросс Г., Математическая теория полета неуправляемых ракет, ИЛ, 1950.

35. Сломянский Г. А., Прядилов Ю. Н., Поплавковые гироскопы и их применение, Оборонгиз, 1958.

36. Смирнов В. И., Курс высшей математики, Гостехиздат, 1948.

37. Смит Р., Джонс Ф., Чесмер Р., Обнаружение и измерение инфракрасного излучения, ИЛ, 1959.

38. Солодов А. В., Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, Физматгиз, 1962.

39. Солодовников В. В., Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, 1960.

40. Справочная книга по технике автоматического регулирования, под редакцией Дж. Траксела, Госэнергоиздат, 1962.

41. Степанов Б. М., Радиолокационный обзор, Воениздат, 1959.

42. Тзян Г., Адамсон Т. и Кнут Е., Автоматическое управление ракетами дальнего действия, «Вопросы ракетной техники», 1953, № 1.

43. Типугин В. Н., Вейцель В. В., Радиотелеуправление, изд. «Советское радио», 1962.

44. Управляемые снаряды, ИЛ, 1960.

45. Феодосьев В. И., Синярев Г. Б., Введение в ракетную технику, Оборонгиз, 1960.

46. Фридлендер Г. О., Козлов М. С., Авиационные гироскопические приборы, Оборонгиз, 1961.

47. Цыпкин Я. З., Теория релейных систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1955.

48. Штольце, Основные характеристики дальных баллистических ракет, «Вопросы ракетной техники», 1958, № 5.

49. Щукин А. Н., Динамические и флюктационные ошибки управляемых объектов, изд. «Советское радио», 1961.

50. Элементы инерциальных навигационных систем (обзор), «Вопросы ракетной техники», 1959, № 2.

51. Янке Е. и Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, 1959.

52. Press H., Meadows M. T., Hadlock I. A., Reevaluation of Date Atmospheric Turbulence and Airplane Gust Loads for Application in Spectral Calculations, NACA Report, No. 1272, 1956.

53. Grensted P. E. W., Stability Qriteria for Linear Equations with Time-Varying Coeffitients, RAS 1956, No. 3.

ОГЛАВЛЕНИЕ


Стр

Предисловие . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3

*Глава I.* **Общие сведения об управляемых снарядах** . . . . . . 5

§ 1.1. Основные понятия и определения . . . . . . . . . 5
§ 1.2. Методы создания управляющей силы . . . . . . . 10
§ 1.3. Двигатели управляемых снарядов . . . . . . . . . 18
§ 1.4. Современные управляемые снаряды . . . . . . . . 22

*Глава II.* **Некоторые математические методы исследования систем автоматического управления** . . . . . . . . . . . . . 30

§ 2.1. Общие сведения . . . . . . . . . . . . . . 30
§ 2.2. Метод стандартных коэффициентов (СК) . . . . . . . 31
§ 2.3. Метод логарифмических амплитудно-частотных характеристик (ЛАХ) . . . . . . . . . . . . . . . 38
§ 2.4. Краткие сведения по теории нестационарных линейных систем . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
§ 2.5. Статистическая динамика линейных систем . . . . . . 65
§ 2.6. Метод фазовой плоскости для анализа релейных систем . . 79

*Глава III.* **Управляющие сигналы при самонаведении** . . . . . . . 106

§ 3.1. Виды используемой энергии. Активные, полуактивные, пассивные головки самонаведения . . . . . . . . . . . 106
§ 3.2. Чувствительные элементы инфракрасных головок самонаведения . . . . . . . . . . . . . . . . . 108
§ 3.3. Координаторы инфракрасных головок самонаведения . . 116
§ 3.4. Сравнение пассивных, активных и полуактивных радиолокационных головок самонаведения . . . . . . . . . 122
§ 3.5. Получение сигнала ошибки в радиолокационных головках 122
§ 3.6. Образование сигнала управления . . . . . . . . . 125
§ 3.7. Помехи в радиолокационных головках . . . . . . . 129
§ 3.8. Образование сигналов управления при различных методах самонаведения . . . . . . . . . . . . . . . 131

*Глава IV.* **Управляющие сигналы при телеуправлении** . . . . . 139

§ 4.1. Наведение снарядов по радиолучу . . . . . . . . 139
§ 4.2. Командное телеуправление . . . . . . . . . . . 148
§ 4.3. Радиолокационные станции обнаружения воздушных целей 156
§ 4.4. Наведение снарядов методами радионавигации . . . . . 164

*Глава V.* **Управляющие сигналы при автономном наведении** . . . . 168

§ 5.1. Общие сведения . . . . . . . . . . . . . . 168
§ 5.2. Датчики углового положения осей снаряда . . . . . . 170
§ 5.3. Датчики угловой скорости . . . . . . . . . . . 174

Стр.

§ 5.4. Комбинированные гироскопические датчики . . . . . . 176
§ 5.5. Датчики линейных ускорений центра тяжести снаряда (акселерометры) . . . . . . . . . . . . . . . . . 178
§ 5.6. Датчики воздушной скорости или скоростного напора . . 179
§ 5.7. Датчики высоты . . . . . . . . . . . . . . . 180
§ 5.8. Определение путевой скорости . . . . . . . . . . 184
§ 5.9. Инерциальные навигационные системы . . . . . . . 191

Глава VI. Преобразование управляющих сигналов на снарядах . . . 205

§ 6.1. Общие сведения . . . . . . . . . . . . . . . 205
§ 6.2. Сглаживание и фильтрация сигналов . . . . . . . . 206
§ 6.3. Дифференцирование и интегрирование сигналов . . . . 211
§ 6.4. Суммирование сигналов . . . . . . . . . . . . 218
§ 6.5. Преобразователи координат . . . . . . . . . . . 221

Глава VII. Усилители и исполнительные механизмы систем управления снарядами . . . . . . . . . . . . . . . . . . 223

§ 7.1. Магнитные усилители . . . . . . . . . . . . 223
§ 7.2. Электронные и полупроводниковые усилители . . . . 226
§ 7.3. Исполнительные механизмы с электродвигателями . . . 229
§ 7.4. Исполнительные механизмы с гидродвигателями . . . 234
§ 7.5. Исполнительные механизмы с пневмодвигателями . . . 236

Глава VIII. Математическое описание движения снаряда . . . . . 240

§ 8.1. Системы координат . . . . . . . . . . . . . . 240
§ 8.2. Общие уравнения движения снаряда как твердого тела . 243
§ 8.3. Приведение общих уравнений движения снаряда к более простому виду . . . . . . . . . . . . . . . . . 248
§ 8.4. Уравнения продольного движения снаряда, полученные методом линеаризации, и их анализ . . . . . . . . . . 253
§ 8.5. Уравнения бокового движения снаряда, полученные методом линеаризации, и их анализ . . . . . . . . . . . 265
§ 8.6. Уравнения продольного движения снаряда, полученные методом группировки . . . . . . . . . . . . . . . 272
§ 8.7. Уравнения бокового движения снаряда, полученные методом группировки . . . . . . . . . . . . . . . . 274

Глава IX. Структура автопилотов . . . . . . . . . . . 277

§ 9.1. Общие сведения . . . . . . . . . . . . . . . 277
§ 9.2. Структурные схемы автопилотов . . . . . . . . . 278
§ 9.3. Примеры схем автопилотов для управления снарядами . . 285
§ 9.4. Релейный автопилот . . . . . . . . . . . . . 288

Глава X. Управление движением снаряда относительно его центра тяжести 290

§ 10.1. Общие сведения . . . . . . . . . . . . . . 290
§ 10.2. Боковое движение крестокрылого снаряда при отклонении руля . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 291
§ 10.3. Продольное движение снаряда при отклонении руля . . 299
§ 10.4. Боковое движение плоскокрылого снаряда при полете с креном . . . . . . . . . . . . . . . . . . 301
§ 10.5. Управление углом рыскания крестокрылого снаряда . . 305
§ 10.6. Управление углом тангажа снаряда . . . . . . . . 314
§ 10.7. Управление углом рыскания плоскокрылого снаряда . . 317
§ 10.8. Управление движением относительно центра тяжести снаряда, имеющего переменную скорость . . . . . . . 321

Стр.

§ 10.9. Управление углом крена снаряда с помощью релейных автопилотов . . . . . . . . . . . . . . . . 326
§ 10.10. Самонастраивающиеся системы автоматического управления полетом снарядов . . . . . . . . . . . 335

Глава XI. Управление движением центра тяжести снаряда относительно заданной траектории . . . . . . . . . . . . . . 342

§ 11.1. Общие сведения . . . . . . . . . . . . . 342
§ 11.2. Управление центром тяжести крестокрылого снаряда в боковом движении . . . . . . . . . . . . . 342
§ 11.3. Управление центром тяжести плоскокрылого снаряда в боковом движении . . . . . . . . . . . . . 354
§ 11.4. Управление центром тяжести снаряда в продольном движении 362
§ 11.5. Управление центром тяжести при переменной скорости движения снаряда . . . . . . . . . . . . . 367

Глава XII. Движение снарядов в неспокойной атмосфере . . 371

§ 12.1. Общие сведения . . . . . . . . . . . . . 371
§ 12.2. Математическое описание неспокойной атмосферы . . . 372
§ 12.3. Уравнения движения снаряда в неспокойной атмосфере . . 380
§ 12.4. Влияние постоянной составляющей ветра на движение снаряда . . . . . . . . . . . . . . . . 387
§ 12.5. Влияние случайной составляющей ветра на движение снаряда 398

Глава XIII. Динамика самонаводящихся снарядов . . . 408

§ 13.1. Кинематические траектории самонаведения . . . . . 408
§ 13.2. Уравнения движения самонаводящихся снарядов . . . 425
§ 13.3. Динамика самонаведения снаряда при параллельном сближении . . . . . . . . . . . . . . . . 430
§ 13.4. Динамика самонаведения при методе погони . . . 445

Глава XIV. Динамика телеуправляемых снарядов . . . 460

§ 14.1. Постановка задачи . . . . . . . . . . . . 460
§ 14.2. Кинематические траектории при методе трех точек . . . 461
§ 14.3. Динамика наведения снаряда по лучу . . . . . . 464
§ 14.4. Динамика метода трех точек при визуальном наведении 466
§ 14.5. Ввод снаряда в луч . . . . . . . . . . . 470
§ 14.6. Управление снарядами с помощью радиолокационных станций и радионавигационных систем . . . . . . . . 477

Глава XV. Динамика автономно наводимых снарядов . . . . . 489

§ 15.1. Управление и наведение самолетов-снарядов с помощью инерциальных систем . . . . . . . . . . . 489
§ 15.2. Траектория полета баллистических ракет малой дальности ($L=500$—$1000$ *км*) . . . . . . . . . . . 495
§ 15.3. Траектория полета баллистических ракет большой дальности ($L>1000$ *км*) . . . . . . . . . . . . 498
§ 15.4. Дальность полета баллистических ракет . . . . . . 503
§ 15.5. Ошибки по дальности баллистической ракеты дальнего действия . . . . . . . . . . . . . . . . 505
§ 15.6. Активный участок траектории баллистической ракеты . . 507

*Стр.*

§ 15.7. Автоматическое управление полетом ракеты на активном участке . . . . . . . . . . . . . . . 516
§ 15.8. Управление дальностью баллистической ракеты . . . . 522

*Глава XVI.* **Комплексы телеуправляемых снарядов и методы оценки точности стрельбы** . . . . . . . . . . . . . . . . . 525

§ 16.1. Общие сведения . . . . . . . . . . . . . . . 525
§ 16.2. Комплексы самонаводящихся снарядов . . . . . . 526
§ 16.3. Комплексы телеуправляемых снарядов . . . . . . 533

*Литература* . . . . . . . . . . . . . . . . . 543

---

*Юрий Павлович Доброленский, Валентина Ивановна Иванова, Гермоген Сергеевич Поспелов*

АВТОМАТИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СНАРЯДОВ

Издательский редактор *Л. И. Шейнфайн* Техн. ред. *А. Я. Новик*

Г-91405 Подписано в печать 16/X 1963 г. Учетно-изд. л. 31,54
Формат бумаги $60\times90^1/_{16}$=17,13 бум. л. —34,25 печ. л.
Цена 1 р. 25 к. Тираж 13 000 экз. Заказ 129/1689

Московская типография Госгортехиздата. Москва, Ж-88, Южно-портовый 1-й пр., 17.

## АВТОРСКОЕ ИСПРАВЛЕНИЕ

| Стр. | Строка | Напечатано | Следует читать |
|---|---|---|---|
| 342 | 10 сверху | средствами автономной радионавигации. | средствами как автономной навигации, так и радионавигации. |

Доброленский, Иванова, Поспелов. «Автоматика управляемых снарядов»



Ю.П. ДОБРОЛЕНСКИЙ
В.И. ИВАНОВА Г.С. ПОСПЕЛОВ

# АВТОМАТИКА УПРАВЛЯЕМЫХ СНАРЯДОВ

ОБОРОНГИЗ • 1963